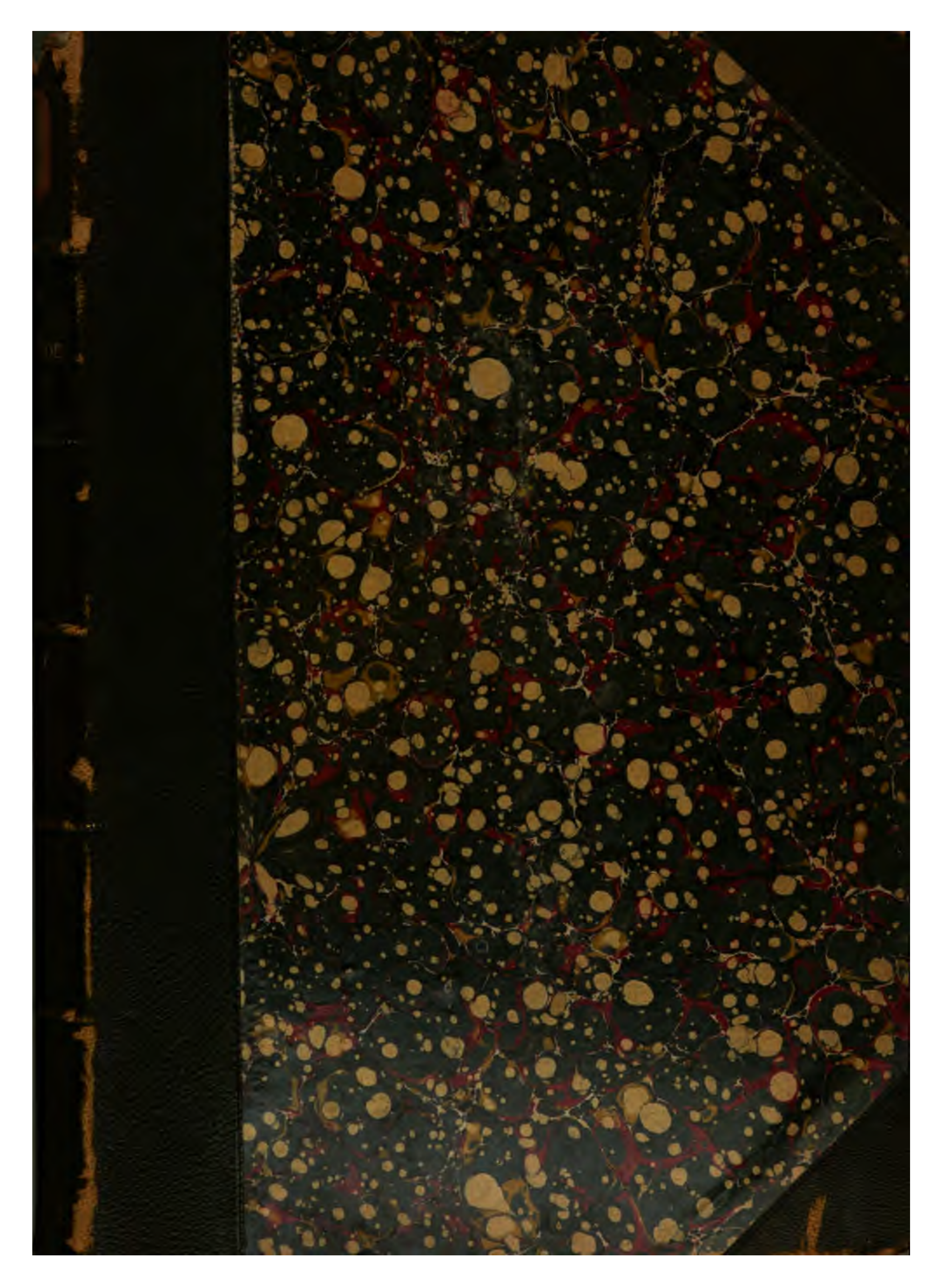
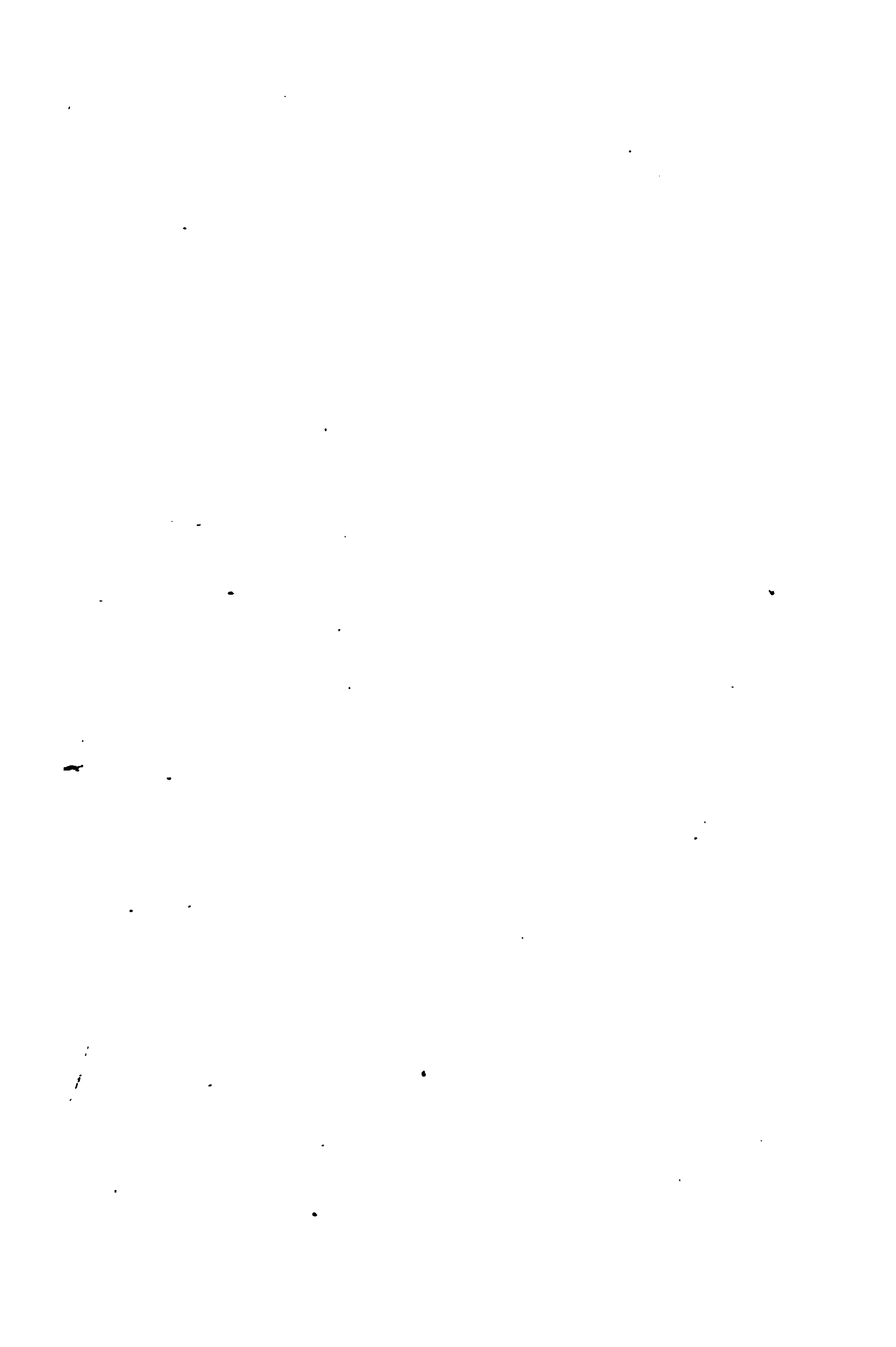






Lehrbuch

der

Darstellenden Geometrie

von

J. SCHLOTKE
Direktor a. D. der Gewerbeschule in Hamburg

I. Teil

Specielle Darstellende Geometrie

Mit 199 Figuren

Fünfte Auflage

Dresden
Verlag von Gerhard Kühtmann
1902

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die zweite Auflage dieses Lehrbuches ist völlig umgearbeitet und bedeutend erweitert. Sie erscheint in vier Teilen. Der erste vorliegende Teil umfasst das Gebiet bis zu den Anwendungen auf die Schattenkonstruktionen und beschränkt sich deshalb zunächst auf die Darstellung durch Parallelprojektionen. Der zweite Teil wird die Beleuchtungs- und Schattenlehre, und der dritte Teil die Centralprojektionen (Perspektive) enthalten. Der vierte Teil behandelt die projektivische Geometrie, ihren Zusammenhang mit der darstellenden Geometrie und ihre Verwendung in derselben; wobei auch besonders die Kegelschnitte eingehend berücksichtigt werden. Eine elementare Herleitung und Begründung der für das praktische Zeichnen wichtigen Eigenschaften der letzteren und einiger Flächen zweiter Ordnung findet sich jedoch schon in dem vorliegenden ersten Teile dieses Werkes.

Von sog. praktischen Anwendungen der darstellenden Geometrie ist abgesehen. Es sollte hier nur der für jeden Zeichner notwendige theoretische Teil vorgeführt werden. Dem Lehrer muss überlassen bleiben. welche etwaigen Anwendungen derselbe, je nach dem Fache des betreffenden Schülers, in den theoretischen Unterricht aufzunehmen, als zweckmässig erachtet.

Der Verfasser.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die dritte Auflage ist, was die Anordnung und den Gang des Unterrichts betrifft, unverändert geblieben. Es ist jedoch dem Anhang weiteres Übungsmaterial hinzugefügt worden, und haben in demselben auch die regelmässigen Körper ihres allgemeinen Interesses wegen Platz gefunden.

Der Verfasser.

Vorwort zur vierten Auflage.

Auch der vierten Auflage sind, besonders im Anhang, eine Reihe neuer Übungsaufgaben, welche zur Ausbildung der räumlichen Vorstellungskraft nützlich sein können, hinzugefügt worden. — Bei schwierigeren Fällen ist der Weg zur Lösung angedeutet, aber es bleibt dem Studierenden immerhin noch die selbständige Darstellung mit Hülfe der Projektionen überlassen.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

1) Projektion eines Punktes. Durch einen gegebenen Punkt S des Raumes lassen sich unzählig viele Strahlen ziehen. Man nennt die Gesamtheit aller durch S gehenden Strahlen ein „Strahlenbündel", und S den Mittelpunkt (Centrum) desselben. —

Ist nun eine beliebige Ebene P (Fig. 1) und ein Punkt A gegeben, ebenso der Mittelpunkt S eines Strahlenbündels, so wird derjenige Strahl desselben, welcher durch A geht, die Ebene P in einem Punkte a schneiden. Man nennt alsdann a die Projektion des Punktes A, und sagt: der Punkt A ist von S aus auf P projiciert.

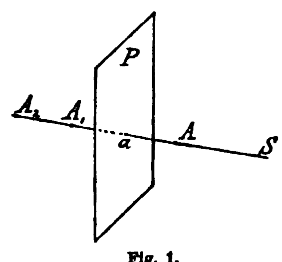


Fig. 1.

Der Strahl SA heisst der projicierende Strahl, P wird die Projektionsebene genannt. — Hieraus ergiebt sich:

Alle Punkte, welche auf demselben Strahle liegen, z. B. A, A_1, A_2, haben dieselbe Projektion a.

Ist der, einen gegebenen Punkt projicierende Strahl parallel zur Projektionsebene, so liegt die Projektion des Punktes unendlich fern. —

2) Projektion einer Geraden. Werden aus einem Mittelpunkte S (Fig. 2) alle Punkte einer gegebenen Geraden AB auf eine Ebene P projiciert, so bilden die Projektionen dieser Punkte die Projektion der Geraden AB. — Die projicierenden Strahlen liegen in derjenigen Ebene M, welche durch AB und den Punkt S bestimmt ist. — Diese Ebene heisst die projicierende Ebene. — Die Projektion der Geraden AB ist demnach der Durchschnitt der projicierenden Ebene M mit der Projektionsebene P, folglich wieder eine Gerade ab. — Die Projektion jeder anderen Geraden, z. B. $A_1 B_1$, welche in der Ebene M liegt, fällt mit ab zusammen. —

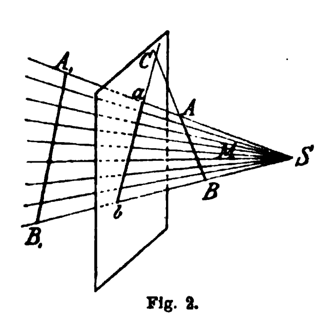


Fig. 2.

Der Schnittpunkt C der Geraden AB mit der Projektionsebene liegt auf der Projektion ab. — C fällt also mit seiner Projektion zusammen.

Ist das Projektionscentrum, die Projektionsebene und ein Punkt oder eine Gerade gegeben, so ist die Projektion des Punktes bez. der Geraden

bestimmt. — Der räumliche Punkt oder die räumliche Gerade sind aber durch ihre Projektionen noch nicht völlig bestimmt. —

Die Projektion eines Punktes bestimmt nur den projicierenden Strahl, die Projektion der Geraden nur die projicierende Ebene. —

3) Projektionen krummer Linien. Werden alle Punkte einer krummen Linie von einem Punkte S aus, auf eine Ebene P projiciert, so erhält man die Projektion der krummen Linie. — Die projicierenden Strahlen bilden eine Kegelfläche, deren Spitze das Projektionscentrum S ist.

4) Projektion eines räumlichen Gebildes.

Die Projektion eines beliebigen räumlichen Gebildes besteht aus den Projektionen der sämtlichen Punkte, geraden oder krummen Linien, welche das Gebilde enthält. Eine geschlossene krumme Fläche, z. B. eine Kugelfläche, wird von einem ausserhalb derselben liegenden Punkte aus durch eine berührende Kegelfläche projiciert.

5) Die Abbildungen.

Wird die Projektion eines räumlichen Gebildes von einem im Projektionscentrum befindlichen Auge betrachtet, so wird die Projektion mit dem räumlichen Gebilde scheinbar zusammenfallen. — Die Projektion macht aus diesem Grunde auf das Auge denselben Eindruck wie das Raumgebilde, sie ist deshalb als eine Abbildung des letzteren zu betrachten.

Liegt das Projektionscentrum unendlich fern, so werden die projicierenden Strahlen parallel. — Die Projektionen, welche bei dieser Lage des Projektionscentrums entstehen, heissen Parallelprojektionen, während die Projektionen bei endlicher Entfernung des Projektionscentrums Centralprojektionen genannt werden.

Bei den Parallelprojektionen unterscheidet man noch gerade und schiefe Projektionen. — Eine gerade Projektion eines räumlichen Gebildes entsteht, wenn die projicierenden Strahlen senkrecht zur Projektionsebene stehen. — Schiefe Projektionen erhält man bei jeder anderen Lage der projicierenden Strahlen.

Die Parallelprojektionen werden ebenfalls als Abbildungen benutzt. Unter diesen sind die geraden Projektionen für die Praxis die wichtigsten, weil diese die wahren Dimensionen des dargestellten Gegenstandes am leichtesten erkennen lassen.

Die darstellende Geometrie lehrt die Herstellung der Projektionen räumlicher Gebilde. — Sie zeigt ferner, wie mit Hülfe der Projektionen Aufgaben der Raumgeometrie durch Konstruktionen auf einer ebenen Zeichenfläche gelöst werden können.

I. Abschnitt.

Die Parallelprojektionen.

A) Die geraden Projektionen.

1) Soll ein Punkt A auf eine Ebene P (Fig. 3) projiciert werden, so ist von A ein Lot auf P zu fällen. Der Fusspunkt a des Lotes ist alsdann die Projektion von A. Jeder Punkt, welcher auf der projicierenden Geraden Aa liegt, hat a zur Projektion. Liegt A in der Ebene P, so fällt der Punkt mit seiner Projektion zusammen.

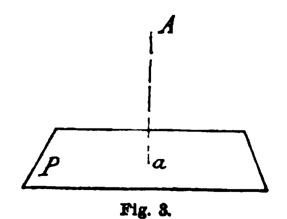


Fig. 3.

2) Die Projektion einer Geraden AB (Fig. 4) ist die Verbindungslinie ab der Projektionen ihrer Endpunkte. Auf ab liegen die Projektionen aller übrigen Punkte der Geraden AB. Im allgemeinen ist die Projektion ab kürzer als AB; nur wenn AB parallel zur Projektionsebene P ist, wird ab $=$ AB. Nähert sich AB der senkrechten Lage zur Ebene P, so wird ab kleiner, und wird zu einem einzigen Punkt, wenn AB senkrecht zu P steht.

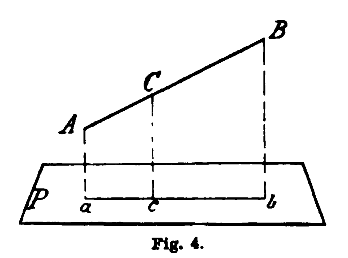


Fig. 4.

3) Die Projektion f einer ebenen geradlinig begrenzten Figur F, wird von den Projektionen der einzelnen Seiten derselben eingeschlossen (Fig. 5). Ist F parallel zur Projektionsebene P, so ist f $\cong$ F. Steht aber F senkrecht zu P, so wird f zu einer geraden Linie. Das Gleiche gilt für die Projektionen ebener Figuren, welche von krummen Linien begrenzt sind.

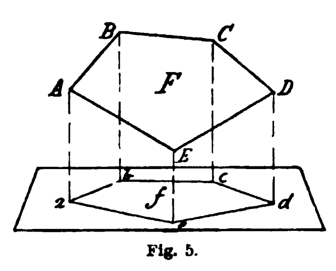


Fig. 5.

4) Unter den Projektionen der letzteren betrachten wir zunächst nur

die des Kreises (Fig. 6). Ist der Kreis K der Projektionsebene P parallel, so sind die projicierenden Geraden die Seitenlinien der Mantelfläche eines geraden Cylinders; die Projektion k ist deshalb, als ein zu K paralleler Schnitt des Cylinders, K kongruent, also wieder ein Kreis. Bei jeder andern Lage wird k eine Ellipse, deren grosse Achse dem Durchmesser des Kreises K gleich ist (s. IV, 8). Dieselbe geht in eine Gerade über, wenn K senkrecht zu P steht.

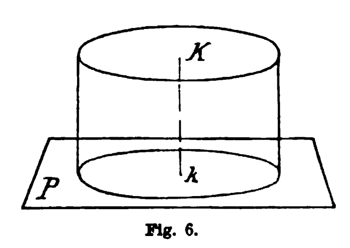


Fig. 6.

5) Um in anschaulicher Weise auf das eigentliche Studium der darstellenden Geometrie vorzubereiten, betrachten wir noch die Projektionen der einfachen, schon in der Stereometrie vorkommenden Körper. Hierbei ist zu bemerken, dass die geraden Projektionen eines Körpers vorzugsweise zur Massbestimmung dienen sollen. Weil aber nach 1) durch die Projektion eines Punktes A seine Lage auf der projicierenden Geraden nicht bestimmt ist, so lassen sich auch die Dimensionen eines Körpers aus einer Projektion desselben im allgemeinen nicht bestimmen. Man stellt deshalb einen Körper stets durch seine Projektionen auf zwei Ebenen dar, welche der Einfachheit wegen in der Regel senkrecht zu einander angenommen werden.

Projektionen eines rechtwinkligen Parallelepipedums (Fig. 7).

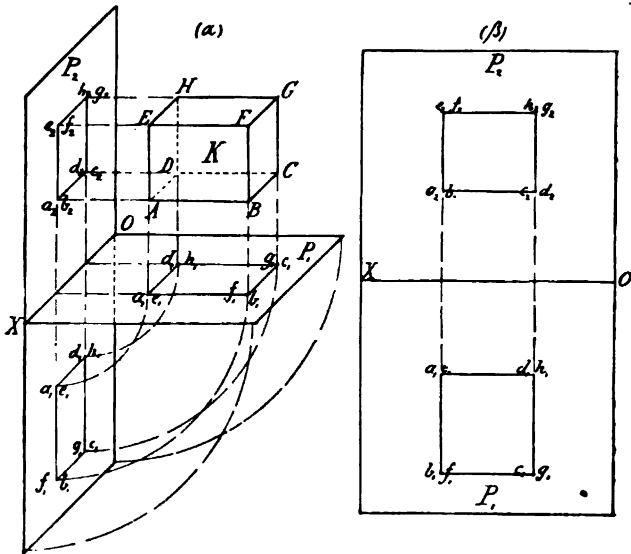


Fig. 7.

Das Parallelepipedum K soll auf die beiden Ebenen P_1 und P_2, welche senkrecht zu einander stehen, projiciert werden. Die Grundfläche ABCD sei parallel zu P_1, und die Seitenfläche ADEH parallel zu P_2. Unter dieser Voraussetzung sind die Kanten AD, BC, FG und EH parallel zur Schnittlinie OX (Achse) der beiden Projektionsebenen. Ferner stehen AE, BF, CG, DH senkrecht zu P_1, und AB, CD, EF, GH senkrecht zu P_2. — Hieraus folgt, dass die Projektionen der beiden Rechtecke ABCD und EFGH auf P_1 zusammenfallen, wir erhalten deshalb als Projektion des Parallelepipedums K auf P_1 ein der Grundfläche ABCD kongruentes Rechteck $a_1 b_1 c_1 d_1$. Ebenso ist die zweite Projektion von K ein Rechteck $b_2 c_2 g_2 f_2$, welches der Seitenfläche ADHE kongruent ist. Denkt man sich die Ebene P_1 um die Achse OX so weit gedreht, bis sie in die nach unten erweiterte Ebene P_2 fällt, so erhält man eine ebene Figur, welche in Fig. 7 (β) in wahrer Gestalt dargestellt ist. Leicht ergiebt sich dann (durch Vergleich mit Fig. 7α), dass die Projektionen desselben Eckpunktes auf einer Senkrechten zur Achse OX liegen müssen. — Durch die erste Projektion ist nun Länge und Breite des Parallelepipedums K und durch die zweite die Höhe desselben bestimmt.

6) Projektionen einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche (Fig. 8).

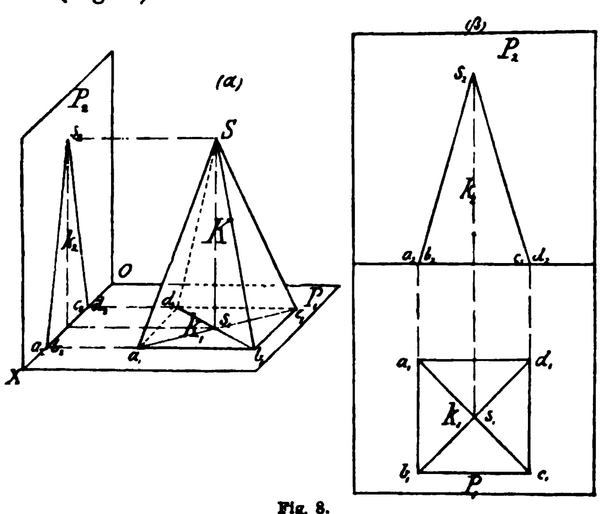


Fig. 8.

Die Pyramide K stehe mit ihrer Grundfläche auf der ersten Projektionsebene P_1. Die erste Projektion k_1 ist in diesem Falle ein mit der Grundfläche zusammenfallendes Quadrat, dessen Mittelpunkt die Pro-

jektion der Spitze ist, während die Projektionen der vier von der Spitze ausgehenden Kanten mit den Diagonalen des Quadrats zusammenfallen. — Die zweite Projektion k_2 ist ein, auf OX stehendes gleichschenkliges Dreieck. — Durch k_1 und k_2 sind nun Länge und Breite der Grundfläche sowohl, als auch die Höhe der Pyramide bestimmt.

7) Projektionen eines geraden auf der ersten Projektionsebene stehenden Cylinders mit kreisförmiger Grundfläche (Fig. 9, α u. β).

Leicht ergiebt sich, dass die erste Projektion ein mit der Grundfläche zusammenfallender Kreis, und die zweite Projektion ein auf der Achse stehendes Rechteck ist, dessen Grundlinie dem Durchmesser der

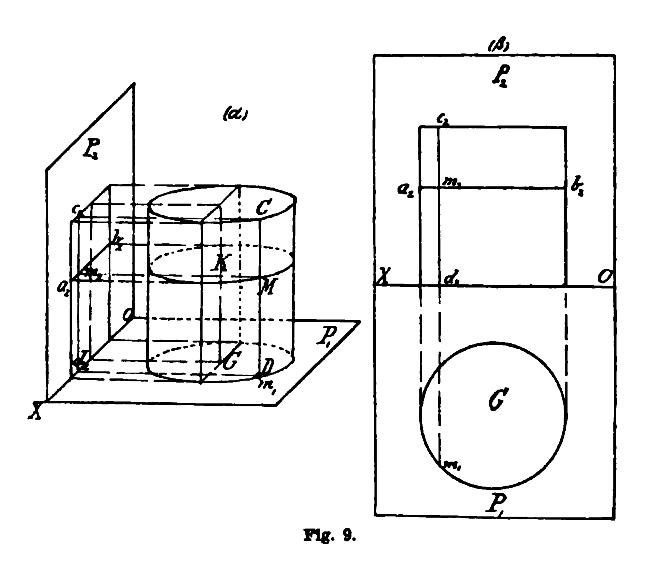


Fig. 9.

Grundfläche und dessen Höhe gleich der Höhe des Cylinders ist. Die erste Projektion eines Schnittkreises K, welcher parallel zur Grundfläche G ist, fällt mit G zusammen; die zweite Projektion ist eine zur Achse OX parallele Gerade $a_2 b_2$. Eine Seitenlinie der Cylinderfläche z. B. CD erscheint in der ersten Projektion als Punkt m_1; ihre zweite Projektion $c_2 d_2$ steht senkrecht zu OX.

Die Gerade CD schneidet den Kreis K in einem Punkte M, dessen zweite Projektion m_2 im Durchschnitt von $a_2 b_2$ und $c_2 d_2$ liegt. Die erste Projektion m_1 dieses Punktes liegt im Umfang der Grundfläche und fällt mit dem Fusspunkte D der Seitenlinie CD zusammen.

8) Projektionen eines geraden Kegels mit kreisförmiger Grundfläche, welcher auf der ersten Projektionsebene steht (Fig. 10, α u. β).

Die erste Projektion der Kegelfläche wird durch den Grundkreis dargestellt und die Projektion der Spitze S ist der Mittelpunkt desselben. Jeder Halbmesser der Grundfläche z. B. $a_1 s_1$ ist zugleich die Projektion einer Seitenlinie (a_1 S). Die zweite Projektion des Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie in der Achse OX liegt, und dessen

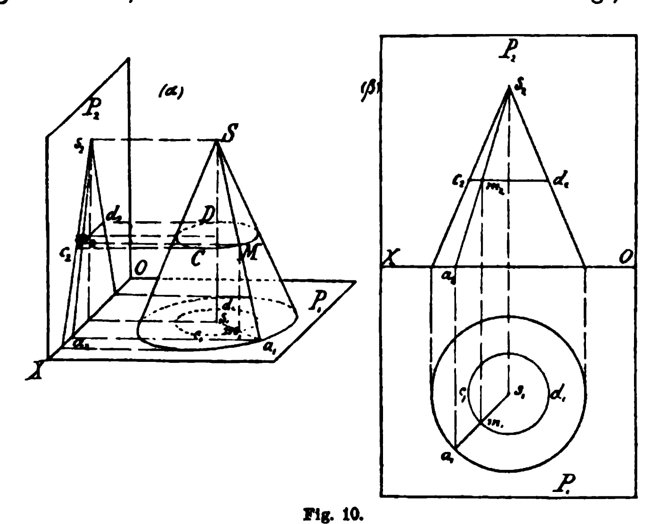


Fig. 10.

Höhe derjenigen des Kegels gleich ist. Durch einen beliebigen Punkt M der Mantelfläche kann man eine Seitenlinie a_1 S ziehen, deren Projektionen $a_1 s_1$ bez. $a_2 s_2$ sind. Ebenso lässt sich durch M ein Kreisschnitt parallel zur Grundfläche legen. Die erste Projektion $c_1 d_1$ ist ein ihm gleicher Kreis, welcher konzentrisch zur Grundfläche liegt; die zweite Projektion erscheint als eine zur Achse parallele Gerade $c_2 d_2$. Die Projektionen m_1 und m_2 des Punktes M fallen dann in die Durchschnitte von $c_1 d_1$ mit $a_1 s_1$ bez. $c_2 d_2$ mit $a_2 s_2$.

9) Projektionen einer Kugel (Fig. 11α u. β).

Die projicierenden Geraden, welche eine Kugelfläche berühren, bilden eine dieselbe umhüllende Cylinderfläche. Bei gerader Projektion wird die letztere von der Projektionsebene rechtwinklig, also in einer Kreislinie durchschnitten. Die beiden Projektionen der Kugel werden deshalb durch die gleichen Kreise k_1 und k_2 dargestellt, deren Mittelpunkte c_1 und c_2 auf einer zur Achse OX senkrechten Geraden liegen. Diese Kreise stellen

zugleich die Projektionen derjenigen grössten Kreise der Kugel dar, welche parallel zu P_1 bez. P_2 sind.

Liegt auf der Kugelfläche ein kleinerer Kreis parallel zu P_1, so ist die erste seine Projektion ein gleicher Kreis mit dem Mittelpunkte c_1;

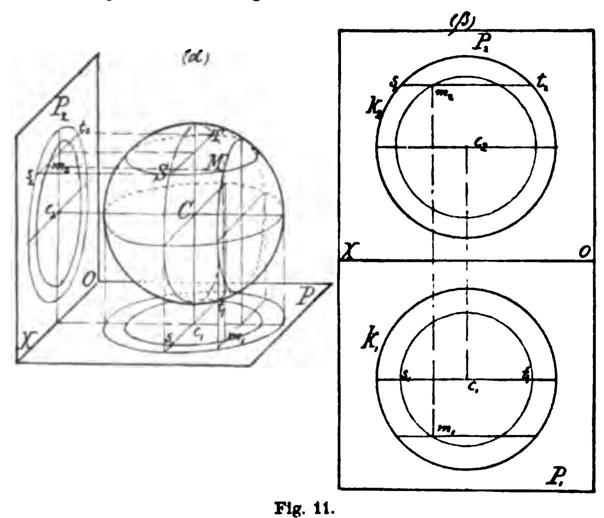


Fig. 11.

die zweite Projektion erscheint als gerade Linie $s_2 t_2$, welche parallel zur Achse OX liegt. Die Sehne $s_2 t_2$ ist gleich dem Durchmesser der ersten Projektion dieses Kreises. Entsprechendes gilt für einen kleineren Kreis, welcher parallel zu P_1 ist. Hiernach bestimmt man aus einer gegebenen Projektion m_1 eines Punktes M der Kugelfläche leicht seine andere Projektion.

B. Schiefe Projektionen.

1) Schiefe Projektionen entstehen nach Einl. 5, wenn die projicierenden Geraden parallel, aber nicht senkrecht zur Projektionsebene stehen. Wir betrachten zunächst die Projektionen einer Geraden AB, wenn diese parallel zur Projektionsebene P ist (Fig. 12). Zieht man durch alle Punkte von AB Parallelstrahlen unter einem beliebigen Winkel zu P, so bilden die Strahlen die projicierende Ebene S, welche P nach einem bekannten Satze der Stereometrie in einer zu AB parallelen Geraden ab schneidet. ab ist nun die Projektion von AB, und da

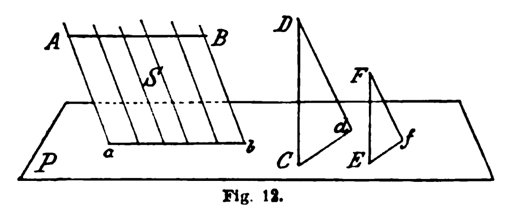


Fig. 12.

Aa ∥ Bb, so ist ABba ein Parallelogramm, in welchem ab = AB ist. Jede schiefe Projektion einer zur Projektionsebene parallelen Geraden ist deshalb gleich und parallel zu derselben. Hieraus folgt weiter, dass die Projektion jeder ebenen Figur Q, welche eine zur Projektionsebene parallele Lage hat, der Q kongruent ist. Die Projektion einer Geraden, welche nicht parallel zu P ist, kann jede beliebige Länge erhalten; die letztere hängt von der Richtung der projicierenden Strahlen ab. Insbesondere kann jede Gerade, z. B. Cd, welche durch den Fusspunkt einer zu P senkrechten Geraden CD in der Projektionsebene gezogen wird, als eine schiefe Projektion von CD angesehen werden, wenn man die Richtung der projicierenden Strahlen parallel zu der Verbindungslinie der Endpunkte D und d annimmt. Werden zwei parallele Geraden, z. B. CD und EF projiciert, so sind ihre Projektionen CD und Ef parallel. Ferner sind die Dreiecke CDd und EFf ähnlich, folglich verhält sich $CD : Cd = EF : Ef$. Ist demnach $Cd = \frac{1}{n} CD$, so ist auch $Ef = \frac{1}{n} EF$, d. h. die Projektionen paralleler Strecken haben dasselbe Verkürzungsverhältnis.

Nach diesen Bemerkungen lassen sich schiefe Projektionen gegebener Körper leicht herstellen. Als Beispiel diene die Projektion eines Würfels, wenn eine Seitenfläche efgh auf der Projektionsebene liegt (Fig. 13). Die Projektion der efgh gegenüberliegenden Seitenfläche ist ein gleiches Quadrat abcd. Die gleich langen und parallelen Verbindungslinie ae, bf, cg und dh der Ecken beider Quadrate sind die Projektionen der vier Kanten des Würfels, welche senkrecht zur Projektionsebene stehen. Aus der gegebenen Projektion kann nun auch leicht die Richtung der projicierenden Strahlen gefunden werden. Es ist nämlich a die Projektion des senkrecht über e liegenden Eckpunktes des Würfels. Bezeichnet man diesen Punkt mit A, so ist Aa der projicierende Strahl; derselbe bildet mit ae und Ae ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem ∠Aae die Neigung des projicierenden Strahls gegen die Projektionsebene angiebt. Dieses Dreieck drehe man um die Kathete ae, bis dasselbe in die Projektionsebene fällt. Man mache demnach A′e senkrecht zu ae und gleich der Kante des Würfels (z. B. = ef); ziehe A′a, so ist A′ae der gesuchte Neigungswinkel.

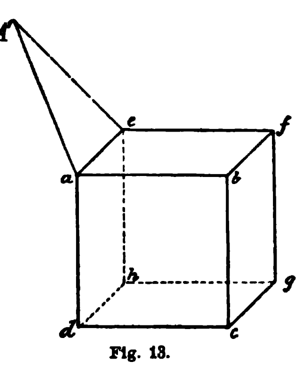
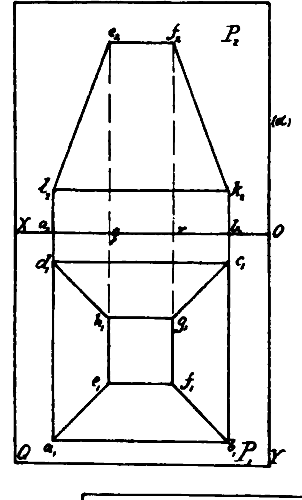


Fig. 13.

Aus dieser Darstellung folgt, dass man schiefe Projektionen konstruieren kann, ohne die projicierenden Strahlen zu benutzen, wenn nur die Richtung und die Verkürzung der Projektion einer zur Projektionsebene P senkrechten Geraden gegeben ist. Die am häufigsten angewandte Verkürzung ist $\frac{1}{2}$ der wahren Länge, und diese ist aus praktischen Gründen die brauchbarste. Zur Darstellung der Krystallformen wird meistens $\frac{1}{3}$, dagegen im Baufache, namentlich bei Steinschnitten häufig die wahre Länge aufgetragen. In dem letzteren Falle müssen die projicierenden Strahlen einen Winkel von 45° mit P bilden. Die Projektionen erscheinen dann allerdings als sehr stark verzerrte Abbildungen; sie dienen aber nicht allein zur Erleichterung der Anschauung verwickelter Steinformen, sondern auch zur Massbestimmung.



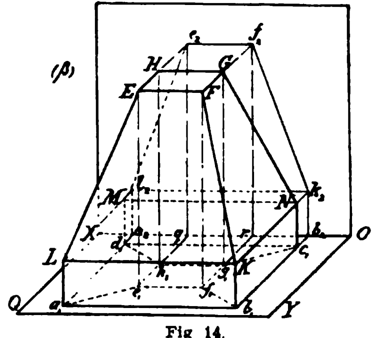


Fig 14.

2) Schiefe Projektion einer abgestumpften quadratischen Pyramide, welche auf einem quadratischen Sockel steht (Fig. 14).

Der gegebene Gegenstand ist in Fig. 14 (α) durch erste und zweite Projektion dargestellt. Wir nehmen P_2 als Projektionsebene an; dieselbe ist in (β) in gleicher Grösse wieder dargestellt. Die schiefe Projektion der Ebene P_1 ist nun ein Parallelogramm XOYQ, in welchem OY halb so lang sei wie die entsprechende Kante in (α). Der Winkel zwischen OX und OY ist gleich 45° angenommen. Hierdurch ist nun alles nötige zur Konstruktion gegeben.

Man trage die Strecken Oa_2 und Ob_2 aus (α) in (β) auf OX ab; ziehe a_2a_1 und b_2b_1 parallel zu OY und mache in (β) diese Strecken, sowie b_2c_1 und a_2d_1 halb so lang wie in (α). Verbindet man a_1 mit b_1 und c_1 mit d_1, so erhält man die schiefe Projektion der Grundfläche. In den Eckpunkten sind nun die Senkrechten a_1L, b_1K, c_1N und d_1M zu errichten, und gleich den in wahrer Länge erscheinenden zweiten Projektionen a_2l_2 oder b_2k_2 zu machen. Hierdurch ist nun auch die

Projektion LKNM der Grundfläche der Pyramide bestimmt. Um die obere Grundfläche der letzteren darzustellen, benutzt man die erste Projektion $e_1 f_1 g_1 h_1$ in (α) und zeichnet dieselbe in schiefer Projektion in (β). Man trage demnach Or und Oq aus (α) auf OX in (β) ab; ziehe rf_1 und qe_1 parallel Oy, mache rg_1, rf_1, qh_1 und qe_1 halb so lang wie in (α), wodurch man in (β) das Parallelogramm $e_1 f_1 g_1 h_1$ erhält. In den Eckpunkten des letzteren sind die Senkrechten Ee_1, Ff_1, Gg_1 und Hh_1 zu errichten und gleich $e_2 q$ in (α) zu machen. Dadurch ist EFGH als schiefe Projektion der oberen Grundfläche bestimmt. Endlich sind noch die vier Kanten EL, FK, GN und HM hinzuzufügen.

In (β) ist auf P_2 auch noch die zweite Projektion der Pyramide hinzugefügt, welche in gleicher Gestalt wie in (α) erscheint. Man kann aus dieser und der schiefen Projektion des Grundrisses ebenfalls leicht die schiefe Projektion der Pyramide bestimmen, indem man in allen Ecken die projicierenden Geraden zieht. Dies ist auch aus der Figur deutlich zu ersehen und bedarf deshalb keiner weiteren Erklärung.

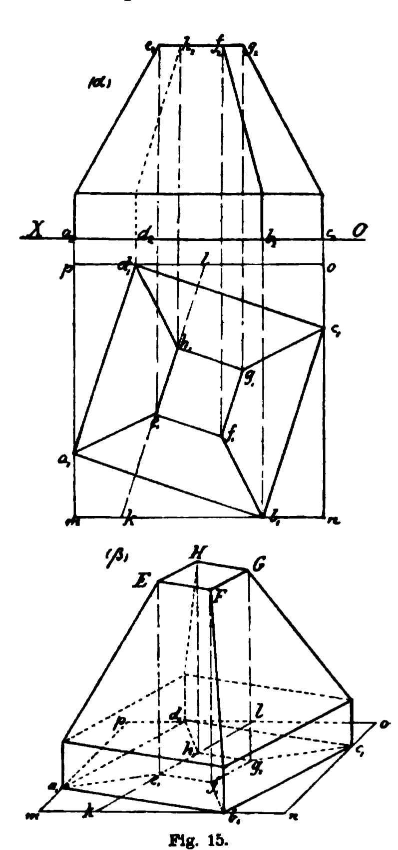


Fig. 15.

Auf diese Weise sind auch die Erläuterungsfiguren Fig. 7—11 als schiefe Projektionen dargestellt, bei welchen die Achse OX in halber wahrer Länge gezeichnet ist.

3) Ist in dem vorigen Falle keine Seite des Quadrats $a_1 b_1 c_1 d_1$ parallel zur Achse OX_1 (Fig. 15), so kann man die schiefe Projektion der Pyramide auf P_2 in folgender Weise finden. Man zeichne um die Grundfläche ein neues Quadrat mnop, dessen Seiten durch die Ecken a_1, b_1, c_1, d_1 gehen so dass mn und op parallel zur Achse OX werden. Die schiefe Projektion dieses Quadrats auf P_2 sei das Parallelogramm mnop in (β), wobei mn die wahre Länge, und no die Hälfte der gleichnamigen Strecke in (α) ist. Macht man in (β) $b_1 n$ und $d_1 p$ gleich, und $a_1 m$ sowie $c_1 o$ gleich den Hälften der entsprechenden Strecken in (α), dann ist

$a_1 b_1 c_1 d_1$ die schiefe Projektion der Grundfläche. Es ist nun zweckmässig, die schiefe Projektion des Grundrisses vollständig zu zeichnen. Verlängere also in (α) $e_1 h_1$ bis k und l und übertrage die Strecken mk und pl nach (β). Verbindet man in der letzteren Figur k mit l, so schneidet diese Linie die Diagonalen $b_1 d_1$ und $a_1 c_1$ in e_1 und h_1. Hiernach ist das Parallelogramm $e_1 f_1 g_1 h_1$, dessen Seiten parallel zu denen der Grundfläche $a_1 b_1 c_1 d_1$ sein müssen, leicht zu finden. Es ist jetzt nur noch nötig, in jedem Eckpunkte der schiefen Projektion des Grundrisses die entsprechende, aus der zweiten Projektion in (α) zu entnehmende Höhe aufzutragen, wodurch dann alles bestimmt ist.

4) Schiefe Projektion des Kreises.

Ist der Kreis parallel zu der Projektionsebene, so wird seine Projektion wieder ein Kreis von derselben Grösse, welcher gezeichnet werden kann, sobald die Projektion seines Mittelpunktes bestimmt ist. Liegt der Kreis jedoch in P_1 oder parallel zu dieser Ebene und soll derselbe schief auf P_2 projiciert werden, so kann man die Projektion des zur Achse parallelen Durchmessers ab (Fig. 16) ebenfalls parallel zu OX und in wahrer Grösse zeichnen. Die Projektion cd des zu ab senkrechten Durchmessers ist in (β) unter 45° zu ab und in halber Länge gezeichnet, wodurch nun wieder alles übrige bestimmt ist. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt h des Durchmessers ab die Sehne eg senkrecht zu ab; mache mh in (β) so gross wie in (α), dagegen eg || zu cd und halb so lang wie in (α), dann sind e und g in (β) zwei Punkte der schiefen Projektion des Kreises. Auf diese Weise lassen sich so viele Punkte bestimmen, wie nötig sind. Für gute Zeichnung des Kreises ist die Kenntnis der Tangenten in einzelnen Punkten desselben nützlich. Zunächst kann man in (β) die vier Tangenten in a, b, c und d parallel zu den Durchmessern ab und cd ziehen. Dieselben bilden die schiefe Projektion des dem Kreise umbeschriebenen Quadrats. Ist in (α) ne die Tangente für den Punkt e, n ihr Schnittpunkt mit dem verlängerten Durchmesser ab, so trage man mn auch in (β) von m aus auf ab ab, dann ist die Gerade ne in (β) die schiefe Projektion der Tangente im Punkte e.

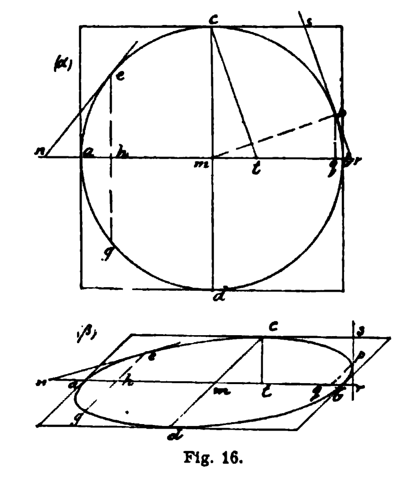


Fig. 16.

Man kann auch diejenigen Tangenten leicht finden, welche in (β) rechtwinklig zum Durchmesser ab stehen. Ziehe ct senkrecht zu ab und trage mt aus (β) in (α) auf mb ab, dann ist ct in (β) die schiefe Projektion der gleichnamigen Geraden in (α). Legt man nun eine Tangente rs parallel zu ct an den Kreis, so wird die Projektion derselben in (β) ebenfalls parallel zu ct, also senkrecht zu ab stehen. Dabei ist mr in (β) so lang wie in (α). Die Projektion des Berührungspunktes kann wie die des Punktes e gefunden werden. Auf gleiche Weise bestimmt man links die zu rs parallele Tangente. Die Konstruktion dieser beiden letzten Tangenten kommt bei den schiefen Projektionen der Cylinderfläche zur Anwendung.

Die schiefe Projektion des Kreises ist eine Ellipse. Die weiteren Eigenschaften dieser für das Zeichnen so wichtigen Kurve finden sich in (IV, 3).

5) Schiefe Projektionen des geraden Cylinders.

Die Grundflächen seien parallel zu P_2, dann werden die schiefen Projektionen derselben nach (B, 1) zwei ebenso grosse Kreise sein. Die Achse oder Seitenlänge cd ist in halber Länge dargestellt. Fig. 17(α).

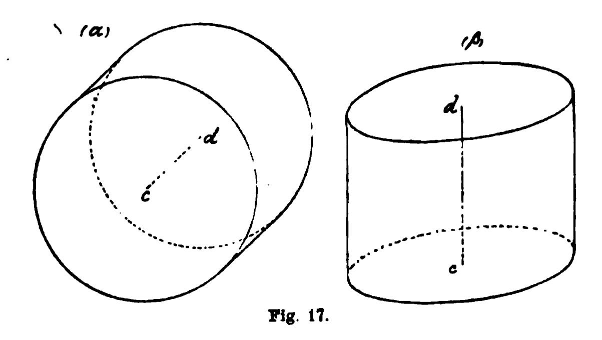


Fig. 17.

Liegen die Grundflächen parallel zu P_1 (s. β), so erhält man ihre Projektionen auf P_2 wie in 4 angegeben. Die Achse cd ist dann parallel zu P_2 und erscheint deshalb in der Projektion in wahrer Länge.

Die oben gegebenen Erläuterungen über die Herstellung schiefer Projektionen werden zur Konstruktion derselben für einfachere Fälle genügen. Wir gehen jetzt zum genaueren Studium der geraden Projektionen und ihrer Eigenschaften über, wobei die schiefen Projektionen häufig als Mittel zur Erleichterung der Raumanschauung benutzt werden sollen.

II. Abschnitt.

Darstellung des Punktes und der geraden Linie.

1) Die Lage eines Punktes ist nach Einl. 2 durch eine Projektion desselben noch nicht bestimmt. Wie in Abschn. I. werden deshalb auch hier wieder zwei senkrecht aufeinander stehende Projektionsebenen P_1 und P_2 (Fig. 18) benutzt, deren Durchschnittslinie die Achse OX ist. Es

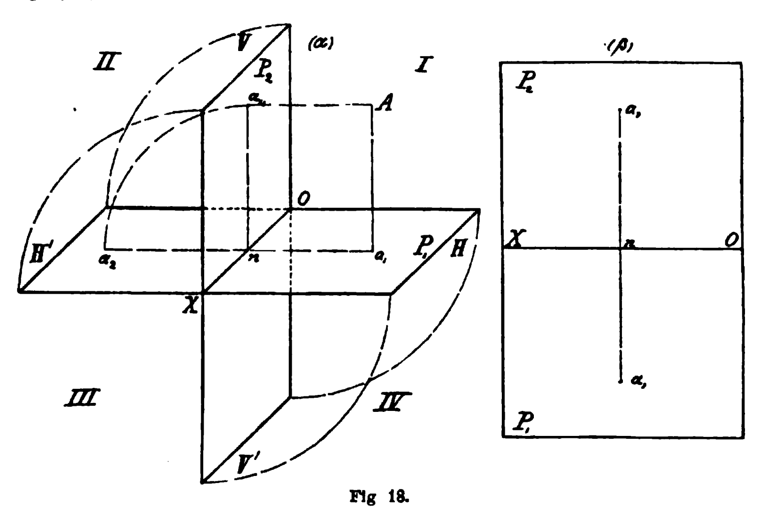


Fig 18.

wird vorausgesetzt, dass P_1 und P_2 über die Achse hinaus beliebig erweitert sind. Zwischen den Projektionsebenen entstehen alsdann vier Räume, welche Quadranten genannt werden. Dieselben sind in (α) mit I, II, III, IV bezeichnet. HXO heisst der vordere Teil, H^1XO der hintere Teil der Ebene P_1, und ebenso VXO der obere Teil, V^1XO der untere Teil der Ebene P_2.

Es sei nun A ein im ersten Quadranten liegender Punkt. Fällt man von A aus das Lot Aa_1 auf die erste Projektionsebene P_1, so ist der Fusspunkt a_1 die erste Projektion (Horizontalprojektion, Grundriss) des Punktes A. Zieht man ferner Aa_{11} senkrecht zu P_2, so ist der Schnittpunkt a_{11} die zweite Projektion (Vertikalprojektion, Aufriss) von A. Werden noch von a_1 sowohl, als auch von a_{11} Lote auf OX gefällt, so treffen diese in demselben Punkte n der Achse zusammen. Es sind

nämlich $a_1 n$ und $a_{11} n$ die Schnittlinien der Ebene, welche durch Aa_1 und Aa_{11} geht, mit P_1 und P_2.

Um die beiden Projektionen von A auf der ebenen Zeichenfläche so darzustellen, dass die wahre Lage von a_1 und a_{11} auf der ersten, bez. zweiten Projektionsebene sofort zu erkennen ist, dreht man P_2 um die Achse OX (wie schon in I, 5 angegeben ist), bis P_2 mit der ersten Projektionsebene zusammenfällt. Bei dieser Drehung beschreibt a_{11} einen Viertelkreis mit dem Halbmesser na_{11} und gelangt schliesslich nach a_2, wo nun $a_2 n$ und $a_1 n$ eine Gerade bilden, welche senkrecht zu OX steht. Die ebene Figur, welche nach der Niederklappung der zweiten Ebene in die erste entsteht, ist in Fig. 18 (β) dargestellt. In dieser bedeutet der oberhalb OX liegende Teil der Zeichenfläche den oberen Teil der zweiten und zugleich den hinteren Teil der ersten Projektionsebene. Unterhalb OX liegt der vordere Teil der ersten und der untere Teil der zweiten Projektionsebene. Die beiden Projektionen a_1 und a_2 liegen auf einer Geraden, welche senkrecht zur Achse OX steht.

Anm. (α) ist eine schiefe Projektion, in welcher OX und alle zu derselben parallelen Geraden halb so lang wie in (β) gezeichnet sind. XV und XH haben in beiden Figuren gleiche Länge, ebenso na_1 und na_2. Ferner ist Xn in (α) halb so gross wie in (β).

Mit Hülfe von Fig. 18 (β) kann man sich eine Vorstellung von der Lage des Punktes A in Bezug auf die Projektionsebenen machen, wenn man sich den oberhalb OX liegenden Teil der Zeichenfläche aufgerichtet denkt, bis derselbe senkrecht zu der unterhalb OX liegenden Fläche P_1 steht. Alsdann liegt A senkrecht über a_1 in einer Höhe, welche gleich $a_2 n$ ist.

Leicht ergiebt sich noch, dass in Fig. 18 (β) die Strecke $a_1 n$ gleich dem Abstand des Punktes A von der zweiten Projektionsebene ist.

Wenn ein Punkt in der ersten, oder in der zweiten Projektionsebene liegt, so fällt seine zweite, bez. erste Projektion in die Achse OX.

Um anzudeuten, dass ein Punkt A im Raume die Projektionen a_1 und a_2 hat, schreibt man $A(a_1, a_2)$, und liest: Der Punkt A dessen Projektionen a_1 und a_2 sind.

Aufgabe. Die Projektionen eines Punktes anzugeben, welcher im II. Quadranten liegt. Ebenso bestimme man die Projektionen eines im III. und eines im IV. Quadranten liegenden Punktes.

2) Bei den Anwendungen der darstellenden Geometrie benutzt man häufig noch eine dritte Projektionsebene P_3, welche auf P_1 und P_2 senkrecht steht (Fig. 19). Die Schnittlinien OX, OY, OZ stehen dann ebenfalls senkrecht zu einander.

Zur Darstellung der Projektionen auf der ebenen Zeichenfläche ist erforderlich, die drei Projektionsebenen um die Achsen so zu drehen, dass sie nach der Drehung eine einzige Ebene bilden. Für P_1 und P_2 gilt

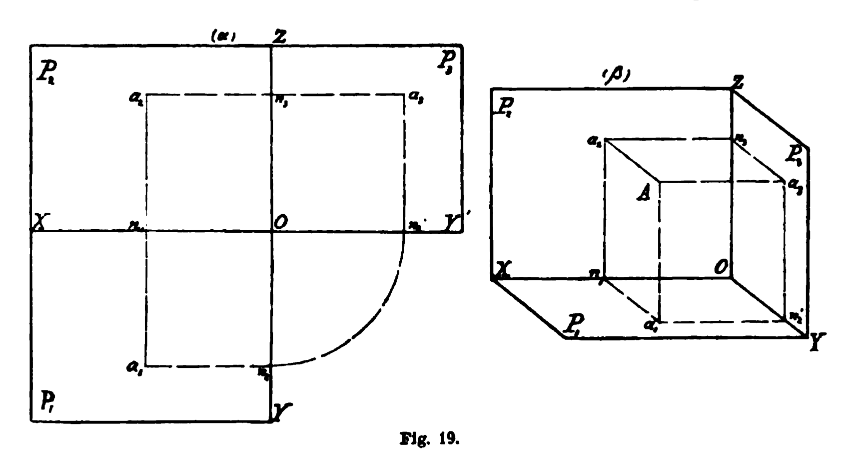


Fig. 19.

dasselbe wie in 1); die dritte Ebene dreht man um die Achse OZ nach rechts, bis sie mit der erweiterten Ebene P_2 zusammenfällt. Hierdurch entsteht nun Fig. 19(α), aus welcher die Lage der drei Projektionsebenen nach dem Auseinanderklappen ersichtlich ist.

Anm. (β) ist wieder eine schiefe Projektion, in welcher OX und OZ rechtwinklig zu einander und in wahrer Länge gezeichnet sind. OY dagegen erscheint in halber Länge.

Aufgabe. Aus den beiden ersten Projektionen a_1 und a_2 eines Punktes A die dritte Projektion desselben zu finden. Fig. 19(α) und (β).

Man ziehe $a_1 n_2$, (α) senkrecht zu OY und beschreibe mit On_2 den Viertelkreis $n_2 n_2^1$ um O; errichte in n_2^1 das Lot $n_2^1 a_3$ zu OY^1. Ferner ziehe man $a_2 n_3$ parallel zu OX und verlängere $a_2 n_3$ bis sie $n_2^1 a_3$ in a_3 schneidet. a_3 ist nun die gesuchte Projektion von A. Die Richtigkeit dieser Konstruktion ersieht man leicht aus der schiefen Projektion in (β), welche den Vorgang im Raume veranschaulicht.

Aus (α) ergiebt sich noch der Abstand des Punktes A von P_3, welcher gleich $a_1 n_2 = n_1 O = a_2 n_3$ ist.

Wie ergeben sich aus (α) die Abstände des Punktes A von den drei Achsen OX, OY, OZ?

Die Abstände eines Punktes A von der ersten, zweiten und dritten Projektionsebene sollen mit z, bez. y und x bezeichnet werden. Ferner seien a, b, c die Abstände des Punktes A von den Achsen OX, bez. OY, und OZ.

3) Die drei Projektionen eines Punktes A auf den niedergeklappten Projektionsebenen anzugeben, wenn gegeben sind:

1) x, y, z; 2) y, z, c; 3) x, z, a; 4) x, y, b;
5) x, b, c; 6) y, a, c; 7) z, a, b.

Projektionen einer geraden Linie.

4) Eine beliebige Gerade schneidet die Projektionsebenen in Punkten, welche man die Spuren der Geraden nennt. Die erste Spur ist der Durchschnitt der Geraden mit der ersten Projektionsebene; ebenso zweite und dritte Spur. Ist eine Gerade parallel mit einer der Projektionsebenen, so liegt die entsprechende Spur unendlich fern.

Die beiden ersten Spuren a_1 und b_2 einer Geraden AB (Fig. 20) sind gegeben; man soll die Gerade auf die drei Ebenen P_1, P_2 und P_3

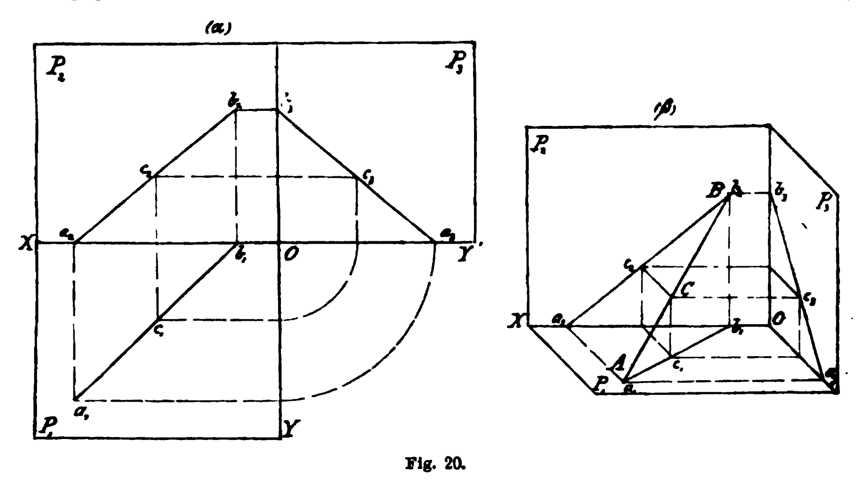


Fig. 20.

projicieren. Die Lage von AB ist aus der schiefen Projektion (β) ersichtlich. Die Gerade ist die Verbindungslinie der beiden Spuren a_1 und b_2. Die erste Projektion des Punktes b_2, welcher in P_2 liegt, erhält man durch die zu OX gezogene Senkrechte $b_2 b_1$ in b_1. Ferner fällt die erste Projektion von a_1 mit a_1 zusammen, folglich ist $a_1 b_1$ die erste Projektion der Geraden AB; ebenso erhält man die zweite Projektion derselben, wenn man a_1 auf die Achse OX nach a_2 projiciert und dann die Gerade $a_2 b_2$ zieht. In gleicher Weise findet man auch die dritte Projektion $a_3 b_3$.

Die schiefe Projektion (β) wird konstruiert, wenn man wieder P_2 in wahrer Gestalt zeichnet, OY und alle zu dieser Parallelen in halber Länge aufträgt u. s. w.

Anm. Die erste Spur einer Geraden liegt stets senkrecht unter dem Punkte, in welchem die zweite Projektion der Geraden die Achse OX

trifft. Ebenso liegt die zweite Spur der Geraden senkrecht über dem Schnittpunkte ihrer ersten Projektion mit OX.

Wo liegt die dritte Spur der Geraden AB?

Ist ferner C ein beliebiger Punkt der Geraden AB, so liegen die drei Projektionen c_1, c_2, c_3 desselben auf den drei Projektionen von AB. Wenn nun z. B. die erste Projektion c_1 des Punktes C in (α) auf $a_1 b_1$ gegeben ist, so kann man die zweite Projektion c_2 durch die zur Achse OX Senkrechte $c_1 c_2$ bestimmen. Die dritte Projektion ergiebt sich nach 2). Vergl. auch die Darstellung in (β).

5) Man soll jede der folgenden Geraden durch ihre drei Projektionen darstellen, und die Spuren der Geraden angeben.

a) Eine Gerade, welche senkrecht zu P_1 steht
b) „ „ „ „ „ P_2 „
c) „ „ „ „ „ P_3 „
d) „ „ „ parallel „ P_1 ist
e) „ „ „ „ „ P_2 „
f) „ „ „ „ „ P_3 „

Anm. In den drei ersten Fällen sind je zwei Projektionen der projicierten Linie an Länge gleich; in den letzten drei Fällen je eine.

6) Die Spuren der Geraden AB zu finden, wenn ihre Projektionen $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ die in Fig. 21 angegebene Lage haben.

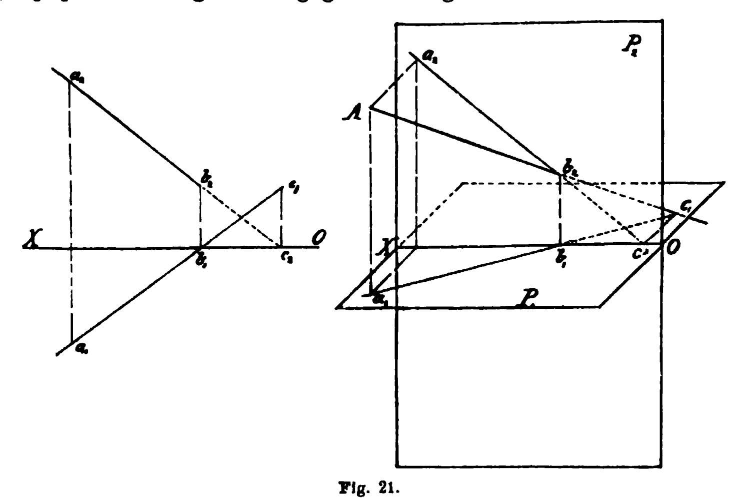


Fig. 21.

Die zweite Spur b_2 liegt nach 4) auf der zweiten Projektion der Geraden, senkrecht über b_1. Die erste Spur fällt auf den hinteren Teil von P_1 und liegt auf der Verlängerung von $a_1 b_1$ senkrecht über dem Punkte c_2, in welchem $a_2 b_2$ verlängert die Achse OX trifft. Aus der schiefen

Projektion erkennt man leicht, dass der zwischen b_2 und c_1 liegende Teil der Geraden in zwei Quadranten liegt.

7) Die erste und zweite Spur der Geraden ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) zu bestimmen, wenn die gegebenen Projektionen die in Fig. 22 angegebenen Lagen haben. Man zeichne für diese beiden Fälle auch die schiefen Projektionen.

Fig. 22.

8) Die wahre Länge der Geraden AB ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) zu finden (Fig. 23).

Die Gerade AB bildet mit den beiden projicierenden Linien Aa_1, Bb_1 und der Projektion $a_1 b_1$ ein Trapez $ABb_1 a_1$ in welchem bei a_1 und b_1 rechte Winkel liegen.

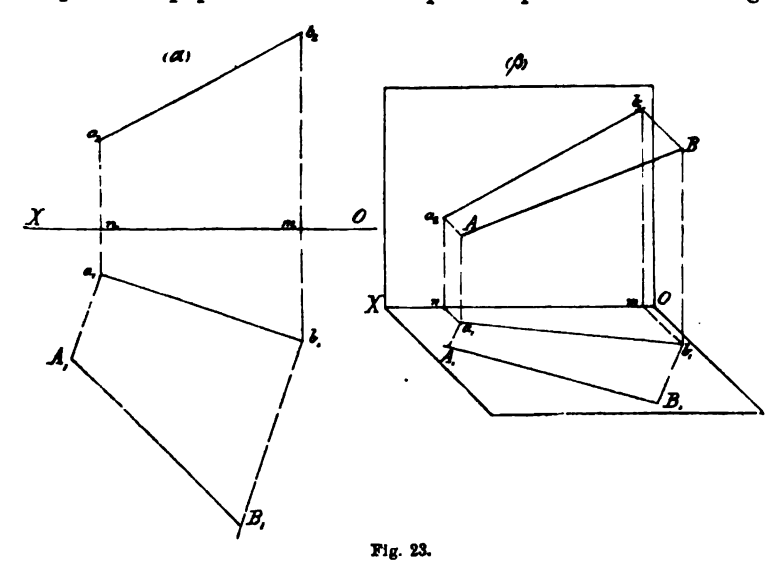


Fig. 23.

Durch Drehung dieses Trapezes um $a_1 b_1$ kann man dasselbe in die erste Projektionsebene niederlegen, wie in der schiefen Projektion (β) angedeutet ist. Das niedergeklappte Trapez in (α) erhält man, wenn man $A_1 a_1$ und $B_1 b_1$ senkrecht zu $a_1 b_1$ zieht und $A_1 a_1 = a_2 n$ und $B_1 b_1 = b_2 m$ macht. Dann ist $A_1 B_1 b_1 a_1$ die wahre Gestalt des Trapezes, $A_1 B_1$ die wahre Länge der Geraden AB.

Anmerkung. Die wahre Länge der Geraden AB kann man ferner bestimmen 1) durch Drehung des Trapezes ABb_2a_2 um a_2b_2, bis dasselbe in die zweite Projektionsebene fällt; 2) durch Drehung des Trapezes ABb_1a_1 um Bb_1 in die zur zweiten Projektionsebene parallele Lage; 3) durch Drehung des Trapezes ABb_2a_2 um Bb_2, bis dasselbe parallel mit der ersten Projektionsebene wird.

9) Die wahre Gestalt des Dreiecks $A(a_1a_2)$, $B(b_1b_2)$, $C(c_1c_2)$ zu finden. Anl. z. Aufl. Man bestimmt nach 8) die wahren Längen der einzelnen Seiten und konstruiert aus diesen das Dreieck.

10) Auf der Geraden $AB(a_1b_1, a_2b_2)$ soll von dem auf derselben liegenden Punkte $C(c_1c_2)$ die gegebene Strecke m abgetragen werden. Wie lang sind die Projektionen von m zu machen?

11) Den Abstand des Punktes $A(a_1a_2)$ von der Geraden $BC(b_1c_1, b_2c_2)$ zu finden.

12) Die Neigungswinkel der Geraden $AB(a_1b_1, a_2b_2)$, welche dieselbe mit den Projektionsebenen bildet, zu bestimmen.

Anl. Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ist bekanntlich der Winkel, welchen die Gerade mit ihrer Projektion auf der Ebene bildet. Die Lösung ist deshalb aus 8) leicht zu finden.

13) Die Endpunkte einer Geraden von gegebener Länge sollen in den beiden ersten Projektionsebenen liegen. Es sind die Projektionen der Geraden zu zeichnen, wenn die Neigungswinkel der letzteren gegen die beiden Projektionsebenen gegeben sind.

Parallele Lage zweier Geraden.

14) Aus der Stereometrie ist bekannt, dass parallele Geraden auch parallele Projektionen haben und ausserdem gleiche Neigungswinkel mit der Projektionsebene bilden. Man kann umgekehrt schliessen: Wenn sowohl die beiden ersten Projektionen einer Geraden unter sich parallel sind, als auch die zweiten Projektionen derselben, so sind die Geraden im Raume ebenfalls parallel.

15) Die wahre Gestalt eines durch erste und zweite Projektion gegebenen Parallelogramms zu finden.

16) Den senkrechten Abstand zweier parallelen Geraden $AB(a_1b_1, a_2b_2)$, $CD(c_1d_1, c_2d_2)$ zu finden.

Auf (9) zurückzuführen.

Windschiefe Lage zweier Geraden.

17) Aus den beiden Projektionen zweier Geraden AB und CD kann man unmittelbar erkennen, ob diese sich schneiden oder windschief sind. Schneiden sich die Geraden in E, so muss die erste Projektion von E sowohl auf a_1b_1 als auch auf c_1d_1 liegen, d. h. der Schnittpunkt der beiden Projektionen a_1b_1 und c_1d_1 ist die erste Projektion des Schnittpunktes der Geraden AB und CD. Ebenso ist der Schnittpunkt von a_2b_2 und c_2d_2 die zweite Projektion des Schnittpunktes von AB und CD.

Da nun nach 1) die Projektionen eines Punktes auf einer zur Achse OX Senkrechten liegen, so folgt:

Wenn der Schnittpunkt der beiden ersten Projektionen zweier Geraden und der Schnittpunkt der zweiten Projektionen auf einer Senkrechten zur Achse OX liegen, so schneiden sich die Geraden im Raume. Liegen aber jene beiden Projektionen nicht auf derselben Senkrechten, so sind die Geraden windschief.

Unter Neigungswinkel zweier windschiefen Geraden versteht man den Winkel, welchen zwei sich schneidende Geraden, die jenen parallel sind, mit einander bilden.

18) Die wahre Grösse des Winkels zu finden, welchen zwei sich schneidende Geraden AB($a_1 b_1$, $a_2 b_2$), CD($c_1 d_1$, $c_2 d_2$) mit einander bilden. Fig. 24(α) u. (β).

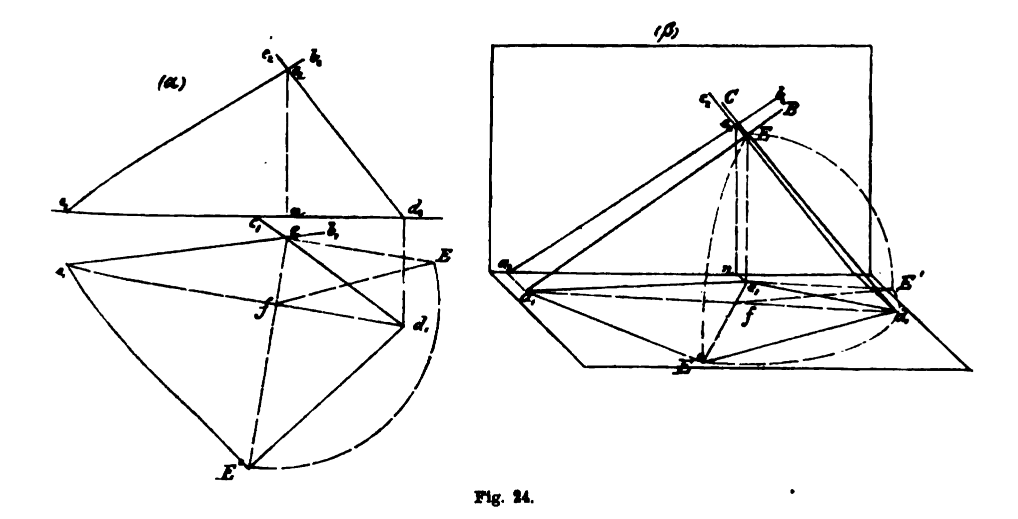


Fig. 24.

Nach Voraussetzung müssen die beiden Schnittpunkte e_1 und e_2 auf einer Senkrechten zur Achse liegen. Man bestimme nun die beiden ersten Spuren a_1 und d_1 der gegebenen Geraden und verbinde dieselben durch die Linie $a_1 d_1$. Die letztere liegt in P_1 und bildet mit den beiden gegebenen Geraden ein Dreieck $a_1 E d_1$, dessen Projektionen $a_1 e_1 d_1$ und $a_2 e_2 d_2$ sind. Man dreht dieses Dreieck um $a_1 d_1$, bis es in die erste Projektionsebene fällt. Die Spitze E beschreibt alsdann einen Kreisbogen, dessen Halbmesser der Abstand Ef des Punktes E von $a_1 d_1$ ist. Die erste Projektion von EF ist das von e_1 auf $a_1 d_1$ gefällte Lot

$e_1 f$ *). Um die wahre Länge des Halbmessers Ef zu finden, konstruiert man das rechtwinklige Dreieck $e_1 f E'$, dessen eine Kathete $e_1 f$ ist. Die andere Kathete $e_1 E'$ muss gleich der Höhe des Punktes E über P_1, d. h. gleich $e_2 n$ sein. Die Hypothenuse $E'f$ ist dann gleich der wahren Länge des Halbmessers. Nach der Niederklappung des Dreiecks $a_1 d_1 E$ liegt aber der Halbmesser in der Verlängerung von $e_1 f_1$ und E gelangt deshalb nach E'', wo nun $E''f = E'f$ ist. Endlich ist $a_1 d_1 E''$ die wahre Gestalt des Dreiecks $a_1 d_1 E$ und der Winkel $a_1 E'' d_1$ stellt die wahre Grösse des Winkels $a_1 E d_1$ dar.

19) Die wahre Gestalt des Dreiecks $(a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2)$ zu finden. (Andere Auflösung der Aufgabe 9.) Fig. 25.

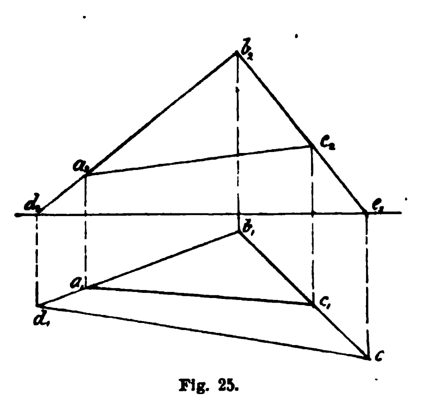


Fig. 25.

Man verlängere zwei Seiten, z. B. $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ und $(b_1 c_1, b_2 c_2)$, bis sie die erste Projektionsebene in d_1 und e_1 treffen. Diese beiden Punkte werden durch die Gerade $d_1 e_1$, welche in P_1 liegt, verbunden. Man drehe nun wie in 18) das Dreieck $(b_1 d_1 e_1, b_2 d_2 e_2)$ um $d_1 e_1$, bis dasselbe in die erste Projektionsebene P_1 fällt. Durch diese Drehung fällt das ursprünglich gegebene Dreieck ebenfalls in P_1 und erscheint dann in wahrer Gestalt.

20) Die beiden ersten Projektionen eines Dreiecks $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$ und die erste Projektion d_1 eines innerhalb des Dreiecks liegenden Punktes D sind gegeben. Man soll die dritte Projektion des Dreiecks und die zweite und dritte Projektion des Punktes D bestimmen.

21) Die erste Projektion eines Vierecks und die zweiten Projektionen von drei Eckpunkten desselben sind gegeben. Man soll die zweite Projektion des vierten Eckpunktes und die wahre Gestalt des Vierecks bestimmen.

(Warum darf die zweite Projektion des vierten Eckpunktes auf der projicierenden Geraden nicht willkürlich angenommen werden?)

22) Die erste Projektion eines beliebigen Vielecks und die zweiten Projektionen von drei Eckpunkten desselben sind gegeben. Es soll die zweite Projektion des Vielecks bestimmt werden.

23) Die beiden Projektionen eines Dreiecks sind gegeben. Man bestimme 1) die Projektionen der drei Höhen, 2) die Projektionen der drei Halbierungslinien der Winkel

*) Dies folgt aus einem bekannten Satze der Stereometrie. Es sei AB eine Gerade, welche die Ebene P in dem Punkte A schneidet und AC sei ihre Projektion auf P. Zieht man durch A eine Gerade in P senkrecht zur Projektion AC, so steht dieselbe auch senkrecht zu AB.

des Dreiecks. Mit Hülfe der in 18) gezeigten Drehung zu lösen. Einfacher sind die Projektionen der Mittellinien zu finden.

24) Die Abstände eines Punktes von den drei Achsen OX, OY, OZ sind gegeben. Man soll die drei Projektionen des Punktes bestimmen.

III. Abschnitt.

Darstellung der Ebenen.

1) Zur Darstellung der Lage einer Ebene E benutzt man ihre Schnittlinien mit den Projektionsebenen. Man nennt dieselben die Spuren der Ebene E. So ist in Figur 26 (β) QS die in P_1 liegende erste Spur (Horizontalspur), ebenso QR die zweite (Vertikalspur), und RS die dritte Spur der Ebene E. Da durch zwei sich schneidende Geraden die Lage einer Ebene bestimmt ist, so genügen zur Darstellung derselben auch zwei Spuren. Ferner ist ersichtlich, dass je zwei Spuren auf einer der drei Achsen zusammentreffen, oder gleichzeitig parallel sein müssen.

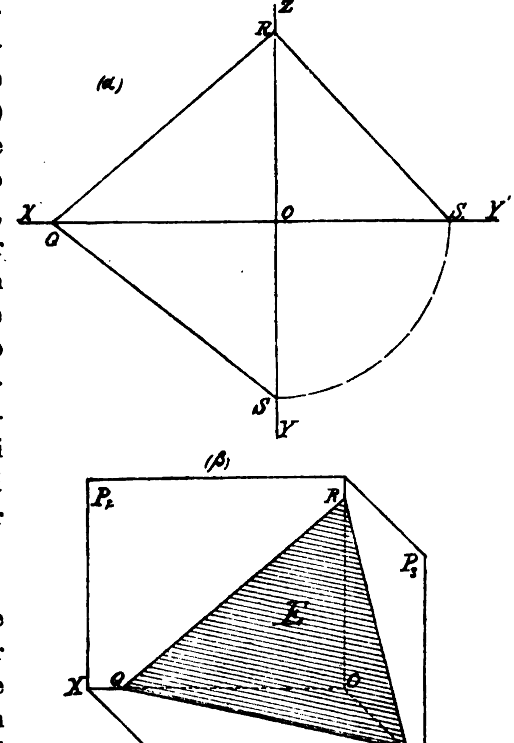


Fig. 26.

Ist in (α) QS die erste Spur, QR die zweite Spur der Ebene E, so findet man die dritte Spur RS′ leicht, wenn man OS′ = OS macht und R mit S′ verbindet.

2) Die Spuren einer Ebene zu zeichnen, welche

1) parallel	zu	P_1	ist	4) senkrecht	zu	P_1	steht
2) "	"	P_2	"	5) "	"	P_2	"
3) "	"	P_3	"	6) "	"	P_3	"

In 4), 5) und 6) bestimme man aus den Spuren auch die Winkel, welche E mit den Projektionsebenen bildet, auf welchen sie nicht senkrecht steht. Ferner den Abstand der Ebene E von derjenigen Achse, mit welcher sie parallel ist.

3) QS und QR (Fig. 27) seien erste und zweite Spur einer Ebene E; $a_1 b_1$ die erste Projektion einer Geraden, welche in E liegt. Man soll die zweite und dritte Projektion dieser Geraden bestimmen.

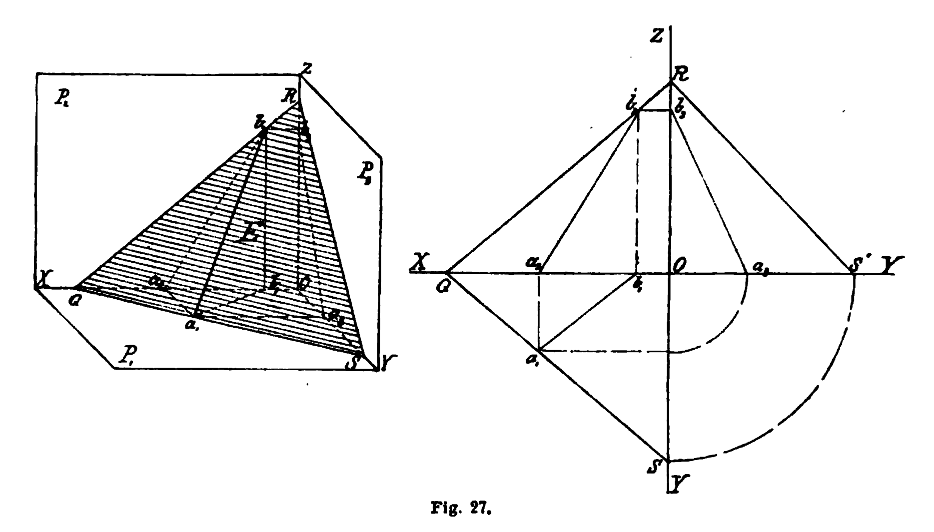


Fig. 27.

Aufl. Weil die Gerade auf E liegt, schneidet sie die Spuren dieser Ebene. Die Schnittpunkte sind dann auch zugleich die Spuren der Geraden. Die erste Spur der letzteren ist deshalb der Punkt a_1, in welchem $a_1 b_1$ die Spur QS schneidet, und die zweite Spur der Geraden liegt senkrecht über b_1 in dem auf QR liegenden Punkte b_2. Zweite und dritte Projektion der Geraden können also nach (II, 4) bestimmt werden.

4) Dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn die gegebene Projektion $a_1 b_1$ 1) parallel zur ersten Spur der gegebenen Ebene, 2) wenn sie parallel zur Achse OX, 3) wenn sie parallel zur Achse OY ist.

5) Gegeben sind die Spuren einer Ebene E und die erste Projektion a_1 eines in E liegenden Punktes A. Es sollen die beiden anderen Projektionen des Punktes A bestimmt werden (Fig. 28).

Aufl. Man ziehe durch a_1 in der ersten Projektionsebene eine beliebige Gerade $b_1 c_1$. Diese kann man als die erste Projektion einer auf E liegenden Geraden ansehen. Die beiden anderen Projektionen $b_2 c_2$ und $b_3 c_3$ dieser Geraden findet man nach 3).

Auf $b_2 c_2$ und $b_3 c_3$ liegen die zweite bez. dritte Projektion des Punktes A, welche man nun in bekannter Weise bestimmen kann.

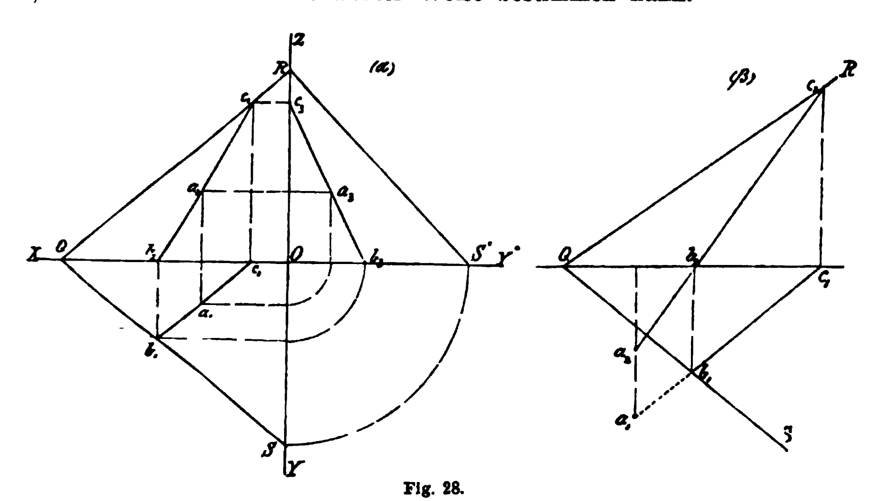


Fig. 28.

In Fig. 28(β) liegt die erste Projektion a_1 des Punktes A nicht zwischen QS und der Achse OX. In diesem Falle liegt die zweite Projektion a_2 unterhalb OX auf der Verlängerung von $b_2 c_2$. In welchem Quadranten liegt A? Man zeichne hierzu auch die schiefe Projektion.

6) Die Spuren einer Ebene und die erste Projektion eines Vielecks oder einer krummlinig begrenzten Figur, welche in dieser Ebene liegt, sind gegeben. Man soll die zweite Projektion der Figur bestimmen.

7) Die Spuren einer Ebene E zu finden, welche durch die beiden parallelen Geraden $(a_1 b_1,\ a_2 b_2)$, $(c_1 d_1,\ c_2 d_2)$ geht (Fig. 29).

Die Spuren der gesuchten Ebene E müssen durch die Spuren der beiden gegebenen Geraden gehen. Die letzteren ergeben sich leicht in a_1, c_1 bez. b_2 und d_2, wodurch nun QS und QR als erste und zweite Spur der Ebene E bestimmt sind.

8) Die Spuren der Ebene zu finden, welche durch den Punkt $A(a_1 a_2)$ und die Gerade $(b_1 c_1,\ b_2 c_2)$ gelegt werden kann.

Auf die vorige Aufgabe zurückzuführen.

9) Die Spuren der Ebene zu finden, welche durch die beiden sich schneidenden Geraden $(a_1 b_1,\ a_2 b_2)$, $(b_1 c_1,\ b_2 c_2)$ geht.

Man bestimmt zuerst die Spuren der beiden Geraden, diese liegen in den gesuchten Spuren der Ebene.

10) Die Spuren der Ebene zu finden, welche durch die drei Punkte $A(a_1 a_2)$, $B(b_1 b_2)$, $C(c_1 c_2)$ geht.

11) Zur Lösung weiterer Aufgaben wiederholen wir einige stereometrische Gesetze.

Parallele Ebenen werden von einer anderen Ebene in parallelen Geraden geschnitten. Hieraus folgt: Die gleichnamigen Spuren zweier parallelen Ebenen sind parallel.

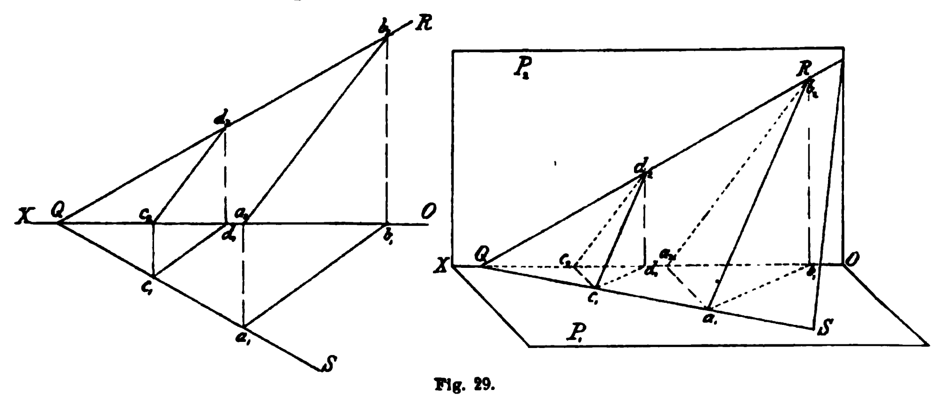


Fig. 29.

Eine Gerade G ist einer Ebene E parallel, wenn sie zu einer in E liegenden Geraden parallel ist.

Die Spuren einer Ebene zu finden, welche durch den gegebenen Punkt A ($a_1 a_2$) geht und parallel zu der gegebenen Ebenen RQS ist (Fig. 30).

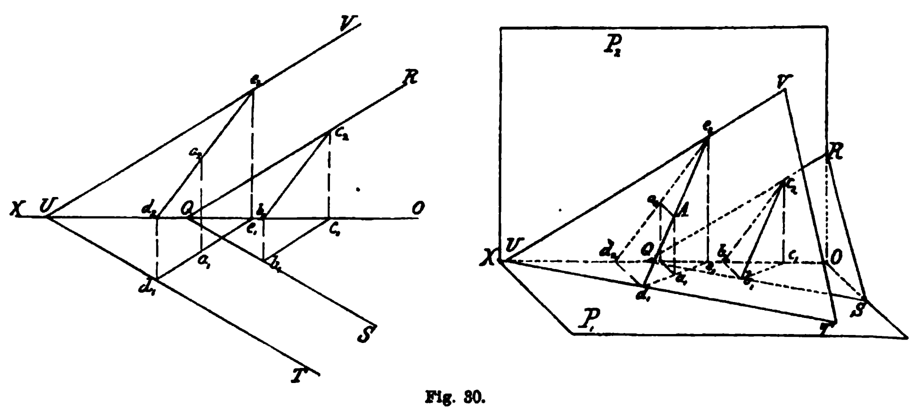


Fig. 30.

Man ziehe in der gegebenen Ebene RQS eine beliebige Gerade, deren erste Projektion $b_1 c_1$ sei. Die zweite Projektion $b_2 c_2$ ergiebt sich nach 3) d. Abschn. Die Gerade im Raume ist in der schiefen Projektion durch $b_1 c_2$ dargestellt. Durch A zieht man eine Parallele $d_1 e_2$ zu $b_1 c_2$, dann liegt $d_1 e_2$ in der gesuchten Ebene. Die Projektionen dieser Parallelen gehen durch a_1 und a_2 und sind parallel zu $b_1 c_1$ bez. $b_2 c_2$. Nachdem man die Spuren d_1 und e_2 dieser Geraden bestimmt hat, zieht

man durch d_1 die erste Spur TU der gesuchten Ebene parallel zu QS und durch e_2 die zweite Spur UV parallel zu QR. Beide Spuren müssen selbstverständlich auf OX sich schneiden.

Man löse diese Aufgabe auch, indem man durch den gegebenen Punkt eine Gerade zieht, welche 1) parallel zur ersten Spur der gegebenen Ebene, oder 2) parallel zur zweiten Spur derselben ist.

12) Die vorige Aufgabe zu lösen, wenn der gegebene Punkt A im II., III. oder IV. Quadranten liegt.

13) Die Spuren einer Ebene zu finden, welche durch eine gegebene Gerade ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) geht, und einer anderen gegebenen Geraden ($c_1 d_1$, $c_2 d_2$) parallel ist.

Anl. Durch einen beliebigen Punkt der Geraden ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) zieht man eine Parallele zu der anderen Geraden, dann ist die gesuchte Ebene durch jene Parallele und die erste Gerade bestimmt.

13a) Durch einen Punkt ($a_1 a_2$) eine Ebene zu legen, welche auf den Achsen OX, OY und OZ gleiche Strecken abschneidet.

13b) Durch den Punkt ($a_1 a_2$) eine Ebene zu legen, deren drei Spuren ein Dreieck bilden, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist. (Wann ist eine Lösung nicht möglich?)

13c) Die Projektionen einer Geraden von gegebener Länge zu finden, welche mit der ersten Projektionsebene parallel ist und deren Endpunkte auf zwei durch ihre Projektionen gegebenen windschiefen Geraden liegen. Kann die gesuchte Gerade mehrere Lagen annehmen?

Durchschnitt zweier Ebenen.

14) Die Projektionen der Durchschnittslinie zweier durch ihre Spuren gegebenen Ebenen zu finden.

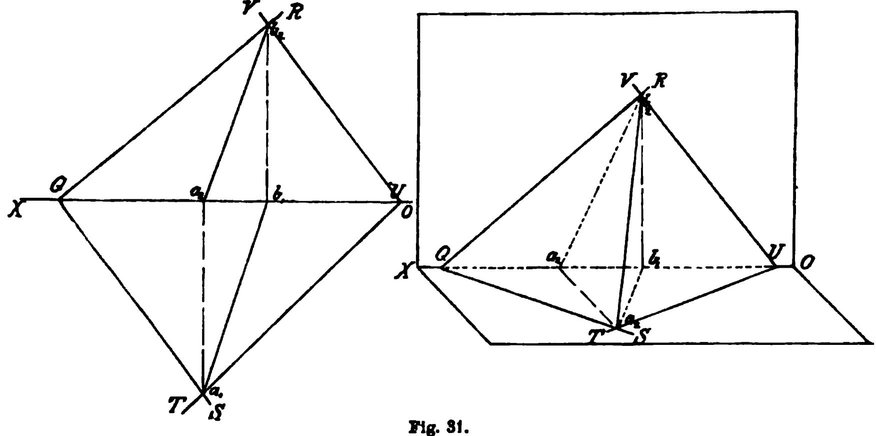


Fig. 31.

Erster Fall. Die ersten Spuren sowohl als die zweiten Spuren der beiden Ebenen treffen sich innerhalb der Grenzen der Zeichenfläche. Ist SQR (Fig. 31) die eine Ebene, TUV die andere, so ist der Punkt a_1, in

welchem QS und TU sich treffen, die erste Spur der gesuchten Durchschnittslinie, und ebenso b_2 die zweite Spur derselben. Nach (II, 4) ergeben sich hieraus leicht die Projektionen der Durchschnittslinie.

Zweiter Fall. Die beiden ersten Spuren SQ und TU (Fig. 32) schneiden sich nicht mehr innerhalb der Grenzen der Zeichenfläche.

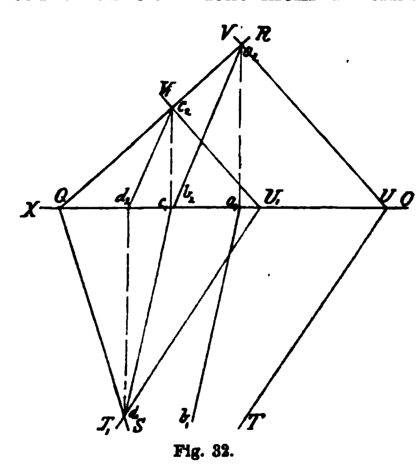


Fig. 32.

In diesem Falle ist nur die zweite Spur a_2 der Durchschnittslinie gegeben. Man zeichnet die Spuren T_1U_1 und U_1V_1 einer neuen Ebene, welche der Ebene TUV parallel ist und so liegt, dass ihre Spuren diejenigen der Ebene SQR innerhalb der Grenzen der Zeichenfläche noch treffen. Nach dem vorigen bestimmt man die Projektionen c_1d_1 und c_2d_2 der Durchschnittslinie dieser Ebene und der Ebene SQR. Da die gesuchte Durchschnittslinie nun parallel zu (c_1d_1, c_2d_2) sein muss, so zieht man ihre zweite Projektion a_2b_2 durch a_2 parallel zu c_2d_2; ferner projiciert man a_2 auf OX nach a_1 und zieht nun die erste Projektion a_1b_1 parallel zu c_1d_1.

Andere Lösung. Man schneide die gegebenen Ebenen SQR und TUV mit einer neuen Ebene a_1Bc_1, Fig. 33(β), welche parallel zu P_2

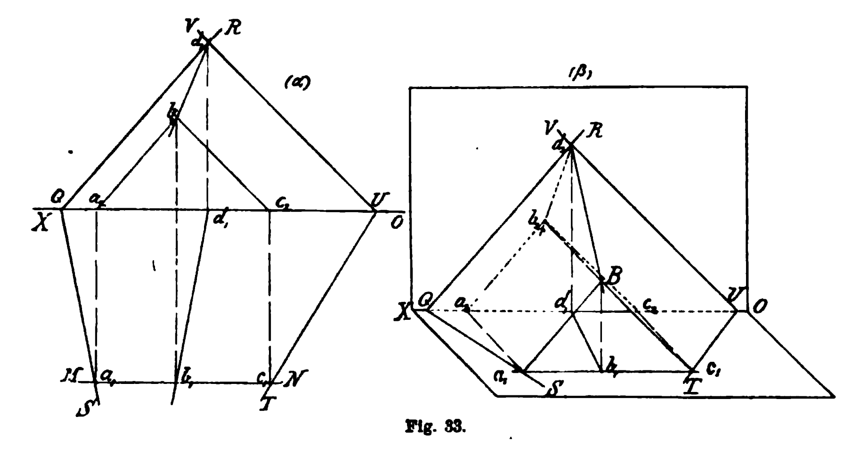


Fig. 33.

ist. Die erste Spur dieser Ebene sei die zur Achse OX parallele Gerade MN. Die neue Ebene schneidet nun die beiden gegebenen Ebenen in den Geraden a_1B und Bc_1, welche bez. parallel zu den Spuren QR und UV sind.

Der Punkt B, in welchem diese Linien sich treffen, ist ein zweiter Punkt der gesuchten Durchschnittslinie, welche nun durch B und d_2 bestimmt ist.

Um die Projektionen des Punktes B in Fig. 33(α) zu bestimmen, projiciert man die Punkte a_1 und c_1, in welchen die Spuren SQ und TU von MN getroffen werden, auf die Achse OX nach a_2 und c_2. Durch a_2 und c_2 zieht man $a_2 b_2$ und $b_2 c_2$ bez. parallel zu den Spuren QR und UV, dann ist $a_2 b_2 c_2$ die zweite Projektion des Dreiecks $a_1 B c_1$ und folglich auch b_2 die zweite Projektion des Punktes B. Die erste Projektion b_1 des letzteren liegt senkrecht unter b_2 auf MN. Projiciert man noch d_2 auf die Achse OX, dann sind $b_1 d_1$ und $b_2 d_2$ die gesuchten Projektionen der Durchschnittslinie.

15) Die Projektionen der Durchschnittslinie zweier Ebenen zu finden, deren erste Spuren unter sich parallel sind.

16) Die Projektionen der Durchschnittslinie zweier Ebenen zu finden, wenn weder die ersten noch die zweiten Spuren sich innerhalb der Grenzen der Zeichenfläche treffen.

Man bestimme nach 14) zwei Punkte der Durchschnittslinie.

17) Für die in Fig. 34(α) bis (ε) angegebenen Ebenen die Projektionen der Durchschnittslinie zu finden.

Fig. 34(α).

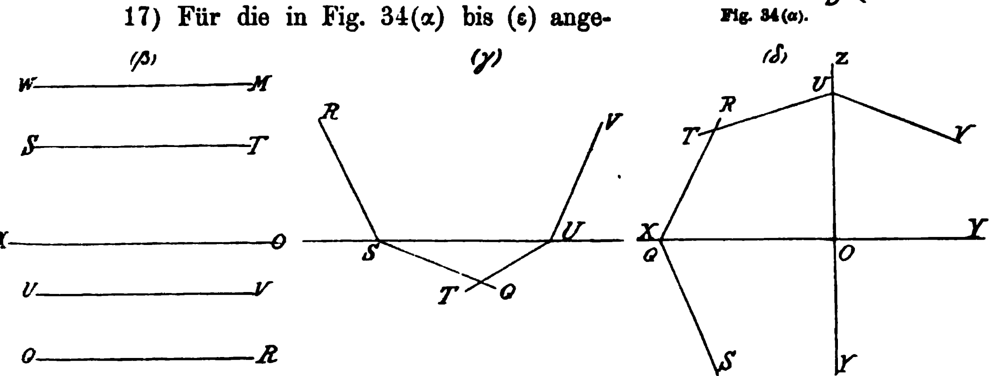


Fig. 34 (β bis δ).

In (α) ist SQR die erste Ebene und TQU die zweite. Bei (β) sollen die Spuren beider Ebenen parallel zur Achse sein. QR und ST gehören der ersten Ebene und UV und WM der zweiten Ebene an. In (δ) ist die Ebene SQR durch

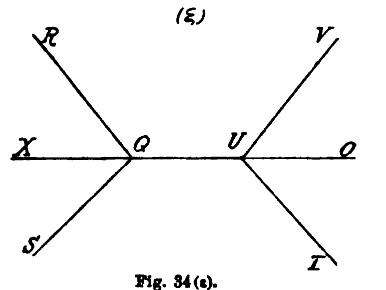


Fig. 34(ε).

erste und zweite Spur, die andere Ebene durch ihre zweite und dritte Spur gegeben.

Durchschnitt einer Geraden mit einer Ebene.

18) Die Aufgabe, den Durchschnittspunkt einer geraden Linie mit einer Ebene zu bestimmen, ist diejenige, welche in den praktischen Anwendungen der Darstellenden Geometrie namentlich auf Durchdringungen und Schattenkonstruktionen am häufigsten vorkommt. Es ist deshalb von der grössten Wichtigkeit, dass der Anfänger sich mit der Lösung derselben vollkommen vertraut macht.

Erster Fall. Die gegebene Ebene SQR (Fig. 35) sei senkrecht zur zweiten Projektionsebene P_2. $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ sind die Projektionen der gegebenen Geraden. Da die zweite Projektion der Ebene mit der Spur QR zusammenfällt, so liegt die zweite Projektion c_2 des gesuchten Durchschnittspunktes ebenfalls in QR und zugleich in $a_2 b_2$. Die erste Projektion c_1 findet man durch die zur Achse senkrechte Gerade $c_2 c_1$.

Dieselbe Konstruktion ist gültig, wenn die Ebene bei gleicher Lage nicht durch ihre Spuren, sondern durch die Projektionen einer ebenen

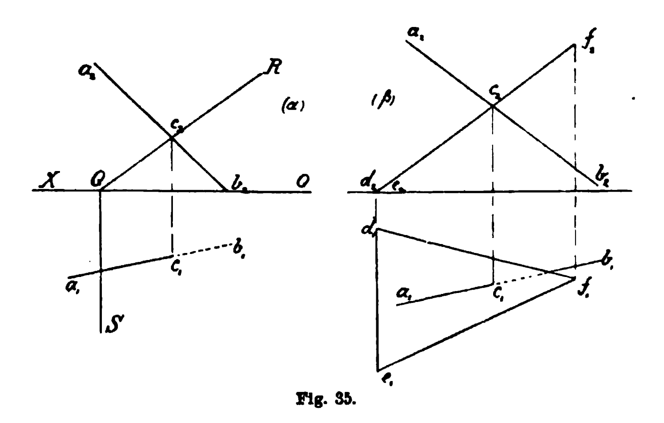


Fig. 35.

Figur z. B. eines Dreiecks ($d_1 e_1 f_1$, $d_2 e_2 f_2$) gegeben ist, wobei die zweite Projektion $d_2 e_2 f_2$ als eine Gerade erscheint, s. Fig. 35(β).

Zweiter Fall. Die Ebene SQR habe eine beliebige Lage (Fig. 36). Durch die gegebene Gerade AB($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) legt man eine Ebene E; dieselbe schneidet SQR in einer Geraden $m_1 n_2$. Da wo die letztere von AB getroffen wird, ist der gesuchte Schnittpunkt C. Die Lage der Hülfsebene E ist beliebig; die Auflösung gestaltet sich jedoch am einfachsten, wenn man dieselbe senkrecht zu einer der Projektionsebenen annimmt. In Fig. 36 ist die Lösung dargestellt, wenn E senkrecht zu P_1 steht. Die

erste Spur der Hülfsebene fällt mit $a_1 b_1$ zusammen, die zweite Spur $n_1 n_2$ steht senkrecht zur Achse OX. Die Schnittlinie ist $m_1 n_2$, und ihre Projektionen sind $m_1 n_1$ und $m_2 n_2$, von denen die erstere wieder mit $a_1 b_1$

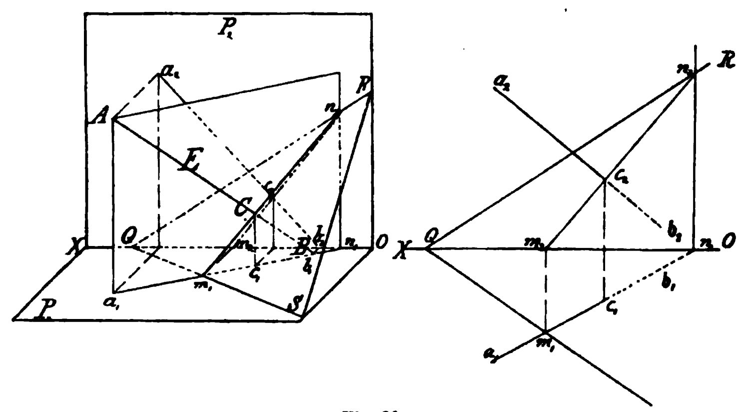


Fig 36.

zusammenfällt. Man erhält auf diese Weise in dem Schnittpunkt von $m_2 n_2$ und $a_2 b_2$ zuerst die zweite Projektion c_2 des gesuchten Durchschnittspunktes. Durch die Senkrechte $c_2 c_1$ zur Achse findet man die erste Projektion c_1 des Schnittpunktes.

Man löse die Aufgabe noch mit Hülfe einer Ebene, welche durch die gegebene Gerade geht und 1) senkrecht zu P_2 steht, 2) eine beliebige Lage hat.

Dritter Fall. Die Ebene SQR ist nicht durch ihre Spuren gegeben, sondern durch die Projektionen einer ebenen Figur, z. B. eines Dreiecks ($a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$). Fig. 37.

Man lege wieder durch die gegebene Gerade ($d_1 e_1$, $d_2 e_2$) eine Ebene, welche senkrecht zur ersten Projektionsebene steht. Die erste Spur und Projektion dieser Ebene ist $d_1 e_1$ und sie schneidet das Dreieck in einer Geraden, deren erste Projektion $m_1 n_1$ in $d_1 e_1$ liegt. Die zweite Projektion $m_2 n_2$ dieser Schnittlinie findet man leicht mit Hülfe der beiden Senkrechten $m_1 m_2$ und $n_1 n_2$. Sie trifft $d_2 e_2$ in der zweiten Projektion f_2 des gesuchten Schnittpunktes, dessen erste Projektion f_1 senkrecht unter f_2 auf $d_1 e_1$ liegt.

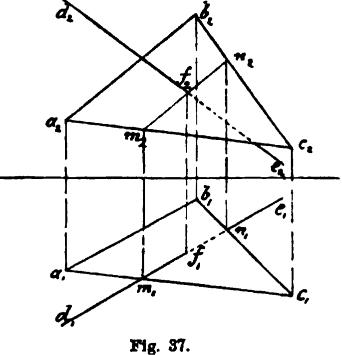


Fig. 37.

19) Den Abstand des Punktes $A(a_1 a_2)$ von der Ebene SQR zu finden. Zur Auflösung dient der folgende Satz:

Steht eine Gerade AB senkrecht zu einer Ebene SQR, so stehen auch ihre Projektionen senkrecht zu den gleichnamigen Spuren der Ebene (Fig. 38).

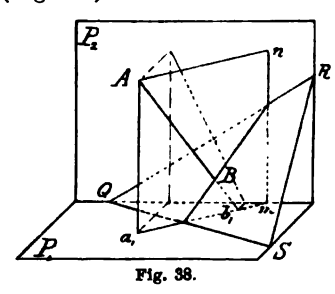


Fig. 38.

Ist nämlich $A a_1 m n$ die projicierende Ebene, welche durch die Gerade AB und ihre erste Projektion $a_1 b_1$ geht, so steht dieselbe senkrecht zur ersten Projektionsebene, und weil sie durch AB geht auch zugleich senkrecht zur Ebene SQR. Folglich steht die Spur QS senkrecht zur Ebene $A a_1 m n$ und somit auch senkrecht zu $a_1 b_1$. Auf gleiche Weise zeigt man, dass $a_2 b_2 \perp QR$.

Hiernach kann man die Projektionen des vom Punkte A auf SQR zu fällenden Lotes zeichnen. Nach 18) bestimmt man den Fusspunkt des Lotes und schliesslich nach I, 8) die wahre Länge desselben.

20) Den Abstand zweier parallelen Ebenen SQR und TUV zu finden.

21) Den Abstand des Punktes $A(a_1 a_2)$ von der Geraden $BC(b_1 c_1,\ b_2 c_2$ zu finden (s. 11).

Anl. z. Aufl. Man lege durch A die Ebene E senkrecht zu der Geraden BC, bestimme den Durchschnitt D der letzteren mit E, dann ist AD der gesuchte Abstand. Oder:

Man lege durch A und BC eine Ebene und drehe die letztere um ihre erste Spur, bis sie mit P_1 zusammenfällt. Nach Ausführung der Drehung erhält man den gesuchten Abstand.

22) Durch einen gegebenen Punkt $A(a_1 a_2)$ eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Geraden $BC(b_1 c_1,\ b_2 c_2)$, $DE(d_1 e_1,\ d_2 e_2)$ schneidet.

Anl. z. Aufl. Man lege durch $A(a_1 a_2)$ und eine der gegebenen Geraden eine Ebene, welche die andere Gerade in einem Punkte $M(m_1 m_2)$ schneiden wird, dann ist $AM(a_1 m_1,\ a_2 m_2)$ die gesuchte Gerade.

23) Die Projektionen einer Geraden zu finden, welche zwei gegebene Geraden $(a_1 b_1,\ a_2 b_2)$ und $c_1 d_1,\ c_2 d_2)$ schneidet und einer dritten Geraden $(e_1 f_1,\ e_2 f_2)$ parallel ist.

24) Es sind zwei Punkte $A(a_1 a_2)$ und $B(b_1 b_2)$ sowie eine Gerade $CD(c_1 d_1,\ c_2 d_2)$ gegeben. Die Projektionen desjenigen Punktes der Geraden CD zu finden, welcher von A und B gleiche Abstände hat.

Anl. z. Aufl. Man lege durch die Mitte von AB eine Ebene senkrecht zu AB; dieselbe schneidet CD in dem gesuchten Punkte.

25) Eine Ebene SQR ist gegeben. Man soll die Spuren einer zu SQR parallelen Ebene bestimmen, welche von der ersteren einen gegebenen Abstand hat. (Zwei Ebenen sind möglich.)

26) Die Projektionen einer Geraden zu finden, welche von zwei gegebenen Ebenen gegebene Abstände hat. Wie viele Geraden sind möglich?

26a) Die wahre Länge einer Geraden zu finden, welche zwischen zwei gegebenen windschiefen Geraden liegt und einer dritten gegebenen Geraden parallel ist.

27) Den Abstand zweier windschiefen Geraden zu finden (Fig. 39). Der Gang der Lösung ist der folgende. Es seien AB und CD die gegebenen Geraden. Durch eine derselben, z. B. CD, wird eine Ebene P gelegt, welche parallel zu AB ist (s. 13). Dann fällt man von einem beliebigen Punkte G der Geraden AB ein Lot GK zu P. Durch den Fusspunkt K desselben zieht man in der Ebene P die Gerade KL parallel zu AB. Diese trifft CD in L, und wenn man noch HL parallel zu GK zieht, dann steht HL senkrecht zu P und folglich auch senkrecht zu den beiden Geraden AB und CD. HL stellt also den gesuchten Abstand (Achse der Windschiefen) dar.

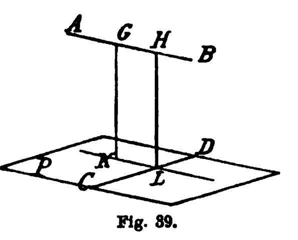


Fig. 39.

Konstruktion. Es seien $(a_1 b_1, a_2 b_2)$, $(c_1 d_1, c_2 d_2)$ (Fig. 40) die beiden gegebenen Geraden. Um durch die letztere eine Ebene zu legen, welche der

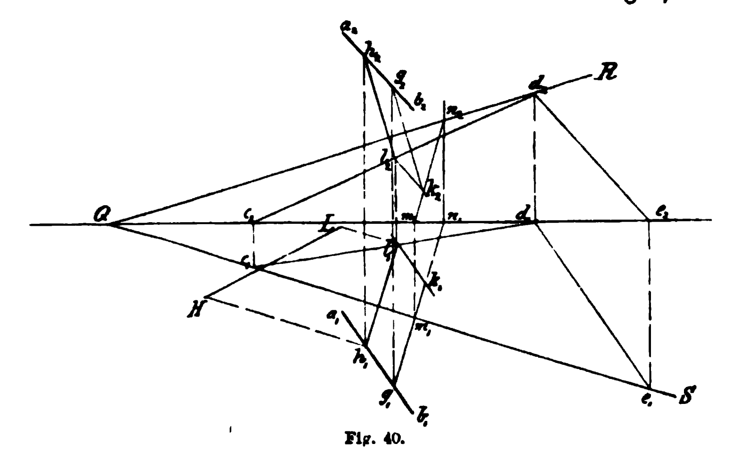


Fig. 40.

ersteren parallel ist, zieht man die Gerade $(d_1 e_1, d_2 e_2)$ durch den auf der zweiten Geraden liegenden Punkt $(d_1 d_2)$ parallel zu $(a_1 b_1, a_2 b_2)$. Die Spuren dieser Parallelen sind e_1 und d_2, ebenso findet man die Spuren der Geraden $(c_1 d_1, c_2 d_2)$ in c_1 und d_2. Durch c_1 und e_1 geht die erste Spur QS der gesuchten Ebene, und von Q durch d_2 die zweite Spur QR. Von dem auf $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ liegenden Punkt $(g_1 g_2)$ fällt man das Lot $(g_1 k_1, g_2 k_2)$ auf die Ebene SQR, dann ist nach 19) $g_1 k_1 \perp$ QS, $g_2 k_2 \perp$ QR. Nun werden nach 18) die Projektionen k_1 und k_2 des Durchschnittes dieses Lotes mit SQR bestimmt, (mit Hülfe der Ebene $m_1 n_1 n_2$, welche senkrecht zur ersten Projektionsebene steht); durch $(k_1 k_2)$ zieht

man die Gerade ($l_1 k_1$, $l_2 k_2$) parallel zu ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) und durch den Schnittpunkt derselben mit ($c_1 d_1$, $c_2 d_2$) die Gerade ($h_1 l_1$, $h_2 l_2$) parallel zu ($g_1 k_1$, $g_2 k_2$). Dann sind $h_1 l_1$ und $h_2 l_2$ die beiden Projektionen des gesuchten Abstandes, dessen wahre Grösse HL sich leicht nach (II, 8), ergiebt.

Neigungswinkel zweier Ebenen.

28) Den Winkel h zu finden, welchen eine durch ihre Spuren gegebene Ebene SQR mit der ersten Projektionsebene bildet (Fig. 41).

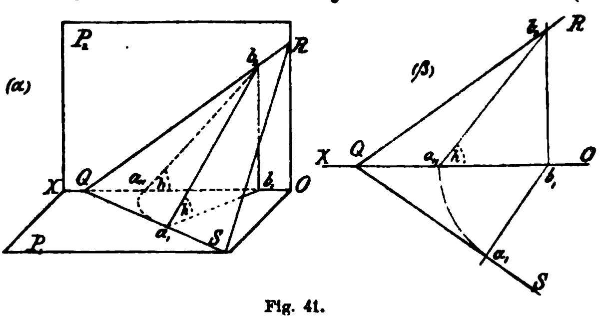


Fig. 41.

Die Ebene des gesuchten Winkels sei $a_1 b_1 b_2$. Da diese senkrecht zu P_1 und SQR steht, so muss die erste Spur $a_1 b_1$ senkrecht zu SQ und die zweite Spur $b_1 b_2$ senkrecht zur Achse OX stehen. Diese beiden Spuren bilden nun die Katheten des bei b_1 rechtwinkligen Dreiecks, welches den gesuchten Winkel h enthält. Um die wahre Grösse desselben in (β) zu bestimmen, denkt man sich das Dreieck um $b_1 b_2$ so weit gedreht, bis es in P_2 fällt. Bei dieser Drehung beschreibt a_1 einen Kreisbogen $a_1 a''$ mit dem Halbmesser $a_1 b_1$ um b_1 als Mittelpunkt, wodurch sich die wahre Gestalt des Dreiecks in $a'' b_1 b_2$ und damit die wahre Grösse des Winkels $b_1 a'' b_2 = h$ ergiebt.

Man bestimme ebenso die Winkel, welche die Ebene SQR mit der zweiten und dritten Projektionsebene bildet.

29) Die Spuren der Ebenen zu finden, welche durch die gegebene Gerade ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) gehen und mit der ersten oder der zweiten Projektionsebene einen gegebenen Winkel bilden.

30) Durch den Punkt A ($a_1 a_2$) eine Ebene zu legen, welche mit P_1 einen gegebenen Winkel h bildet, und mit einer gegebenen Geraden ($b_1 c_1$, $b_2 c_2$) parallel ist.

31) Das Lot, welches man von O auf die Ebene E fällt, bildet mit den Achsen OZ, OY, OX Winkel, welche den Neigungswinkeln der Ebene E gegen die erste, zweite, bez. dritte Projektionsebene gleich sind (Fig. 42).

Da die Ebenen der drei Neigungswinkel senkrecht zu der Ebene SQR stehen, so ist das von O auf letztere gefällte Lot Od die Durch-

schnittslinie dieser drei Ebenen. Ist $\angle RaO = h$ der Neigungswinkel der Ebene SQR gegen P_1, so ist $Od \perp aR$, und weil das Dreieck aOR rechtwinklig bei O ist, so ist auch $\angle h = \angle dOR$. Ebenso wird der Satz für die beiden anderen Neigungswinkel nachgewiesen. Die Gerade dO ist die gemeinschaftliche Höhe der drei Dreiecke aOR, bOS und cOQ, welche die gesuchten Neigungswinkel enthalten, und zwar in Bezug auf die Hypothenusen derselben.

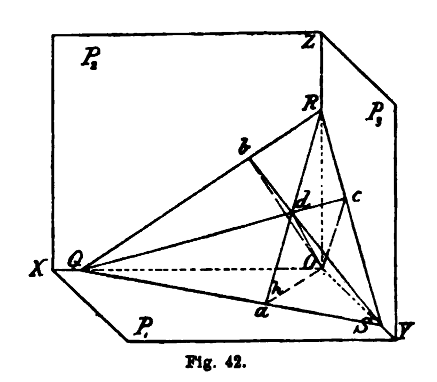


Fig. 42.

32) Die Spuren einer Ebene zu finden, welche mit den beiden ersten Projektionsebenen gegebene Winkel bildet.

33) Den Winkel zu finden, welchen zwei gegebene Ebenen miteinander bilden.

Erster Fall. Die ersten Spuren der beiden gegebenen Ebenen stehen senkrecht zur Achse OX, dann ist der gesuchte Winkel demjenigen gleich, welchen die zweiten Spuren miteinander bilden.

Zweiter Fall. Die ersten Spuren der beiden Ebenen sind parallel, stehen aber nicht senkrecht zur Achse (Fig. 43).

Man zeichnet zuerst die Projektionen der Durchschnittslinie. Die zweite Projektion derselben geht durch den Schnittpunkt b_2 der zweiten Spuren der gegebenen Ebenen, und sie ist parallel zur Achse OX. Projiciert man b_2 auf OX nach b_1 und zieht a_1b_1 parallel zu QS, dann ist a_1b_1 die erste Projektion der Schnittlinie. Die Ebene des Neigungswinkels steht senkrecht zu dieser Schnittlinie, also auch senkrecht zu P_1, ihre erste Projektion ist deshalb eine Gerade mn, welche senkrecht zu den Spuren SQ und UV steht, und sie schneidet die beiden Ebenen in zwei Linien, deren Projektionen mp und np sind. Diese beiden Geraden, welche die Schenkel des gesuchten Winkels sind, bilden mit der Spur mn ein Dreieck. Durch Drehung desselben um mn kann man die wahre Gestalt finden, indem man pp′ gleich der Höhe b_1b_2 macht und p′ mit m und n verbindet. Dann ist $\angle mp'n$ der gesuchte Winkel.

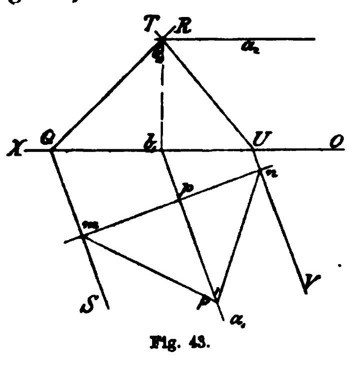


Fig. 43.

Dritter Fall. Die Spuren der Ebene haben eine beliebige Lage.

Es seien SQ und QR die Spuren der einen und UV und UT die Spuren der anderen Ebene; $b_1 c_1$ und $b_2 c_2$ die Projektionen ihrer Durchschnittslinie. Man zeichnet die erste Spur mn einer Ebene, welche senkrecht zu dieser Durchschnittslinie steht, dann ist $mn \perp b_1 c_1$. Diese

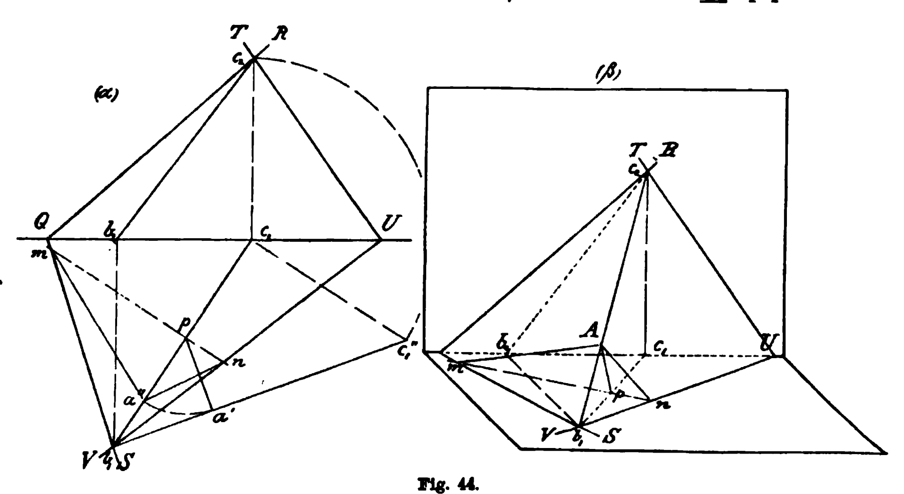


Fig. 44.

Ebene schneidet die beiden gegebenen Ebenen in den Linien Am und An, Fig. 44(β), welche mit der Spur mn das Dreieck Amn bilden; das letztere enthält nun den gesuchten Neigungswinkel mAn. Die Lösung der Aufgabe erfordert hiernach die Ermittelung der wahren Gestalt des Dreiecks Amn. Zieht man in (β) Ap, so ist diese die Höhe in Bezug auf mn als Grundlinie, ferner steht Ap wegen der Lage der Ebene des Neigungswinkels senkrecht zu $b_1 c_2$. — Man drehe deshalb das bei c_1 rechtwinklige Dreieck $b_1 c_1 c_2$ um $b_1 c_1$, bis dasselbe in P_1 gelangt (ziehe also in (α) $c_1 c_1'' \perp b_1 c_1$ und verbinde b_1 mit c_1'' durch eine Gerade), fälle von p aus das Lot pa' auf $b_1 c_1''$, dann ist pa' die wahre Höhe des Dreiecks Amn, welche man nach pa'' überträgt. $a''mn$ ist nun die wahre Gestalt des Dreiecks und $\angle ma''n$ der gesuchte Neigungswinkel.

Andere Lösung (Fig. 45). Die Spuren der beiden gegebenen Ebenen und die Projektionen ihrer Durchschnittslinie sind wie in Fig. 44 bezeichnet. Man drehe die Ebene TUV, d. h. denjenigen Teil, dessen Projektionen $b_1 c_1 U$ und $b_2 c_2 U$ sind, um die Spur UV in die erste Projektionsebene. Hierbei behält die Seite $b_1 U$ ihre Lage, während der dritte Eckpunkt einen Kreisbogen beschreibt, dessen Projektion auf P_1 die von c_1 auf $b_2 U$ gefällte Senkrechte $c_1 c''$ ist. Da nach der Umklappung die drei

Seiten des Dreiecks in wahrer Länge erscheinen, so kann man mit Uc_2 einen Kreisbogen zeichnen, welcher c_1c'' in c'' schneidet, denn Uc_2 ist die wahre Länge der einen Seite des zu drehenden Dreiecks. Die wahre Gestalt desselben ist dann $b_1c''U$. In gleicher Weise erhält man in $b_1c'Q$ die wahre Gestalt des Dreiecks (b_1c_1Q, b_2c_2Q). Man trage nun von b_1 aus auf b_1c' und b_1c'' die gleichen Strecken b_1a' und b_1a'' ab, ziehe

$a'm \perp b_1c'$ und

$a''n \perp b_1c''$;

dann kann man $a'm$ und $a''n$ als die, in die erste Projektionsebene niedergeklappten Schenkel des gesuchten Neigungswinkels ansehen, welche mit der Verbindungslinie der Punkte mn vor der Umklappung das Dreieck mAn, s. Fig. 44(β), bildeten. Aus mn, $a'm$ und $a''n$ konstruiert man nun das Dreieck man, in welchem $\angle man$ die wahre Grösse des Neigungswinkels der gegebenen Ebenen darstellt.

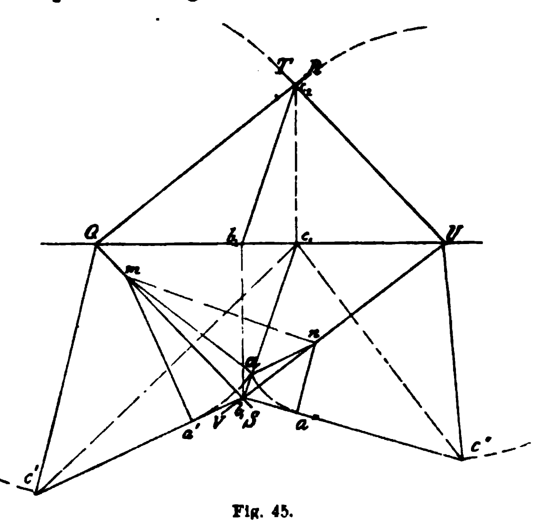


Fig. 45.

Eine dritte Lösung ergiebt sich, wenn man von einem beliebigen Punkte Lote auf die beiden gegebenen Ebenen fällt. Der Winkel, welchen dieselben mit einander bilden, ist gleich dem Neigungswinkel der beiden Ebenen, oder er macht mit ihm 2 R aus. Die Aufgabe ist hierdurch auf (II, 18) und (III, 19) zurückgeführt.

Zur weiteren Übung mögen noch folgende Aufgaben dienen.

34) Aus den drei Kantenwinkeln einer dreiseitigen Ecke die Flächenwinkel derselben zu finden.

35) Aus zwei Kantenwinkeln und dem eingeschlossenen Flächenwinkel, oder aus einem Kantenwinkel und den beiden anliegenden Flächenwinkeln die übrigen Stücke zu finden.

36) Aus den drei Flächenwinkeln die Kantenwinkel zu finden.

Diese Aufgabe wird mit Hülfe der Polarecke auf 34) zurückgeführt.

37) Den Winkel zu finden, welchen die Gerade (a_1b_1, a_2b_2) mit der Ebene SQR bildet.

Anl. zur Lösung. Man fälle von einem beliebigen Punkte der gegebenen Geraden ein Lot auf die Ebene, bestimme die wahre Grösse des Winkels, welchen (a_1b_1, a_2b_2) mit dem Lot bildet und subtrahiere denselben von einem rechten Winkel.

38) Es sind zwei Punkte A $(a_1 a_2)$ und B $(b_1 b_2)$ und eine Ebene SQR gegeben. Man soll die Projektionen desjenigen Punktes dieser Ebene bestimmen, dessen Verbindungslinien mit A und B gleiche Winkel mit SQR bilden und in einer zur letzteren senkrechten Ebene liegen. (Spiegelung.)

39) Eine in P_1 liegende Figur, z. B. das Fünfeck abcde und die Ebene SQR, welche senkrecht zu P_2 steht und deren erste Spur mit der Seite cd zusammenfällt, sind gegeben. Man soll das Fünfeck um die zur Achse OX senkrechte Spur SQ drehen, bis es in die Ebene SQR fällt. Die Projektionen des Fünfecks nach der Drehung sind zu bestimmen (Fig. 46).

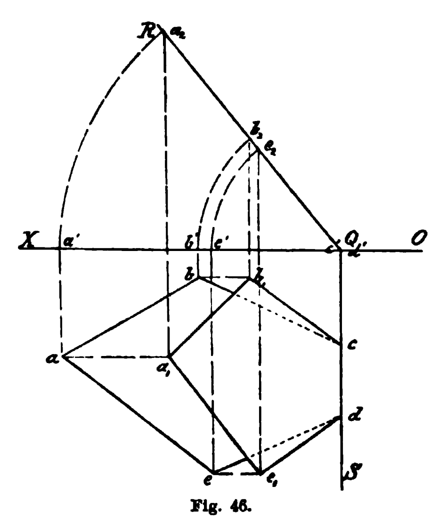


Fig. 46.

Die erste Projektion des Fünfecks fällt bei der gegebenen Lage mit demselben zusammen, und die zweite Projektion a′b′e′c′d′ liegt in der Achse OX. Diese Projektion gelangt aber durch die Drehung der Figur um QS in die zweite Spur der gegebenen Ebene nach $a_2 b_2 e_2 c'd'$, indem jeder der Punkte a′, e′, b′ einen Kreisbogen um den Mittelpunkt Q beschreibt, während c′ und d′ an der Stelle bleiben. Die ersten Projektionen der Ecken behalten bei der Drehung fortwährend dieselben Abstände von OX, d. h. sie bewegen sich auf geraden Linien, welche parallel zur Achse sind. Auf den letzteren ergeben sich die ersten Projektionen der Eckpunkte durch die von a_2, b_2, e_2 gefällten Senkrechten zu OX in a_1, b_1, c, d, e_1.

Anmerkung. Jede Seite des Fünfecks abcde trifft mit ihrer ersten Projektion nach der Drehung in demselben Punkte der Spur QS zusammen. Ist z. B. n der Punkt, in welchem QS von ae geschnitten wird, so muss auch $a_1 e_1$ nach n gehen, weil jeder Punkt von QS seine Lage während der Drehung beibehält.

40) Die vorige Aufgabe unter denselben Bestimmungen zu lösen, wenn die gegebene Figur ein Kreis ist. Durch einen gegebenen Punkt der ersten Projektion nach der Drehung eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

41) Man soll die in der ersten Projektionsebene liegende Figur abcde durch Drehung um die Spur SQ in die Ebene SQR bringen, wenn die letztere eine beliebige Lage hat (Fig. 47).

Man stelle eine neue Projektionsebene STR auf, welche senkrecht zu SQR und P_1 steht. In dieser Ebene liegen die Schenkel des Neigungswinkels, welchen SQR mit P_1 bildet. Die erste Spur ST steht senkrecht zu SQ und die zweite Spur SR senkrecht zur Achse OX. Um die wahre Grösse des Neigungswinkels zu bestimmen, mache man TR' ⊥ ST

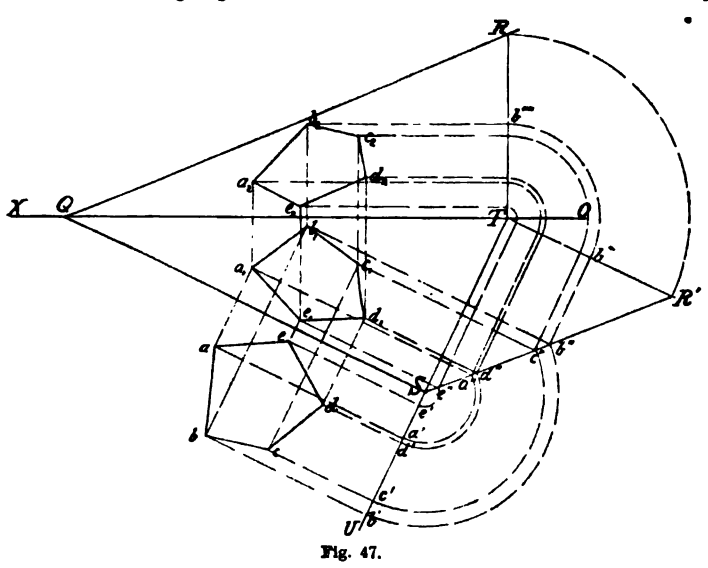


Fig. 47.

und gleich TR. Zieht man noch R'S, so ist ∠TSR' gleich dem gesuchten Winkel. Die gegebene Figur ist nun um einen Winkel zu drehen, welcher dem Nebenwinkel USR' von ∠TSR' gleich ist. Da die Ecken a, b, c, d, e Kreisbögen beschreiben, deren Halbmesser die Abstände dieser Punkte von der Spur SQ sind, so kann man diese Halbmesser durch Senkrechten von a, b, c, d, e aus, auf US übertragen, und um S als Mittelpunkt die Kreisbögen a'a'', b'b'', c'c'', d'd'', e'e'' zeichnen. Die ersten Projektionen behalten während der Drehung ihre Abstände von UT, d. h. sie bewegen sich auf Geraden, welche parallel zu UT sind. Man findet demnach die erste Projektion $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ des Fünfecks, wenn man die Geraden $a''a_1$, $b''b_1$, $c''c_1$, $d''d_1$, $e''e_1$ senkrecht zu ST zieht.

Um die zweite Projektion b_2 eines Eckpunktes zu finden, ziehe man durch b_1 die Senkrechte zur Achse OX, und trage auf dieser den Abstand des Punktes b'' von ST als Höhe des betr. Punktes über P_1 von OX aus ab. In Fig. 47 ist von b'' aus die Gerade b''b''' parallel zu ST gezogen, dann mit dem Halbmesser Tb''' der Kreisbogen b'''b'''' gezeichnet,

endlich noch die Gerade $b''''b_2$ parallel zur Achse OX gezogen, wodurch ebenfalls b_2 bestimmt wird.

42) Die Projektion einer in P_1 liegenden Figur nach der Drehung derselben um eine Gerade zu finden, welche ebenfalls in P_1 liegt, wenn die Projektion eines Eckpunktes nach der Drehung gegeben ist. Es soll hierbei weder eine zweite Projektion, noch der Drehungswinkel benutzt werden.

43) Die erste Projektion einer Figur F, welche in der Ebene SQR liegt, ist gegeben. Man soll die zweite Projektion und die wahre Gestalt von F bestimmen (Umkehrung von [41]. Die Konstruktion ist leicht aus Fig. 47 zu ersehen.)

44) Die beiden Projektionen einer dreiseitigen Pyramide sind gegeben, man. soll die Neigungswinkel ihrer Ebenen gegen einander bestimmen und die Abwickelung der Mantelfläche zeichnen.

45) Die Projektionen einer dreiseitigen Pyramide zu finden, welche auf P_1 steht, wenn gegeben sind:

a) Die auf P_1 liegende Grundfläche und die Längen der drei Kanten, welche die Ecken der Grundfläche mit der Spitze verbinden;

b) Die Grundfläche, eine Seitenfläche, und der Neigungswinkel beider;

c) Die Grundfläche, die Neigungswinkel zweier Seitenflächen gegen die erstere, und die Länge derjenigen Kante, welche diese Seitenflächen gemeinschaftlich haben.

d) Die Grundfläche und die drei Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die erstere.

46) Durch die Gerade (a_1b_1, a_2b_2) eine Ebene zu legen, welche von einem gegebenen Punkte (c_1c_2) den Abstand m hat.

IV. Abschnitt.

Ebene Durchschnitte der Körper.

1) Die Projektionen des Durchschnittes eines Prisma's mit einer Ebene, die wahre Gestalt der Schnittfigur und die Abwickelung der Mantelfläche des Prisma's zu finden.

α) Das Prisma sei gerade und stehe mit seiner Grundfläche auf P_1. Die Schnittebene SQR sei senkrecht zur zweiten Projektionsebene (Fig. 48). Die erste Projektion N_1 des Prisma's ist in diesem Falle die Grundfläche $a_1b_1c_1d_1e_1$. Die zweite N_2 ergiebt sich durch Projicieren der Eckpunkte a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 auf OX. Die Höhe der zweiten Projektion ist zugleich die wahre Höhe des Prisma's. Ebenso leicht ist die dritte Projektion N_3 zu zeichnen. Da die Schnittebene senkrecht zu P_2 steht, so fällt die zweite Projektion $a_2b_2c_2d_2e_2$ der Durchschnittsfigur mit der Spur QR zu-

sammen, während die erste Projektion wieder $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ ist. Leicht ergiebt sich hieraus auch die dritte Projektion, und durch Umklappung der Ebene SQR um die Spur QS die wahre Gestalt $a'b'c'd'e'$ des Durchschnittes. Die Mantelfläche M besteht aus fünf Rechtecken, deren Grund-

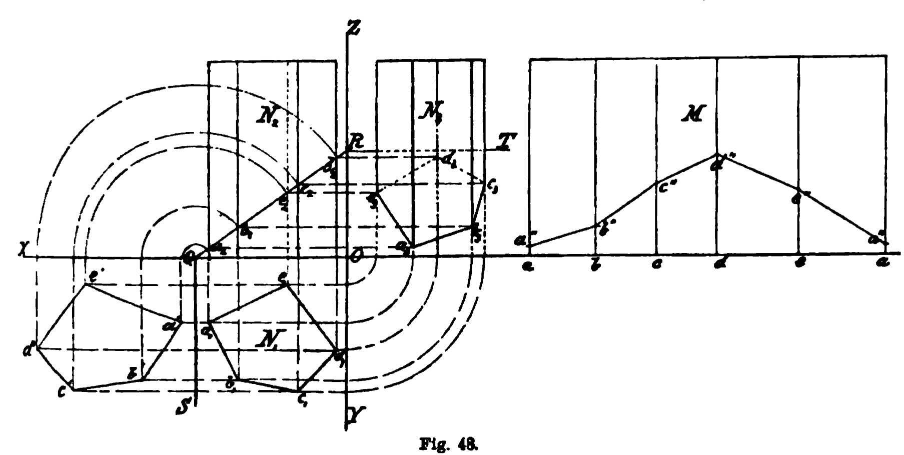


Fig. 48.

linien ab, bc u. s. f. gleich $a_1 b_1$ bez. $b_1 c_1$ . . . sind. Die gemeinschaftliche Höhe ist derjenigen des Prisma's gleich. Die Seiten der Durchschnittsfigur auf der abgewickelten Mantelfläche ergeben sich durch Übertragen der Höhen, in welchen a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 über der Achse OX liegen, auf die entsprechenden Kanten von M.

Anmerkung. Jede Seite der ersten Projektion $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ muss die entsprechende Seite der wahren Gestalt $a'b'c'd'e'$ in demselben Punkte der Spur SQ treffen. (Vergl. III. 39.) Da ferner in M alle Linien in wahrer Länge erscheinen, so ist auch $a''b'' = a'b'$; $b''c'' = b'c'$, u. s. f.

Man zeichne Fig. 48 auch in schiefer Projektion.

β) Das Prisma sei das vorige, aber die Ebene SQR habe eine beliebige Lage (Fig. 49).

Die erste Projektion der Schnittfigur fällt wieder mit der Grundfläche $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ zusammen. Die Bestimmung der zweiten Projektion führt somit auf III. 5 u. 6. Man zeichne $f_1 g_1$ als Verlängerung von $c_1 d_1$ und betrachte dieselbe als erste Projektion einer in SQR liegenden Geraden, deren zweite Projektion $f_2 g_2$ sich leicht durch die beiden Senkrechten $f_1 f_2$ und $g_1 g_2$ zur Achse OX ergiebt. $f_2 g_2$ schneidet die Kanten $c'c''$ und $d'd''$ in c_2 bez. d_2, welches nun die Projektionen zweier Eckpunkte des gesuchten Durchschnittes sind. In gleicher Weise kann man die übrigen Punkte finden.

Die zweite Projektion eines Durchschnittspunktes kann auch bestimmt werden, indem man durch die erste, z. B. a_1, eine Gerade $a_1 m_1$ parallel zur Spur QS zieht und $a_1 m_1$ als erste Projektion einer in SQR liegenden Geraden betrachtet. Die letztere ist dann ebenfalls parallel zur Spur QS und folglich auch parallel zur ersten Projektionsebene. Man ziehe demnach $m_1 m_2$ senkrecht zu OX und $m_2 a_2$ parallel zu OX, dann ist $m_2 a_2$ die zweite Projektion der Geraden, welche $a'a''$ in dem gesuchten Punkte a_2 trifft.

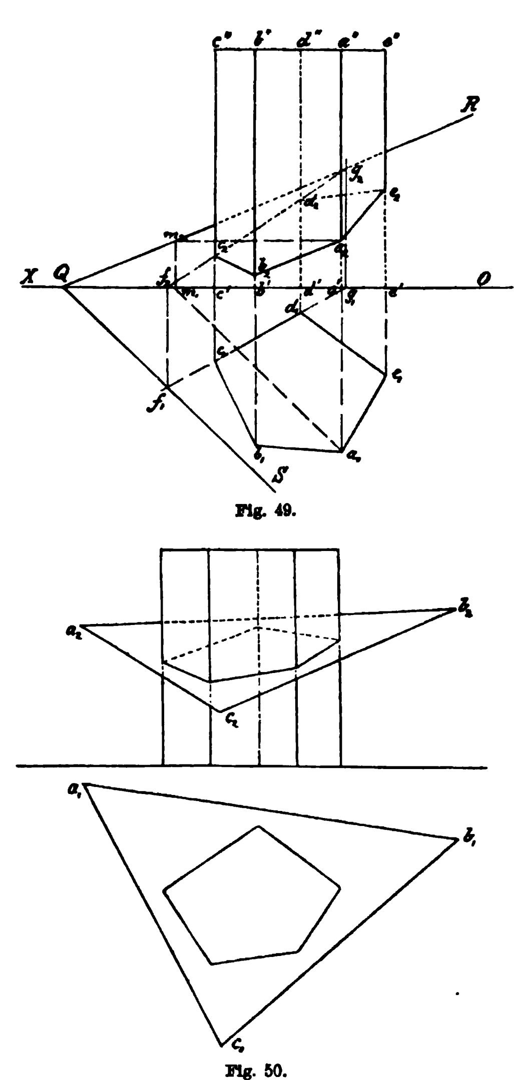


Fig. 49.

Fig. 50.

Die wahre Gestalt der Schnittfigur zu bestimmen (s. III, 41).

γ) Die Schnittebene ist nicht durch ihre Spuren, sondern durch die beiden Projektionen einer begrenzten Figur, z. B. eines Dreiecks ($a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$) gegeben (Fig. 50).

Die Lösung ist leicht und bleibt dem Anfänger überlassen. Man bestimme auch noch die wahre Gestalt des Dreiecks mit der darauf liegenden Durchschnittsfigur.

δ) Die Abwickelung der Mantelfläche eines schiefen Prisma's zu zeichnen (Fig. 51).

Das Prisma, dessen Projektionen N_1 und N_2 sind, stehe mit der unteren Grundfläche $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ auf P_1. Die erste Projektion der oberen Grundfläche fällt jetzt nicht mehr mit der unteren Grundfläche zusammen. Die Seitenflächen des Prisma's und ihre Projektionen sind Parallelogramme. Weil aber die Seiten der Grundfläche mit denen der Seitenflächen

verschiedene Winkel einschliessen, so werden sie in dem abgewickelten Mantel einen gebrochenen Linienzug bilden. Man durchschneidet deshalb das Prisma mittelst einer Ebene SQR, welche senkrecht zu den Kanten steht. Nach II, 19 muss die Spur $SQ \perp a_1 l_1$ und $QR \perp a_2 l_2$ sein. Die Durchschnittspunkte der Kanten des Prisma's mit der Ebene SQR könnte

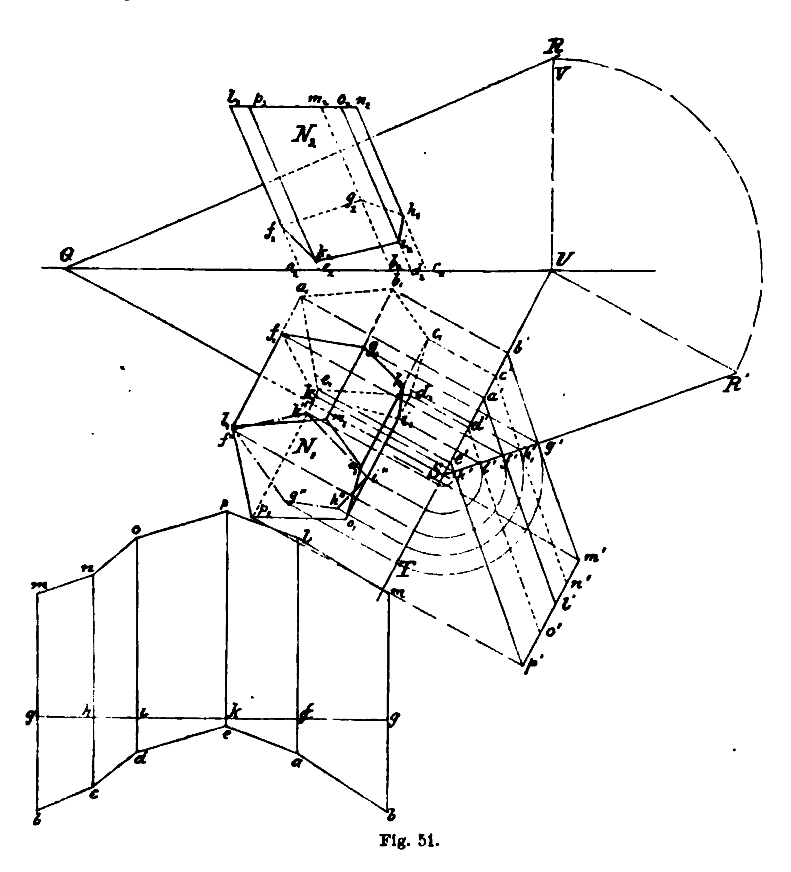


Fig. 51.

man nach III, 18 ermitteln; da aber zur Zeichnung des Mantels auch die wahre Gestalt des Schnittes zu bestimmen ist, so stellt man wie in III, 41 eine neue Projektionsebene TUV auf, welche senkrecht zu der Spur QS steht. Auf diese Ebene projiciert man das Prisma und die Ebene SQR und klappt sie endlich in die Horizontalebene nieder. Die leicht zu bestimmende Projektion des Prisma's ist dann b′m′p′e′, wobei zu bemerken ist, dass p′m′ als Projektion der oberen Grundfläche des Prisma's parallel zu TU ist, und ihr Abstand von TU gleich der aus der zweiten Projektion

zu entnehmenden Höhe von $l_2 n_2$ über OX sein muss. Die Projektion der Ebene SQR auf TUV ist nach der Umklappung der letzteren die Gerade SR′, welche mit SU den Neigungswinkel der Ebene SQR gegen die erste Projektionsebene bildet und wie in III, 41 bestimmt wird. In dieser neuen Projektion zeigt sich der gesuchte Durchschnitt als die in SR′ liegende Gerade k′g′. Die Eckpunkte f′g′h′i′k′ kann man durch Senkrechten zu SU auf die Kanten $a_1 l_1$, $b_1 m_1$ .... projicieren, wodurch sich nun die erste Projektion des Durchschnittes ergiebt. Die zweite Projektion und die wahre Gestalt f″g″h″i″k″ werden wie in III, 41 gefunden.

Bei der Abwickelung des Mantels wird nun der gefundene Umfang der Schnittfigur zu einer geraden Linie gg ausgestreckt. Man macht fg = f″g″, gh = g″h″ u. s. f. und zieht durch f, g, h, i, k Senkrechten zu gg. Die wahren Längen der letzteren sind aus der Seitenprojektion des Prisma's zu entnehmen, so dass fl = f′l′, gm = g′m′ u. s. f., ebenso fa = f′a′, gb = g′b′ ... zu machen ist.

2) Die Projektionen des Durchschnittes einer Pyramide mit einer Ebene zu finden.

Die Lösung dieser Aufgabe ist leicht. Man zeichne die nachstehenden Fälle:

a) Die Pyramide steht mit ihrer Grundfläche auf P_1 und die Schnittebene SQR stehe senkrecht zu P_2 (Fig. 52). Die zweite Projektion des Schnittes ist eine mit QR zusammenfallende Gerade, woraus sich auch leicht die beiden anderen Projektionen ergeben. Man zeichne auch die wahre Gestalt des Schnittes und die Abwickelung der Mantelfläche.

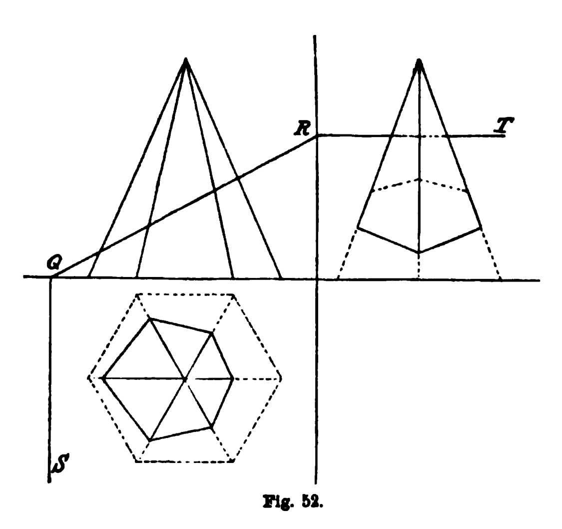


Fig. 52.

b) Die Spuren der Schnittebene haben eine beliebige Lage (Fig. 53).

Man erweitert eine Seitenfläche ($c_1 d_1 m_1$, $c_2 d_2 m_2$), bis sie die Projektionsebenen schneidet. Die erste Spur dieser Ebene ist $r_1 l$, die Verlängerung von $c_1 d_1$. Um die zweite Spur zu bestimmen, ziehe man durch die Spitze ($m_1 m_2$) die Gerade ($m_1 n_1$, $m_2 n_2$) parallel zu der Spur

$r_1 l$; die zweite Projektion dieser auch zu P_1 parallelen Geraden ist parallel zur Achse und sie trifft P_2 in dem senkrecht über n_1 liegenden Punkte n_2. Da diese Gerade in der erweiterten Ebene jener Seitenfläche liegt, so ist die zweite Spur der letzteren $l n_2$. Die Ebene $r_1 l n_2$ schneidet nun die Ebene SQR in der Geraden $(r_1 o_1, r_2 o_2)$ und die Strecken $h_1 i_1$ und $h_2 i_2$ sind nun die Projektionen einer Seite der Durchschnittsfigur. $h_1 i_1$ und $c_1 d_1$ treffen sich hiernach in demselben Punkte r_1 der Spur SQ. Aus gleichem Grunde müssen auch $b_1 c_1$ und $g_1 h_1$ oder $a_1 b_1$ und $f_1 g_1$ u. s. f. auf SQ zusammentreffen, so dass also hiernach die erste Projektion der Schnittfigur gefunden werden kann, wenn ein Eckpunkt derselben bestimmt ist. Die zweite Projektion findet man leicht mit Hülfe der ersten.

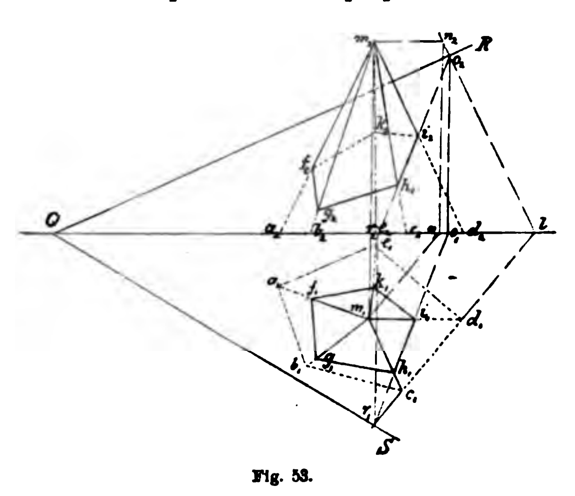


Fig. 53.

Andere Lösung. Man ermittele die Durchschnittspunkte der einzelnen Kanten mit der Ebene SQR nach (III, 18), indem man durch jede derselben eine Ebene legt, welche entweder senkrecht zur ersten oder zur zweiten Projektionsebene ist.

Endlich kann man noch wie in Aufgabe 1, δ) dieses Abschnittes eine neue Projektionsebene aufstellen, welche senkrecht zur Ebene SQR und zu P_1 steht, und auf dieselbe Weise wie dort verfahren. Diese Konstruktion ist besonders dann vorteilhaft, wenn auch die wahre Gestalt der Schnittfläche bestimmt werden soll.

c) Die Schnittebene ist nicht durch ihre Spuren, sondern als begrenzte Figur, etwa durch die Projektionen eines Dreiecks gegeben. Man konstruiere auch die wahre Gestalt des Dreiecks mit derjenigen der darauf liegenden Durchschnittsfigur.

Die Kegelschnitte.

Zu den krummen Linien, welche für die darstellende Geometrie, wie überhaupt für das Zeichnen von Wichtigkeit sind, gehören besonders die

sogenannten Kegelschnitte: Ellipse, Parabel und Hyperbel, welche durch den Schnitt einer Ebene mit einem geraden Kegel von kreisförmiger Basis entstehen. Unter diesen Kurven ist die Ellipse diejenige, welche in den Anwendungen der darstellenden Geometrie am häufigsten vorkommt. Es sollen deshalb hier die für das Zeichnen besonders charakteristischen Eigenschaften derselben und diejenigen der übrigen Kegelschnitte soweit als nötig untersucht und elementar begründet werden.

3) Der geometrische Ort eines Punktes M, für welchen die Summe seiner Verbindungslinien mit zwei gegebenen festen Punkten A und B unveränderlich ist, heisst eine Ellipse (Fig. 54).

Die Kurve ist hiernach leicht zu konstruieren. Ist $FG = 2a$ die gegebene Summe, so nimmt man den Punkt K beliebig auf FG an, zeichnet von A und von B aus Kreisbögen mit den Halbmessern FK bez. GK. Diese schneiden sich im Punkte M der Ellipse, weil $AM + BM = FG$ ist. Ein zweiter Schnittpunkt derselben Kreisbögen ist N. Vertauscht man die beiden Halbmesser so, dass AP bez. $AQ = GK$ und BP bez. $BQ = FK$ ist, so erhält man zwei neue Punkte P und Q, welche ebenfalls der gesuchten Ellipse angehören.

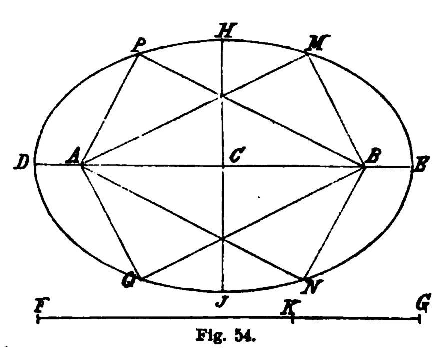


Fig. 54.

Durch Veränderung der Lage des Punktes K auf FG kann man nun leicht so viele Punkte der Ellipse bestimmen, als zur Zeichnung derselben erforderlich sind.

$\triangle ABM \cong \triangle ABN$; deshalb haben M und N gleiche Abstände von DE und liegen ausserdem auf einer Senkrechten zu DE. Weil auch $\triangle ABM \cong \triangle ABP \cong \triangle ABQ$, so liegen P und Q ebenfalls symmetrisch in Bezug auf DE. Ferner liegen P und M sowie auch Q und N symmetrisch in Bezug auf die durch die Mitte C von AB gehende Senkrechte zu DE. Die vier Punkte M, N, P und Q haben deshalb auch gleiche Abstände von C.

A und B heissen die Brennpunkte, $DE = AD + BD = 2a$ die grosse Achse, $JH = 2b$ die kleine Achse der Ellipse.

4) Wird ein gerader Kreiskegel oder Cylinder von einer Ebene in einer geschlossenen Kurve geschnitten, so ist der Durchschnitt eine Ellipse.

Beweis. Es sei OP der Schnitt eines Kegels, dessen Spitze S ist

(Fig. 55) mit einer Ebene Q. Man lege in den Kegel eine die Mantelfläche in dem Kreise HJ und die Schnittebene Q in dem Punkte B berührende Kugelfläche.

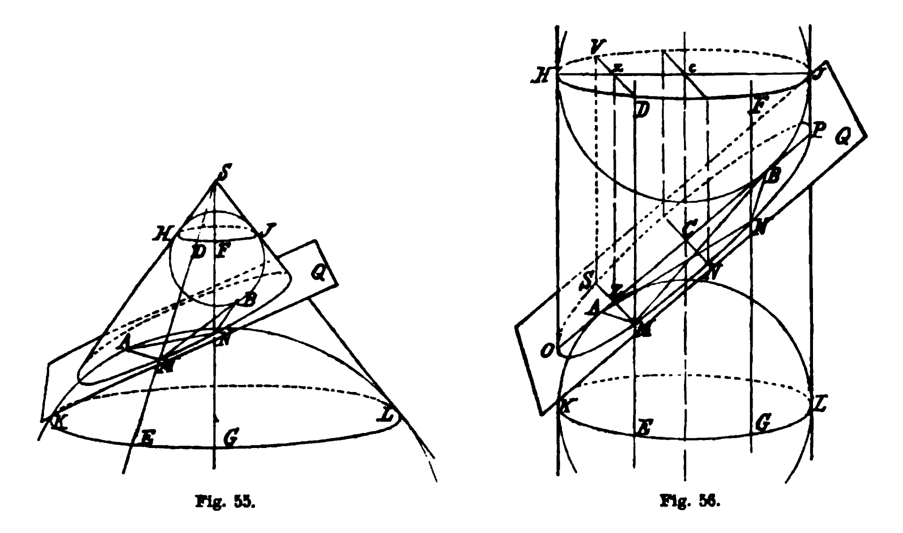


Fig. 55. Fig. 56.

Eine zweite Kugel unterhalb der Schnittebene Q berühre dieselbe in A und den Kegelmantel in dem Kreise KL. Ist nun M ein Punkt der Durchschnittskurve, so ist AM eine Tangente der unteren, ebenso BM eine Tangente der oberen Kugel. Zieht man ferner durch M die Seitenlinie der Kegelfläche, so berührt diese die beiden Kugeln in D und E. Da nun die Tangenten, welche man von einem Punkte an eine Kugel ziehen kann, gleiche Länge haben, so ist:

$$AM = EM;\ BM = DM,$$

$$\text{folglich}\quad AM + BM = DM + EM = DE.$$

Für einen andern Punkt N der Durchschnittskurve findet man ebenso:

$$AN + BN = FG,$$

wenn FG das Stück der Seitenlinie ist, welches zwischen den beiden Berührungskreisen liegt. Da aber $FG = DE$ ist, so folgt hieraus, dass für jeden Punkt der Durchschnittskurve die Summe der Entfernungen von A und B dieselbe ist.

Dieser Beweis ist auch wörtlich für Fig. 56 gültig, wo statt des Kegels eine Cylinderfläche von einer Ebene Q geschnitten wird.

5) Betrachtet man in Fig. 55 und 56 die Seitenlinien des Kegels bez. Cylinders als projicierende Geraden, so erscheint die Ellipse entweder

als eine Centralprojektion eines der Kreise HJ oder KL (oder auch jedes anderen auf der Kegelfläche liegenden Kreises) aus der Spitze S des Kegels als Projektionscentrum, oder als eine schiefe Parallelprojektion eines jeden der Berührungskreise HJ und KL der Cylinderfläche. Die letzteren sind umgekehrt gerade Parallelprojektionen der Ellipse.

Legt man durch die Achse des Cylinders (Fig. 56) eine Ebene, welche durch die beiden Brennpunkte A und B geht, so schneidet dieselbe die Ebene Q, zu welcher sie senkrecht steht, in OP, der grossen Achse der Ellipse. Jede Sehne der Ellipse, z. B. SM, welche senkrecht zu OP steht, ist parallel zur Ebene des Berührungskreises HJ. Man kann darum SM als die Projektion einer ebenso langen Sehne DV des oberen Berührungskreises betrachten, welche senkrecht zu dem Durchmesser HJ steht. Zieht man nun die projicierende Gerade zZ, parallel zu den Seitenlinien der Cylinderfläche, so verhält sich, wenn c und C die Mittelpunkte des Kreises HJ und der Ellipse sind:

$$CZ : CO = cz : cH, \text{ und es ist zugleich } ZS = ZM = zD = zV.$$

Hieraus lässt sich folgende Konstruktion der Ellipse herleiten:

Es seien DE und FG (Fig. 57) die grosse und kleine Achse einer Ellipse, C der Mittelpunkt. Man zeichne einen Kreis dfeg, dessen Halbmesser gleich der halben kleinen Achse der Ellipse ist. Nun teile man cd und CD in dieselbe Anzahl gleicher Teile, und ziehe in den Teilpunkten H, K, . . ., h, k . . . Senkrechten zu CD bez. cd; mache HJ = hi,

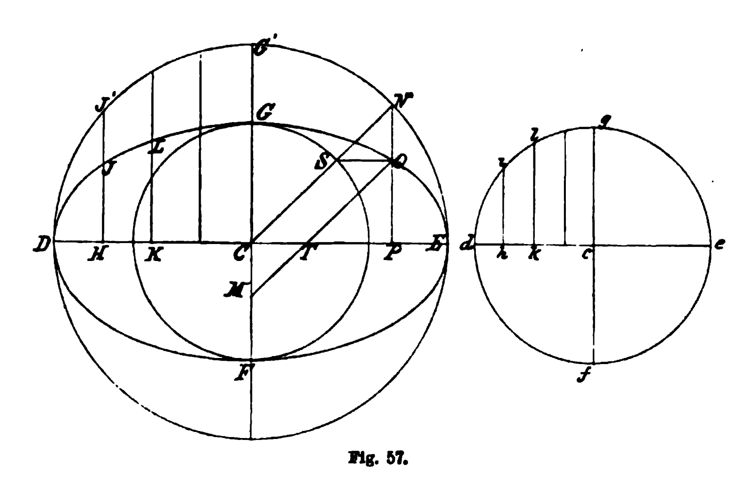


Fig. 57.

KL = kl u. s. f. J, L und alle derartig konstruierten Punkte gehören der Ellipse an, denn man hat:

$$CH : CD = ch : cd$$
$$CK : CD = ck : cd$$

u. s. f., und zugleich

$$HJ = hi$$
$$KL = kl \quad \text{u. s. f.}$$

Zeichnet man um die grosse Achse DE der Ellipse als Durchmesser einen Kreis (Hauptkreis der Ellipse) und verlängert HJ bis zum Umfang desselben, so verhält sich: $CH : CD = ch : cd$.

Folglich sind J' und i ähnlich liegende Punkte der beiden Kreise, also verhält sich auch

$$HJ' : hi = CD : cd \quad \text{oder} \quad HJ' : HJ = CD : cg = a : b,$$

d. h. durch die Ellipse wird jede Senkrechte, welche man von einem Punkt im Umfange des Hauptkreises auf die grosse Achse fällt, so geteilt, dass der in der Ellipse liegende Abschnitt sich zu dem im Kreise liegenden verhält, wie die halbe kleine Achse zur halben grossen Achse der Ellipse.

Anm. Ist Z der Schnittpunkt von SQ mit FG, so findet man leicht, dass sich verhält:

$$QZ : SZ = a : b.$$

6) Die Konstruktion der Ellipse kann nach diesem Satze auch folgendermassen ausgeführt werden. Man zeichne um die kleine Achse FG als Durchmesser einen Kreis, fälle von einem beliebigen Punkte N des Hauptkreises das Lot NP auf DE und ziehe den Halbmesser CN. Von demjenigen Punkte S, in welchem der letztere den kleinen Kreis trifft, ziehe man eine Gerade parallel zu DE; diese schneidet NP in einem Punkte Q der Ellipse. Denn $PQ : PN = CS : CN = b : a$.

7) Noch eine für praktische Anwendungen nützliche Konstruktion der Ellipse lässt sich hieraus herleiten, bei welcher die Hülfslinien entbehrt werden können. Zieht man nämlich QM parallel zu CN, so ist $QM = CN = a$, $TQ = CS = b$. Da dasselbe für jeden Punkt der Ellipse gültig ist, so folgt, dass der Punkt Q die Ellipse durchläuft, wenn die Gerade MQ (Kante eines Papierstreifens) mit den beiden Punkten M und T an den Achsen gleitet.

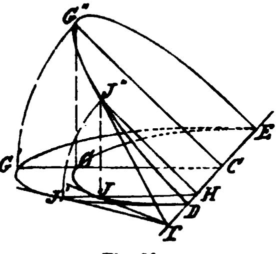


Fig. 58.

8) Denkt man sich den Hauptkreis (Fig. 58) um die grosse Achse DE so weit gedreht, bis der Punkt G' senkrecht über G liegt, was der Anschaulichkeit wegen in Fig. 58 für die eine Hälfte des Kreises und der Ellipse in schiefer

Projektion dargestellt ist, dann wird auch J′ senkrecht über J liegen u. s. f. Denn, sind G″ und J″ die Lagen der Punkte G′ und J′ nach der Drehung und J_1 die Projektion des Punktes J″, so ist $\triangle J_1J''H \sim \triangle CGG''$; folglich verhält sich:

$$HJ_1 : HJ'' = CG : CG'' = b : a,$$

folglich fällt J_1 mit J zusammen, d. h. J ist auch die Projektion von J″. Hiernach ist die Ellipse auch die gerade Projektion des Hauptkreises, wenn der letztere einen Winkel $G''CG = \alpha$ mit der Ebene der Ellipse bildet, dessen Cosinus gleich $\frac{CG}{CG''} = \frac{b}{a}$ ist.

Projiciert man die Tangente des Kreises im Punkte J″ auf die Ebene der Ellipse, so erhält man als Projektion derselben die Tangente, welche die Ellipse in J berührt. Beide Tangenten J″T und JT treffen sich in demselben Punkte T der Schnittlinie DE beider Ebenen. Dreht man den Hauptkreis um DE in seine ursprüngliche Lage zurück, so gelangt J″ wieder nach J′, während T seine Lage behält.

Aufgaben. 9) Durch den Punkt J einer gegebenen Ellipse eine Tangente an dieselbe zu ziehen (Fig. 59).

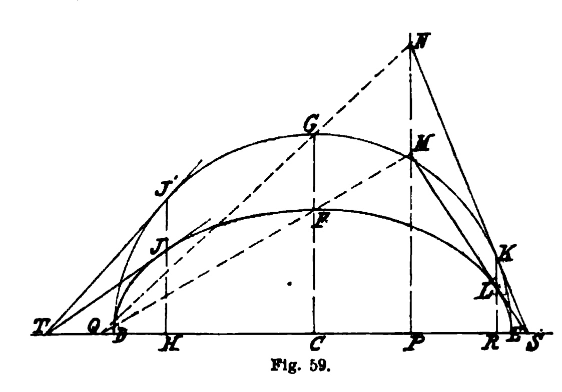


Fig. 59.

Aus dem vorigen ergiebt sich leicht folgende Konstruktion. Man zeichne um die grosse Achse DE der Ellipse den Hauptkreis, ziehe durch J die Gerade HJ′ senkrecht zu DE und in J′ die Tangente TJ′ an den Hauptkreis. Den Punkt T, in welchem TJ′ die Verlängerung der grossen Achse schneidet, verbindet man durch eine Gerade mit J, dann ist JT die gesuchte Tangente.

10) Von einem gegebenen Punkte M aus Tangenten an eine gegebene Ellipse zu ziehen (Fig. 59).

Man ziehe durch M die Gerade NP ⊥ zu DE und bestimme auf dieser Senkrechten den Punkt N so, dass $PM : PN = b : a$. Das letztere erreicht man, wenn man CG ⊥ DE zieht (dann ist $CF = b$, $CG = a$), durch F und M die Gerade QM bis zur grossen Achse verlängert und nun Q mit G verbindet. Die letzte Gerade trifft die Senkrechte PM in N.

Zieht man nun von N eine Tangente an den Hauptkreis und verlängert dieselbe bis zum Durchschnitt S mit DE, dann ist die Verbindungslinie der Punkte M und S eine der gesuchten Tangenten der Ellipse. Zum Beweise ziehe man vom Berührungspunkte K der Tangente NS die Senkrechte KR zur grossen Achse. Diese Senkrechte trifft MS in L und es verhält sich:

$$RL : RK = PM : PN = b : a,$$

wodurch die Behauptung erwiesen ist. Die zweite von M aus mögliche Tangente kann in gleicher Weise konstruiert werden.

11) Die beiden Durchschnittspunkte einer Geraden g mit einer durch grosse und kleine Achse gegebenen Ellipse zu finden (Fig. 60).

Sind DE und FG die Achsen der Ellipse, so ziehe man durch einen beliebigen Punkt L der Geraden g die Senkrechte JK zur grossen Achse, und bestimme auf dieser den Punkt J so, dass sich verhält $KL : KJ = b : a$. Wie in der vorigen Aufgabe verlängert man CF bis B so, dass $BC = a$, dann zieht man durch L und F eine Gerade bis zum Durchschnitt O mit DE. Verlängert man nun OB, bis sie die Senkrechte KL in J trifft, so verhält sich $KL : KJ = CF : CB = b : a$.

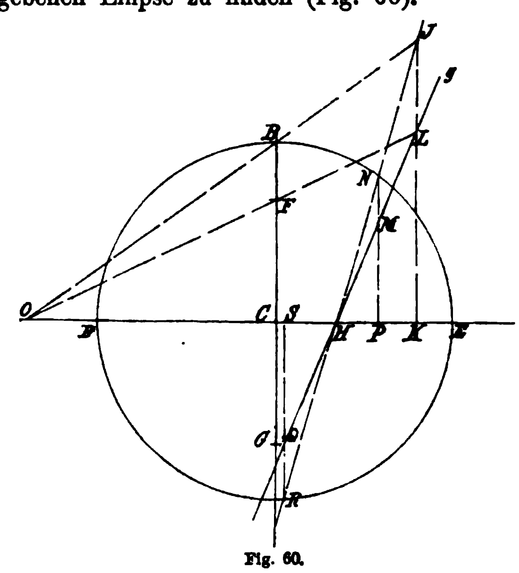


Fig. 60.

Nun ziehe man die Gerade HJ, zeichne um DE den Hauptkreis der Ellipse und fälle von den beiden Punkten R und N, in welchen HJ den Hauptkreis schneidet, die Senkrechten PN und RS auf DE. Diese Senkrechten treffen nun die gegebene Gerade g in den beiden gesuchten Punkten M und Q. Denn man hat:

$$PM : PN = SQ : SR = KL : KJ = b : a.$$

12) Mit Hülfe des Satzes, dass die Ellipse eine Projektion des Hauptkreises ist, ergeben sich noch manche wichtige Eigenschaften der Ellipse. Es seien de und fg (Fig. 61) zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser des Kreises, DE und FG die Projektionen derselben; (die Ellipse

und ihr Hauptkreis sind der Übersichtlichkeit wegen getrennt voneinander gezeichnet).

Eine Sehne mn des Kreises, welche parallel zu dem Durchmesser de ist, wird von dem Durchmesser fg in o halbiert. Die Projektion MN dieser Sehne ist parallel zu DE (II, 14) und sie wird von dem Durchmesser FG halbiert. In gleicher Weise ergiebt sich, dass jede Sehne der Ellipse, welche parallel zu dem Durchmesser FG ist, von DE halbiert wird. Zwei Durchmesser, welche die Eigenschaft haben, dass jeder von ihnen diejenigen Sehnen halbiert, welche dem andern Durchmesser parallel sind, heissen konjugierte Durchmesser der Ellipse. Dieselben kann man hiernach immer als die Projektionen von zwei aufeinander senkrecht stehenden Durchmessern des Hauptkreises ansehen.

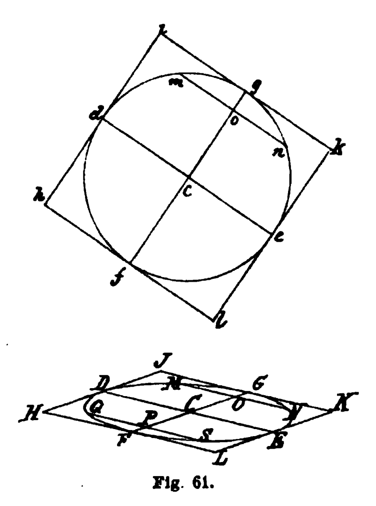


Fig. 61.

Leicht ergiebt sich hiernach, dass die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers parallel zum konjugierten Durchmesser sind. Die Tangenten in den Endpunkten D, E, F und G schliessen ein Parallelogramm HJKL ein, welches die Projektion des dem Hauptkreise umbeschriebenen Quadrats hikl ist. Man nennt dasselbe ein Tangentenparallelogramm der Ellipse.

13) Den Mittelpunkt einer gezeichnet gegebenen Ellipse zu bestimmen (Fig. 61). Man halbiere zwei parallele Sehnen MN und QS und ziehe durch die Mitten O und P den Durchmesser FG. Die Mitte C dieses Durchmessers ist der gesuchte Mittelpunkt.

14) In einem gegebenen Punkte E einer gezeichnet gegebenen Ellipse die Tangente an dieselbe zu ziehen (Fig. 61).

Man ziehe von E aus den Durchmesser DE, halbiere eine zu DE parallele Sehne MN in O und ziehe durch O und den Mittelpunkt C den Durchmesser FG, welcher nun der zu DE konjugierte Durchmesser ist. Die gesuchte Tangente in E ist parallel zu FG.

15) Den Berührungspunkt einer schon gezeichneten Tangente zu finden.

Ist JK (Fig. 61) die gegebene Tangente, so halbiere man eine zu JK parallele Sehne MN in O. Der durch C und O gehende Durchmesser schneidet JK im Berührungspunkte G.

16) An eine Ellipse Tangenten zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden g parallel sind.

Man ziehe durch die Mitte einer zu der Geraden g parallelen Sehne den Durchmesser. Der letztere schneidet die Ellipse in den Berührungspunkten der gesuchten Tangenten.

17) Die grosse und kleine Achse (Hauptachsen) einer gezeichnet gegebenen Ellipse zu finden (Fig. 62).

Man zeichne aus dem Mittelpunkt C der Ellipse einen Kreis, welcher dieselbe in vier Punkten schneidet. Nach 3) liegen je zwei dieser Punkte symmetrisch zu einer der Hauptachsen. Die eine Achse DE geht deshalb durch C und durch die Mitte H der einen Sehne MN die andere FG steht senkrecht zu DE.

Fig. 62.

18) Konstruktion der Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern.

Es seien DE und FG zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse, C ihr Mittelpunkt, so können dieselben nach 12) als die Projektionen von zwei aufeinander senkrecht stehenden Durchmessern de und fg des Hauptkreises angesehen werden. Zieht man beliebige Geraden hi, kl u. s. f. parallel zu fg, so werden deren Projektionen HJ, KL.. parallel zu CG sein. Ferner verhält sich:

$$\left.\begin{array}{l} HJ : hi = KL : kl = CG : cg \text{ u.s.f.} \\ \text{Ebenso } CH : ch = CK : ck = CD : cd \text{ u.s.f.} \end{array}\right\} \ldots (\alpha)$$

Zeichnet man nun um DE als Durchmesser einen Kreis und errichtet in H, K, C . . Senkrechten zu DE, welche diesen Kreis in J', L', G' . . . treffen, so folgt, weil Kreise ähnliche Figuren sind:

$$HJ' : hi = KL' : kl = CG' : cg \text{ u. s. f.},$$

folglich auch mit Rücksicht auf (α):

$$HJ' : HJ = KL' : KL = CG' : CG \ldots.$$

Fig. 63.

Zieht man deshalb die Geraden J'J, L'L, G'G . . ., so sind diese unter sich parallel.

Man zeichnet also um einen der beiden gegebenen Durchmesser, z. B. DE einen Kreis, errichtet im Mittelpunkte C das Lot CG' zu DE und verbindet den Endpunkt G' mit dem Endpunkte G des anderen Durch-

messers durch die Gerade GG'. Zieht man nun durch einen beliebigen Punkt H des Durchmessers DE das Lot HJ' zu demselben, ferner HJ parallel zu FG und J'J parallel zu GG', so erhält man in dem Schnittpunkte J einen Punkt der gesuchten Ellipse.

Man beweise noch folgende Tangentenkonstruktion. Soll diejenige Tangente gezeichnet werden, welche die Ellipse in J berührt, so ziehe man in J' die Tangente an den Kreis und verlängere dieselbe, bis sie DE in T schneidet. Die Gerade von T nach J ist die gesuchte Tangente.

19) Die früher in (IB, 4) angegebene schiefe Projektion eines Kreises ist eine Ellipse. Der Beweis ergiebt sich ohne weiteres aus dem Vergleich der Konstruktion der Ellipse in Fig. 63 mit derjenigen in (IB, 4) angegebenen Fig. 16, wenn man sich den zu projicierenden Kreis mit dem Durchmesser ab auf die gleichnamige Gerade in Fig. 16(β) gelegt denkt. ab und cd sind in β konjugierte Durchmesser der Ellipse.

Anmerkung. Ist M' ein beliebiger Punkt der Kreisfläche, welcher auf KL' liegt, so schneidet die zu G'G parallele Gerade M'M die Gerade KL in einem Punkte M, welcher die Projektion von M' ist.

20) Aus zwei konjugierten Durchmessern der Ellipse die Hauptachsen derselben zu bestimmen (Fig. 64).

Wird die Ellipse aus den beiden konjugierten Durchmessern DE und FG wie in Fig. 64 konstruiert, so schneidet der um DE gezeichnete Kreis die Ellipse ausser in D und E noch in zwei anderen Punkten J und L, welche zunächst bestimmt werden sollen. Hierzu ist nötig, diejenigen zu CG'G ähnlichen Hülfsdreiecke zu zeichnen, für welche die zu G'G parallele Seite eine Sehne des Kreises ist. Man ziehe durch die Mitte O von G'G eine Gerade senkrecht zu G'G. Der Punkt H, in welchem dieselbe DE trifft, ist von G' und G gleich weit entfernt, und kann deshalb als Mittelpunkt eines neuen Kreises angesehen werden, welcher durch G' und G geht. In diesem letzteren hat nun das Dreieck CG'G eine solche Lage, dass G'G eine Sehne desselben ist. Das gesuchte Dreieck KJ'J, welches dem Dreieck CG'G ähnlich ist und in dem Kreise DG'EF' auch eine ähnliche Lage haben muss, findet man, wenn man

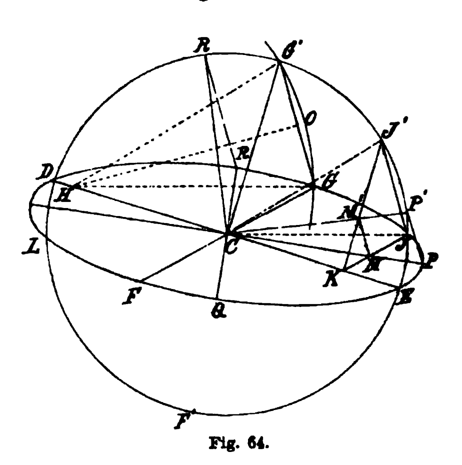


Fig. 64.

den Halbmesser CJ parallel zu HG zieht. Der Punkt J ist dann der ähnlich liegende Punkt zu G, und von hier aus ist das Dreieck KJ′J leicht zu zeichnen, da die Seiten desselben denjenigen des Dreiecks CG′G parallel sind. Die Halbierungslinie CM des Winkels JCE ist nun die eine Achse, und senkrecht zu dieser steht die andere Achse RQ der Ellipse. Um die Längen der beiden Achsen zu bestimmen, ziehe man durch den Punkt M, in welchem die Gerade JK von CM geschnitten wird, eine Parallele zu G′G. Diese Parallele trifft J′K in dem Punkte M′ der Kreis-

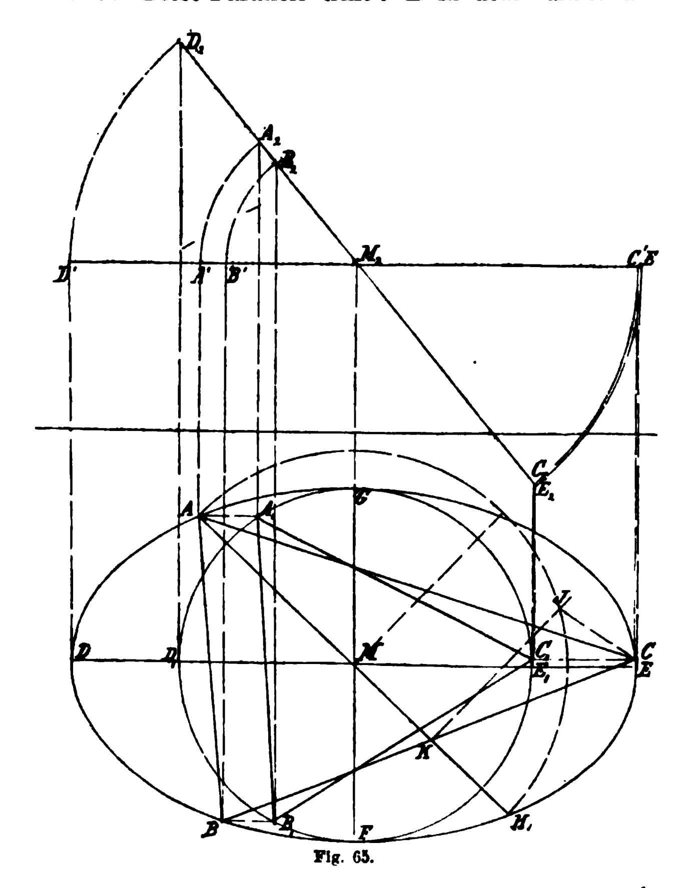


Fig. 65.

fläche, dessen Projektion M ist. Zieht man demnach durch M′ den Halbmesser CP′ und durch P′ wieder eine Parallele zu G′G, so schneidet diese CM in P, dem Endpunkt der einen Achse. Da die beiden Hauptachsen konjugierte Durchmesser der Ellipse sind, so müssen sie die Projektionen von zwei aufeinander senkrechten Durchmessern des Kreises

sein. Man zieht also $CR' \perp CP'$ und durch R' die Gerade R'R parallel zu G'G. Hierdurch ist nun R bestimmt.

Eine andere Auflösung siehe Anhang.

21) Die Lage eines gegebenen Dreiecks gegen die erste Projektionsebene so zu bestimmen, dass die Projektion desselben ein gleichseitiges Dreieck wird.

Anl. zur Aufl. Es sei ABC (Fig. 65) das gegebene Dreieck, welches in der ersten Projektionsebene oder parallel mit derselben liegen mag. Um ABC konstruiere man eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Durchschnittspunkt M der drei Mittellinien des Dreiecks ist. Man verlängert AM so, dass HM = AM ist, und zeichnet über AH als Durchmesser einen Kreis. Errichtet man in dem Schnittpunkte von BC und AH (Mitte von BC) die Senkrechte KJ zu AH und verbindet J mit C, so kann man wie in 18) Fig. 63 die Ellipse durch Dreiecke, welche KJC ähnlich sind und ähnlich liegen, konstruieren. Die Zeichnung der Ellipse selbst ist allerdings nicht erforderlich, nur ihre Hauptachsen DE und FG müssen bestimmt werden, was nach 20) auszuführen ist. Man stelle nun die zweite Projektionsebene P_2 so auf, dass die Achse OX parallel zur grossen Achse der Ellipse wird, drehe die letztere um die kleine Achse so weit, bis die erste Projektion der grossen Achse an Länge gleich der kleinen Achse wird. Die erste Projektion der Ellipse wird dann ein Kreis sein, und die Projektion des gegebenen Dreiecks ein diesem Kreise einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck werden. Es ist nämlich der Mittelpunkt des Kreises zugleich der Durchschnitt der drei Mittellinien der Projektion des Dreiecks. Nach diesen Andeutungen wird die Konstruktion leicht auszuführen sein.

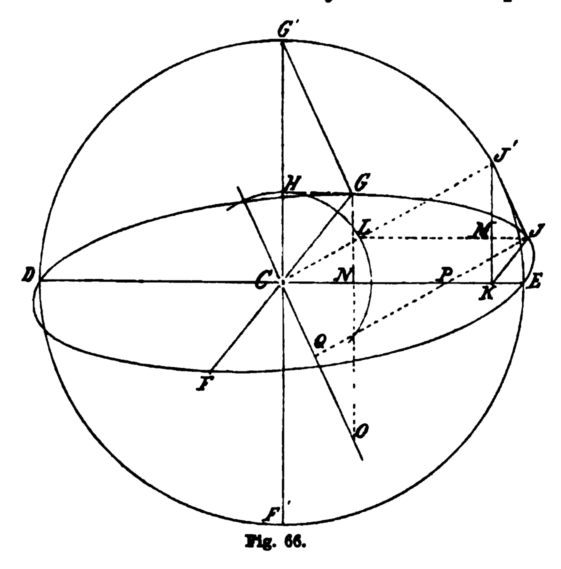


Fig. 66.

22) Rodenbergs Konstruktion der Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern.

Diese Konstruktion ist zuerst in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. XXVII, S. 803, angegeben und mit Hülfe der Theorie

des Momentancentrums nachgewiesen. Wir geben hier eine andere Herleitung, welche sich unmittelbar an die vorhergehenden Entwickelungen anschliesst.

Es seien DE und FG (Fig. 66) die gegebenen konjugierten Durchmesser, DG′EF′ der um DE gezeichnete Kreis, J ein wie in Fig. 63 konstruierter Punkt der Ellipse, so dass also $\triangle KJ'J \sim \triangle CG'G$ ist. Man ziehe GH und JM parallel zu DE; dann verhält sich: $CH : CG' = KM : KJ'$. Ein um C mit dem Halbmesser CH gezeichneter Kreis schneidet den Radius CJ′ in L. Man kann deshalb in der vorigen Proportion CH und CG′ durch CL bez. CJ′ ersetzen, woraus folgt:

$$CL : CJ' = KM : KJ'.$$

Diese Proportion zeigt, dass L in der Verlängerung von JM liegt. Man ziehe $GO \parallel CG'$ und $CO \parallel G'G$, dann ist, wenn man $CE = a_1$, $CH = b_1$ setzt:

$$GO = CG' = a_1 \quad \text{und} \quad GN = CH = b_1, \quad \text{folglich} \quad NO = a_1 - b_1.$$

Zieht man ebenso $JQ \parallel CJ'$, so ist, weil CQ auch parallel zu J′J:

$$JQ = CJ' = a_1; \quad JP = CL = b_1, \quad \text{folglich:} \quad PQ = a_1 - b_1.$$

Hieraus ergiebt sich, dass der Punkt G die Ellipse durchläuft, wenn die Gerade GO mit den beiden Punkten N und O auf CE bez. CO fortbewegt wird.

Diese Konstruktion, welche ähnlich wie die in (7) angegebene, mittelst eines Papierstreifens ausgeführt werden kann, ist besonders nützlich bei schiefen Projektionen des Kreises, wo in der Regel zwei konjugierte Durchmesser gegeben sind.

23) Es sei FGKL (Fig. 67) ein Quadrat, welches durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte von je zwei gegenüberliegenden Seiten in vier kongruente Quadrate zerlegt ist. Macht man $G\delta = A\gamma$, so treffen sich die beiden Geraden $H\delta$ und $J\gamma$ in einem Punkte ξ, welcher auf dem Umfange des dem Quadrate FGKL einbeschriebenen Kreises liegt.

Fig. 67.

Beweis. $\triangle HG\delta$ ist dem Dreieck $AJ\gamma$ kongruent, weil beide in zwei Seiten: $AJ = HG$ und $A\gamma = G\delta$ und den rechten Winkeln $JA\gamma$ und $HG\delta$ übereinstimmen. Folglich ist

$$\angle HJ\varepsilon = \angle GH\delta.$$

Da nun $HJ \perp GH$, so muss auch $J\xi \perp H\delta$ stehen, folglich liegt der Scheitel des rechten Winkels $H\varepsilon J$ auf dem um HJ als Durchmesser gezeichneten Kreise.

Wird nun das Quadrat FGKL auf eine demselben nicht parallele

Ebene projiciert, so wird die Projektion des einbeschriebenen Kreises eine Ellipse und die des Quadrats ein Tangentenparallelogramm. Das letztere geht in ein Rechteck über, wenn eine Quadratseite parallel zur Projektionsebene ist. Hiernach erkennt man leicht die Richtigkeit der folgenden Konstruktionen der Ellipse aus den Hauptachsen oder zwei konjugierten Durchmessern DE und HJ (Fig. 68 und 69).

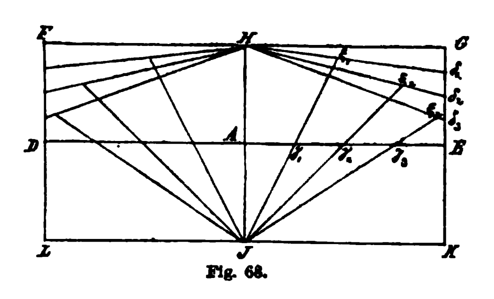


Fig. 68.

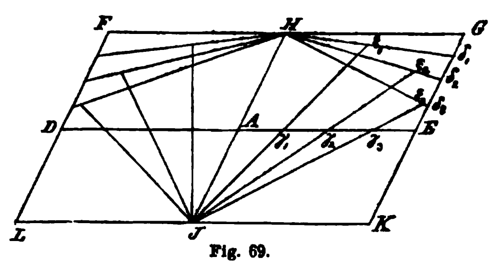


Fig. 69.

Man zeichnet die vier Tangenten in den Endpunkten D, E, J und H, welche nach 12) ein Tangentenparallelogramm oder im ersten Falle ein Rechteck bilden. Nun teile man EG und AE in dieselbe Anzahl gleicher Teile. Zieht man von J aus gerade Linien durch die Teilpunkte γ_1, γ_2, γ_3 . . ., und von H aus durch δ_1, δ_2, δ_3 . . ., so schneiden sich $J\gamma_1$ und $H\delta_1$ in ε_1; $J\gamma_2$ und $H\delta_2$ in ε_2 u. s. f. Die Punkte ε_1, ε_2 . . . gehören nun der gesuchten Ellipse an.

24) Aus der in 3 gegebenen Entstehungsweise der Ellipse leiten wir noch einige andere Eigenschaften der Ellipse ab. Zunächst soll folgender Hülfssatz bewiesen werden:

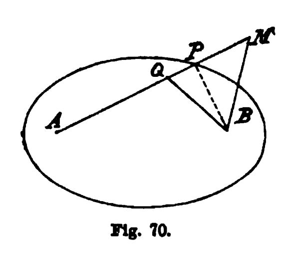


Fig. 70.

Liegt ein Punkt ausserhalb oder innerhalb der Ellipse, so ist die Summe seiner Entfernungen von den Brennpunkten A und B grösser bez. kleiner als 2a (Fig. 70).

Man ziehe von dem ausserhalb liegenden Punkte M die Geraden AM und BM nach den Brennpunkten A und B. Einen der Schnittpunkte dieser und der Ellipse, z. B. P, verbinde man mit dem Brennpunkte B, dann ist:

$$PM + BM > BP.$$

Wird auf beiden Seiten AP addiert, so kommt:

$$AP + PM + BM > AP + BP$$

oder $$AM + BM > 2a.$$

Liegt Q innerhalb, so ziehe man von A die Gerade AQ, bis sie die Ellipse in P trifft und verbinde P und Q mit B, dann ergiebt sich leicht

$$BQ < BP + PQ,$$

und wenn man auf beiden Seiten AQ addiert:

$$AQ + BQ < BP + AQ + PQ$$
$$AQ + BQ < BP + AP$$
$$\text{d. h.} \quad AQ + BQ < 2a.$$

Umgekehrt folgt hieraus: Wenn die Summe der Entfernungen eines Punktes von den beiden Brennpunkten kleiner oder grösser als 2a ist, so liegt der Punkt innerhalb bez. ausserhalb der Ellipse.

25) Die Tangente in einem Punkte M einer gegebenen Ellipse ist die Halbierungslinie des Aussenwinkels desjenigen Dreiecks, welches die von den Brennpunkten A und B nach dem Punkte M gezogenen Strahlen mit der grossen Achse bilden (Fig. 71).

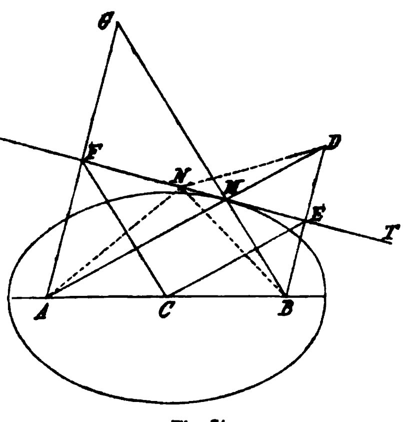


Fig. 71.

Beweis. Es sei MT die Halbierungslinie des Winkels BMD; N ein beliebiger Punkt auf MT, dann ist zu beweisen, dass N ausserhalb der Ellipse liegt. Man verlängere AM um die Strecke MD = BM und ziehe AN, DN und BN; dann ist:

$\triangle DMN \cong BMN$, weil $BM = DM$, $MN = MN$ und $\angle DMN = \angle BMN$. Folglich ist auch $BN = DN$. Ferner ist:

$$AN + DN > AM + DM,$$
$$\text{oder} \quad AN + BN > AM + BM,$$
$$\text{d. h.} \quad AN + BN > 2a.$$

Hieraus ergiebt sich, dass N ausserhalb der Ellipse liegt. Da dasselbe für jeden anderen Punkt der Geraden MT ausser M gilt, so ist dieselbe eine Tangente.

Zieht man noch die Gerade BD, so ist $\triangle BMD$ gleichschenklig. Folglich halbiert die Tangente als Halbierungslinie des Winkels an der Spitze die Grundlinie BD dieses Dreiecks und steht senkrecht zu derselben. Der Punkt D heisst der Gegenpunkt der Tangente MT in Bezug auf den Brennpunkt B. Verlängert man BM um die Strecke GM = AM, so steht auch AG senkrecht zur Tangente MT und wird von der

letzteren halbiert. G ist der Gegenpunkt der Tangente in Bezug auf den Brennpunkt A. Jeder Punkt der Tangente ist von einem Brennpunkte und dem zugehörigen Gegenpunkte gleich weit entfernt.

Ferner ist: $AD = AM + DM = AM + BM = 2a$

und $BG = GM + BM = AM + BM = 2a$.

Jeder Gegenpunkt hat von dem nicht zugehörigen Brennpunkte den Abstand $2a$.

Man löse hiernach noch die beiden Aufgaben:

Von einem Punkte ausserhalb Tangenten an eine Ellipse zu ziehen.

An eine Ellipse Tangenten zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel sind.

26) Fällt man von den beiden Brennpunkten A und B Lote auf eine Tangente, so liegen die Fusspunkte derselben auf dem Hauptkreise der Ellipse.

In Fig. 71 sind AG und BD Senkrechten zur Tangente MT. Es ist nun zu zeigen, dass $CF = CE = a$ ist. Nun sind C und E die Mitten der Seiten AB und BD des Dreiecks ABD, folglich ist $CE = \frac{1}{2} AD$, und da $AD = 2a$ ist, so folgt $CE = a$. Ebenso ist CF als Verbindungslinie der Mitten von AB und AG gleich $\frac{1}{2} BG = a$.

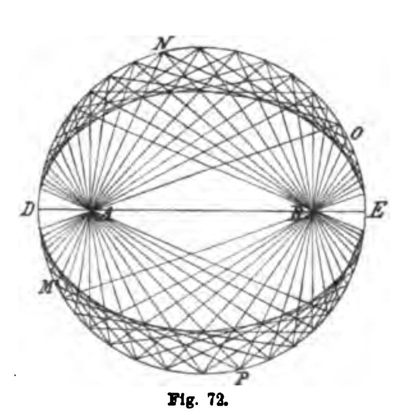


Fig. 72.

Hieraus ergiebt sich die folgende Konstruktion der Ellipse durch einhüllende Tangenten, wenn die grosse Achse DE und die beiden Brennpunkte A und B gegeben sind. Man zeichne um DE den Hauptkreis und ziehe durch die beiden Brennpunkte zwei parallele Geraden MN und OP. Die letzteren kann man als die Lote betrachten, welche man von A und B auf eine Tangente der Ellipse fällen kann. Da aber die Fusspunkte dieser Lote auf dem Hauptkreise liegen, so sind die Verbindungslinien der Punkte N und O, bez. M und P, zwei Tangenten der Ellipse.

Die Parabel.

27) Der geometrische Ort eines Punktes M, welcher von einer festen Geraden AB (Leitlinie oder Direktrix) und von einem gegebenen Punkte F (Brennpunkt) gleiche Abstände hat, heisst eine Parabel (Fig. 73).

Man ziehe durch den Brennpunkt F die Gerade CX senkrecht zur

Leitlinie AB. Zieht man in beliebigem Abstande CG die Gerade HK parallel zu AB und zeichnet um F mit dem Halbmesser CG einen Kreisbogen, so schneidet derselbe HK in den Punkten M und M′, welche beide der Parabel angehören. Da nach dieser Konstruktion MM′ als Sehne des Kreises durch FX halbiert wird, und dasselbe für alle auf einer Senkrechten zu CX liegenden Punkte der Kurve gilt, so folgt hieraus, dass die Parabel durch die Gerade CX in zwei kongruente Teile geteilt wird. Der Punkt S, in welchem die Kurve CX schneidet, liegt der gegebenen Erklärung zufolge in der Mitte zwischen C und F. CX heisst die Achse, S der Scheitel der Parabel. Da die Abstände eines Punktes der Parabel vom Brennpunkt und der Leitlinie beliebig gross gemacht werden können, so erstreckt sich die Kurve ins Unendliche.

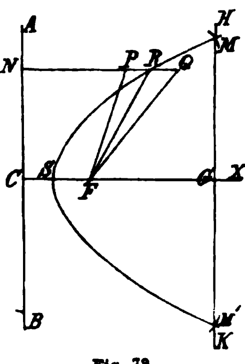


Fig. 73.

Ein Punkt in dem von der Parabel begrenzten Teile der Ebene, welche den Brennpunkt F enthält, heisst ein innerer, und wenn er nicht in diesem Teile liegt, ein äusserer Punkt.

Für einen Punkt, welcher ausserhalb oder innerhalb der Parabel liegt, ist der Abstand vom Brennpunkt grösser bez. kleiner, als von der Leitlinie.

Beweis. P sei ein äusserer Punkt. Man ziehe durch P die Gerade NR parallel zur Achse CX bis an die Parabel und verbinde P und R mit F. Dann ist:

$$PF + PR > RF; \quad RF = NR = NP + PR, \quad \text{folglich auch:}$$
$$PF + PR > NP + PR,$$
also $PF > NP$.

Liegt Q innerhalb der Parabel, so ziehe man QN parallel zu CX und verbinde den Schnittpunkt R mit F. Dann folgt:

$$FQ < FR + QR, \quad \text{und da} \quad FR = RN,$$
$$FQ < RN + QR,$$
oder $FQ < NQ$.

28) Zieht man von einem Punkte M der Parabel eine Gerade nach dem Brennpunkt F und eine Senkrechte MQ zur Leitlinie, so ist die Halbierungslinie des Winkels QMF die Tangente im Punkte M (Fig. 74).

Beweis. Es sei N ein beliebiger Punkt der Halbierungslinie MT des Winkels QMF. Man ziehe QN und fälle von N ein Lot NL auf die Leitlinie AB, dann ist $\triangle FNM \cong \triangle MNQ$, denn $QM = MF$;

MN = MN; $\angle$QMN = $\angle$NMF. Folglich ist auch NQ = NF. Ferner ist NQ > LN, folglich auch NF > LN. Der Punkt N liegt also nach 27) ausserhalb der Parabel, was auch für jeden anderen Punkt der Geraden MT, ausgenommen M, gültig ist. Folglich ist MT die Tangente in M. Da $\angle$QMT = $\angle$MTF, so ist auch $\angle$MTF = $\angle$FMT, folglich $\triangle$ FMT gleichschenklig, FM = FT. Zeichnet man demnach um F als Mittelpunkt einen Kreis, welcher durch M geht, so schneidet derselbe die Achse CX in zwei Punkten T und U. Die Gerade, welche M mit T verbindet, ist die Tangente und MU die Normale für den Punkt M.

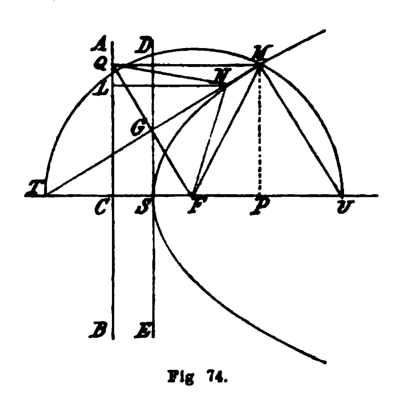


Fig 74.

Wenn man von M die Senkrechte MP zu CX zieht, so ist: CP = QM = MF = FT, also auch CP = FT; ferner ist CS = FS. Subtrahiert man die beiden letzten Gleichungen voneinander, so folgt: CP — CS = FT — FS, oder PS = TS. Hieraus folgt wieder eine sehr einfache Tangentenkonstruktion.

Verbindet man F mit Q, so ist $\triangle$ FMQ gleichschenklig, folglich halbiert TM die Grundlinie QF in G und steht senkrecht zu derselben. Der Punkt Q heisst deshalb der Gegenpunkt der Tangente MT in Bezug auf den Brennpunkt F.

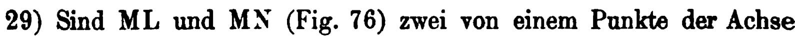
Da $\triangle$ FMT gleichschenklig ist und FG $\perp$ MT, so ist G auch die Mitte der Tangente MT.

Die Tangente im Scheitel S steht senkrecht zur Achse der Parabel, und da TS = PS ist, so geht die Scheiteltangente durch G.

Hieraus ergiebt sich folgende Konstruktion der Parabel durch einhüllende Tangenten (Fig. 75).

Es sei SX die Achse und SY die Scheiteltangente, F der Brennpunkt. Man ziehe durch F die Gerade DF beliebig und durch den Punkt D, in welchem dieselbe SY trifft, eine Senkrechte DE zu DF, dann ist DE eine Tangente der Parabel. Durch Wiederholung dieser Konstruktion kann man beliebig viele Tangenten bestimmen.

Fig. 75.


29) Sind ML und MN (Fig. 76) zwei von einem Punkte der Achse

MX ausgehende Tangenten (welche demnach mit MX gleiche Winkel bilden) und ist S der Scheitel, AB die Scheiteltangente, so ist die Verbindungslinie zweier Punkte H und J, welche auf den beiden ersten Tangenten ML und MN so liegen, dass GH = EJ ist, wiederum eine Tangente der Parabel.

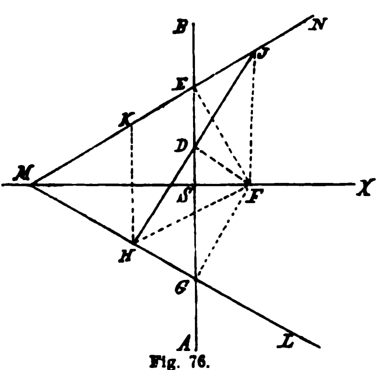


Fig. 76.

Beweis. Ziehe EF ⊥ MN, dann ist F der Brennpunkt. Trifft nun HJ die Scheiteltangente in D, so ist zu zeigen, dass DF ⊥ HJ steht. Man ziehe noch die Hülfslinien FG, FH und JF, ferner HK parallel zu AB, dann ist:

$$\triangle EFJ \cong \triangle FGH,$$

denn EF = FG (F liegt auf der Halbierungslinie des Winkels LMN)

$$EJ = GH$$
$$\angle FGH = \angle FEJ \text{ (R)}$$

folglich ist FH = FJ, und somit △ FHJ gleichschenklig. Ferner ist GH = KE = EJ; folglich, weil HK ∥ DE, auch DH = HJ. Also ist D die Mitte der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks FHJ, folglich DF ⊥ HJ. Hieraus leitet man folgende sehr praktische Konstruktion der Parabel ab, welche auch in der graphischen Statik vielfache Anwendung findet.

Man trage von E aus auf MN und von G aus auf ML zu beiden Seiten eine beliebige Anzahl gleicher Teile ab und verbinde die Teilpunkte $a_1, a_2, a_3 \ldots$ mit $b_1, b_2, b_3 \ldots$, wie in Fig. 77 angegeben ist. Die Verbindungslinien sind dann sämtlich Tangenten der Parabel.

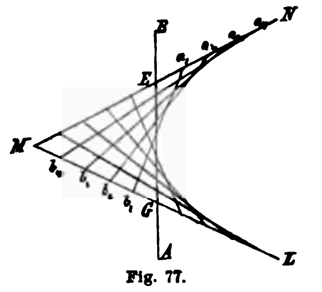


Fig. 77.

30) Folgende Aufgaben lassen sich nach dem vorhergehenden nun leicht lösen.

Von einem Punkte M Tangenten an eine durch Brennpunkt und Leitlinie gegebene Parabel zu ziehen.

An eine Parabel eine Tangente zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel ist.

31) Ein gerader Kreiskegel wird von einer Ebene P, welche einer Seitenlinie des Kegelmantels parallel ist, in einer Parabel geschnitten. Es sei ABS derjenige Achsenschnitt des Kegels, welcher senkrecht zu P

steht, GH die Schnittlinie dieser beiden Ebenen, dann ist GH || AS. KLJ sei die Durchschnittskurve der Ebene P mit dem Kegelmantel. Man lege in den Kegel eine den Mantel in dem Kreise TNO und die Ebene P in dem Punkte F berührende Kugel. Die Ebene Q des Berührungskreises ist parallel zur Grundfläche und senkrecht zum Achsenschnitt ABS. Daher schneidet sie die Ebene P in einer Geraden CD, welche senkrecht zu GH steht. Von einem beliebigen Punkte M der Durchschnittskurve ziehe man nach F und nach S, dann sind diese beiden Geraden Tangenten der Kugel, welche die letztere in F bez. N berühren, folglich ist MF = MN. Zieht man noch ME parallel zu GH, so ist auch ME parallel zu AS und zugleich senkrecht zu CD.

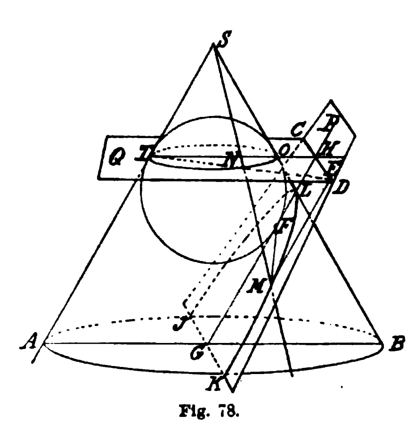


Fig. 78.

Durch AS und ME lässt sich demnach eine Ebene legen, welche Q in der Geraden TE schneidet. Da nun MS auch in dieser Ebene liegt, so geht TE durch den Punkt N, in welchem MS die Ebene Q trifft. — Nun ist $\triangle$ ENM $\sim$ $\triangle$ TNS und da TS = NS, so ist hiernach auch ME = MN. Da nun auch MF = MN ist, so folgt hieraus MF = ME, d. h. der Punkt M (und folglich auch jeder andere Punkt der Durchschnittskurve) hat von dem Punkte F und der Geraden CD gleiche Abstände, woraus hervorgeht, dass der Durchschnitt der Ebene P mit dem Kegelmantel eine Parabel ist.

Betrachtet man die Seitenlinien des Kegelmantels als projicierende Geraden, so ergiebt sich hieraus, dass die Parabel als eine Centralprojektion des Kreises, und umgekehrt der Kreis als eine Centralprojektion der Parabel angesehen werden kann. Eine der projicierenden Geraden ist der Projektionsebene P parallel.

Die Hyperbel.

32) Die Hyperbel ist der geometrische Ort eines Punktes M, für welchen die Differenz seiner Entfernungen von zwei festen Punkten A und B konstant ist (Fig. 79).

Nach dieser Erklärung lassen sich leicht beliebig viele Punkte der Kurve zeichnen. Es sei NO = 2a die gegebene Differenz. Man nehme auf der Verlängerung von NO den Punkt P beliebig, zeichne um A einen Kreisbogen mit NP und um B einen solchen mit OP als Halbmesser.

Die Schnittpunkte M und Q dieser Kreise sind Punkte der Hyperbel. Zeichnet man um B mit NP und um A mit OP als Halbmesser Kreise, so erhält man ein zweites Paar von Punkten M′ und Q′. Durch Veränderung der Lage des Punktes P auf NO kann man so viele Punkte bestimmen, wie zur Zeichnung der Kurve nötig sind.

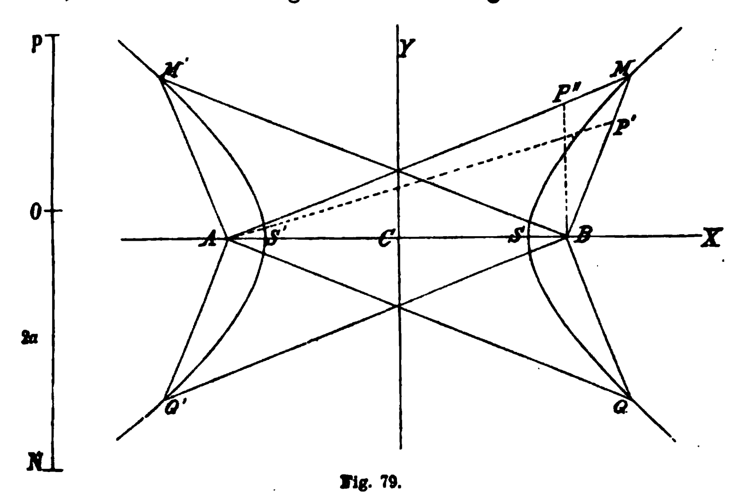


Fig. 79.

Aus der Kongruenz der vier Dreiecke ABM, ABQ, ABM′, ABQ′ ergiebt sich leicht, dass die Punkte M und Q sowie M′ und Q′ symmetrisch in Bezug auf die durch A und B gehende Gerade liegen. Errichtet man ferner in der Mitte C zwischen A, und B die Senkrechte CY zu AB, so liegen auch M, M′ und Q, Q′ paarweise symmetrisch zu CY. Endlich haben die vier Punkte M, M′, Q, Q′ gleichen Abstand von C. Die beiden Geraden CX und CY heissen wegen der angegebenen Eigenschaft die Achsen der Hyperbel, A und B die Brennpunkte. Sind ferner S und S′ diejenigen Punkte der Hyperbel, welche auf AB liegen, so ist: $AS' = BS$; ferner $AS - BS = 2a$ oder $AS - AS' = 2a$, d. h. $SS' = 2a$. Die Entfernung der beiden Punkte S und S′ (die Scheitel der Hyperbel) ist demnach gleich dem konstanten Unterschied der Strahlen, welche von den Brennpunkten nach einem Punkte der Hyperbel gezogen werden können. Man nennt $SS' = 2a$ auch wohl die Hauptachse der Hyperbel.

Da die Entfernungen eines Punktes der Hyperbel von den Brennpunkten beliebig gross gemacht werden können, wenn beide nur den gegebenen Unterschied 2a haben, so folgt hieraus, dass die Kurve nach vier Seiten sich ins Unendliche erstreckt.

Ein Punkt liegt ausserhalb der Hyperbel, wenn er in demjenigen

Teile der Ebene liegt, welcher die Brennpunkte der Hyperbel nicht enthält. Im anderen Falle liegt der Punkt innerhalb der Hyperbel.

33) Liegt ein Punkt ausserhalb oder innerhalb einer Hyperbel, so ist die Differenz seiner Entfernungen von den beiden Brennpunkten kleiner bez. grösser als 2a (Fig. 79).

Beweis. P″ liege ausserhalb. Man ziehe AP″, verlängere dieselbe bis M und verbinde M und P″ mit B; dann hat man:

$$AP'' + P''M - BM = 2a,$$
$$P''M + BP'' > BM;$$
folglich $$AP'' + P''M - (P''M + P''B) < 2a,$$
oder $$AP'' - BP'' < 2a.$$

P′ liege innerhalb. Man ziehe von B durch P′ bis M und verbinde M und P′ mit A; dann folgt:

$$AM - BP' - P'M = 2a;$$
$$AP' + P'M > AM$$
folglich $$AP' + P'M - BP' - P'M > 2a$$
oder $$AP' - BP' > 2a.$$

34) Die Halbierungslinie MT des Winkels, welchen die von den Brennpunkten A und B nach einem Punkte M der Hyperbel gezogenen Geraden mit einander bilden, ist die Tangente in M (Fig. 80).

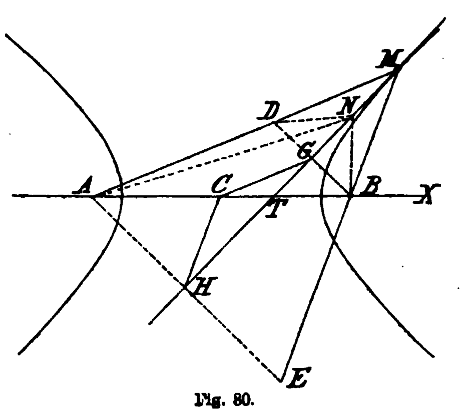


Fig. 80.

Beweis. Es sei N ein beliebiger Punkt auf MT. Man mache DM = BM, dann ist AD = 2a. Zieht man noch AN und DN, so ist:

$$\triangle BMN \cong \triangle DMN,$$

weil DM = BM, MN = MN und $\angle BMN = \angle DMN$. Folglich ist DN = BN. Ferner hat man:

$$AN < AD + DN$$
$$BN = DN$$

woraus durch Subtraktion: $\overline{AN - BN < AD,}$ d. h. $AN - BN < 2a$ sich ergiebt. Folglich liegt N und somit jeder andere Punkt der Geraden MT ausser M, ausserhalb der Hyperbel. Demnach ist MT Tangente in M.

△ BMD ist gleichschenklig, weil BM = DM. Folglich steht die Tangente MT senkrecht zu BD und halbiert letztere. Man nennt des-

halb D den Gegenpunkt der Tangente in Bezug auf den Brennpunkt B. Verlängert man BM um BE = AD, so ist △ AEM gleichschenklig, und MT steht auch senkrecht zu AE und halbiert dieselbe. E ist der Gegenpunkt der Tangente in Bezug auf den Brennpunkt A.

Da BE = AD = 2a ist, so folgt noch: Der Abstand eines Gegenpunktes vom nicht zugehörigen Brennpunkte ist gleich 2a.

Man löse hiernach die folgenden Aufgaben:

Von einem gegebenen Punkte Tangenten an eine gegebene Hyperbel zu ziehen.

An eine Hyperbel Tangenten zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel sind.

35) Da die Tangente MT die Halbierungslinie des Winkels AMB (Fig. 80) ist, so verhält sich nach einem Satze aus der Planimetrie:

$$AT : BT = AM : BM.$$

Für den auf dem rechts liegenden Zweig der Hyperbel befindlichen Punkt M ist der Abstand von dem Brennpunkte A grösser als von B. Folglich ist auch AT > BT. Bezeichnet man BM mit l, so ist AM = l + 2a, und die Proportion kann auch geschrieben werden:

$$\frac{AT}{BT} = \frac{l + 2a}{l} = 1 + \frac{2a}{l}.$$

Hieraus erkennt man, dass mit fortwährend wachsendem l der Bruch $\frac{2a}{l}$ fortwährend abnimmt, $\frac{AT}{BT}$ sich also mehr und mehr der Zahl 1 nähert, und dieselbe erreicht, wenn l unendlich geworden ist. In diesem Falle geht die Tangente durch den Mittelpunkt C, berührt aber die Hyperbel in unendlicher Entfernung. Selbstverständlich existiert noch eine zweite in Bezug auf die Achse CX symmetrisch liegende Tangente von derselben Eigenschaft. Man nennt diese beiden Tangenten die Asymptoten der Hyperbel. Ihre Konstruktion ergiebt sich einfach durch Betrachtung des gleichschenkligen Dreiecks BDM. Die beiden Winkel an der Grundlinie BD werden, wenn M unendlich fern liegt, in rechte Winkel übergehen, folglich wird für diesen Fall auch ∠ADB ein rechter sein.

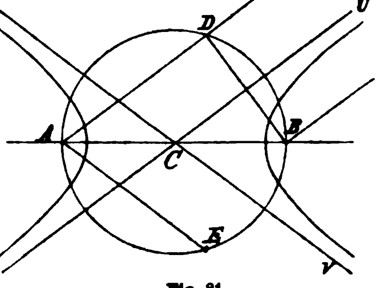


Fig. 81.

Man zeichne um AB, Fig. 81, als Durchmesser einen Kreis, mache AD = AE = 2a und ziehe durch den Mittelpunkt C die Gerade CU

parallel zu AD, CV parallel zu AE, dann sind CU und CV die Asymptoten der Hyperbel.

36) Verbindet man in Fig. 80 die Punkte G und H mit C, so ist CG als Verbindungslinie der Mitten zweier Seiten des Dreiecks ABD gleich $\frac{1}{2}AD = a$. Ebenso ist auch $CH = \frac{1}{2}BE = a$. G und H sind die Fusspunkte der Lote, welche von den Brennpunkten auf die Tangente MT gefällt werden. Hieraus folgt, dass der Ort dieser Fusspunkte der um C mit dem Halbmesser a beschriebene Kreis ist. Man konstruiere hiernach in ähnlicher Weise, wie dies in Fig. 72 für die Ellipse ausgeführt ist, die Hyperbel durch eine Schar einhüllender Tangenten.

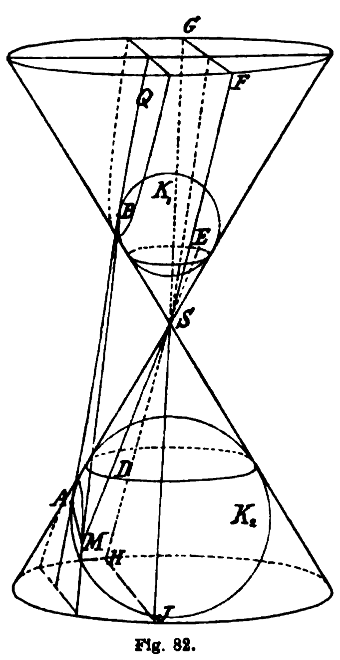


Fig. 82.

37) Wird ein Kegel von einer Ebene Q geschnitten, welche zu zwei Seitenlinien SH und SJ der Mantelfläche parallel ist, so entsteht als Schnittfigur eine Hyperbel (Fig. 82).

Die vollständige Kegelfläche wird von den Seitenlinien zu beiden Seiten der Spitze gebildet. Man lege in die beiden entstandenen Räume Kugeln K_1 und K_2, welche die Kegelfläche in Kreisen, und die Ebene Q in den Punkten A und B berühren. Verbindet man nun einen beliebigen Punkt M der Durchschnittsfigur mit A, B und der Spitze S des Kegels, so ist AM eine Tangente der Kugel K_2; BM Tangente der Kugel K_1 und MS eine gemeinschaftliche Tangente beider Kugeln, welche dieselben in D bez. E berührt. Folglich ist:

$$BM = EM$$
$$AM = DM$$

mithin $BM - AM = EM - DM = DE.$

Die Differenz der Entfernungen des Punktes M von den beiden festen Punkten A und B ist demnach gleich dem Stück der Seitenlinie des Kegels, welches zwischen den beiden Berührungskreisen der Kugeln K_1 und K_2 liegt. Da dasselbe für alle Punkte der Durchschnittskurve gilt, so ist diese nach 32) eine Hyperbel.

Nimmt man wieder die Spitze S als Projektionscentrum an, so erscheint die Hyperbel als eine Centralprojektion des Kreises. Es sind

in diesem Falle zwei projicierende Strahlen SH und SJ mit der Projektionsebene parallel.

38) **Durchschnitt eines geraden Cylinders mit einer Ebene.**

α) Der Cylinder (K_1, K_2) habe eine kreisförmige Grundfläche und stehe auf der ersten Projektionsebene. Die Schnittebene SQR sei senkrecht zur zweiten Projektionsebene. Man soll die Projektionen des Durchschnittes, die wahre Gestalt desselben und die Abwickelung der Mantelfläche zeichnen (Fig. 83).

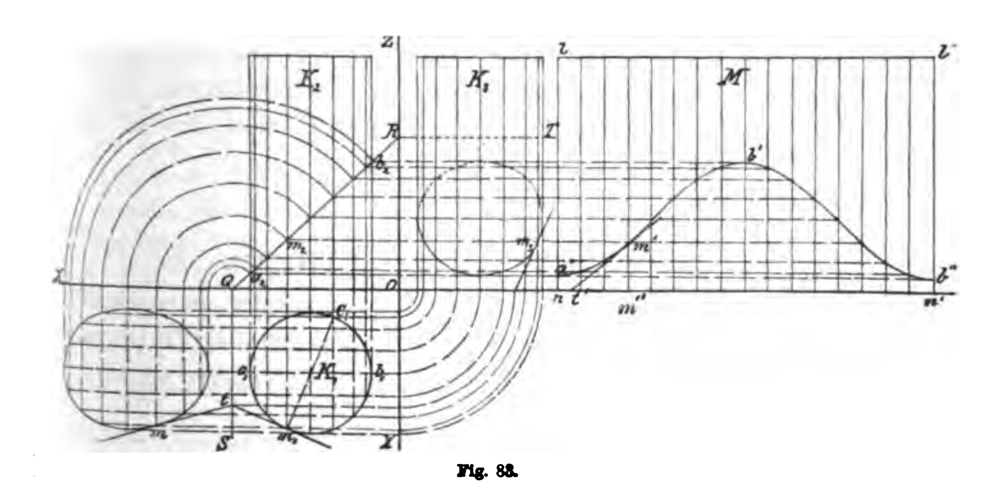


Fig. 83.

Die gesuchte Durchschnittsfigur ist eine Ellipse (s. 4 d. Abschn.), deren erste Projektion mit dem Grundkreis zusammenfällt, und deren zweite Projektion $a_2 b_2$ in der Spur QR liegt. Man teilt den Umfang des Grundkreises in eine Anzahl gleicher Teile (z. B. 16, welche durch fortgesetztes Halbieren leicht zu bestimmen sind). Durch die Teilpunkte ziehe man Seitenlinien auf der Cylinderfläche. Die ersten Projektionen derselben sind jene Teilpunkte des Grundkreises, und die zweiten Projektionen sind Geraden, welche senkrecht zur Achse OX stehen. Diese werden von der Spur QR in Punkten geschnitten, welche die den Teilpunkten des Grundkreises entsprechenden zweiten Projektionen der Durchschnittspunkte sind. Die Bestimmung der dritten Projektion und der wahren Gestalt des Durchschnittes geschieht wie in 1) d. Abschn.

Soll man durch irgend einen Punkt m der niedergeklappten Ellipse eine Tangente ziehen, so kann man die Konstruktion derselben aus der Entstehungsweise der Kurve leicht herleiten. Man ziehe in dem Punkte

m_1, welcher die erste Projektion des Punktes m vor der Drehung der Schnittebene darstellt, die Tangente $m_1 t$ an den Grundkreis, so ist letztere die erste Projektion der gesuchten Tangente vor der Drehung und trifft mit derselben im Punkte t auf der Spur QS zusammen. Da nun bei der Drehung der Ebene der Punkt t seine Lage beibehält und m_1 nach m gelangt, so ist m t die Tangente nach der Niederklappung der Schnittfigur in die erste Projektionsebene. Leicht findet man noch die in Fig. 83 angegebene dritte Projektion $m_3 t_3$ der Tangente.

Die abgewickelte Mantelfläche M des Cylinders ist ein Rechteck, dessen Grundlinie nn' dem Umfang der Grundfläche und dessen Höhe nl der Höhe des Cylinders gleich ist. Die Länge des Kreisumfanges ist nahezu $= 3d + \frac{1}{5}s$, wenn d der Durchmesser der Grundfläche, und s die Sehne eines Viertelkreises ist. Bezeichnet man den Halbmesser mit r, so ist: $s = r\sqrt{2}$,

$$\text{d. h.} \quad s = 1{,}4142135 \ldots r$$
$$\text{also:} \quad \tfrac{1}{5}s = 0{,}2828427 \ldots r$$
$$\text{folglich} \quad 3d + \tfrac{1}{5}s = 6{,}2828427 \ldots r = 3{,}14142135 \ldots d.$$

Da nun der Umfang $= \pi d = 3{,}1415927 \ldots d$ beträgt, so ist die Abweichung des gefundenen Wertes von dem wahren nur $0{,}0001713 \ldots d$; der Fehler ist also kleiner als 0,0002 oder $\frac{1}{5000}$ des Durchmessers, was wohl für alle Fälle genügt.

Die Grundlinie nn' des Mantels teilt man in dieselbe Anzahl von Teilen, wie den Grundkreis des Cylinders, und zieht durch die Teilpunkte die Seitenlinien nach der Abwickelung senkrecht zu nn'. Auf diesen liegen dann die Punkte der abgewickelten Durchschnittskurve in denselben Höhen über nn', wie die entsprechenden zweiten Projektionen über der Achse OX.

Die Tangente für einen Punkt m' der abgewickelten Kurve lässt sich auch leicht bestimmen. Es sei m_1 die erste Projektion des gegebenen Punktes, $c_1 m_1$ ein Durchmesser des Grundkreises. Die Ebene, welche durch die Tangente $m_1 t$ und durch die Seitenlinie in m_1 geht, ist eine Tangentialebene der Cylinderfläche, und diese Ebene erscheint im Grundriss als eine mit $m_1 t$ zusammenfallende Gerade. Schneidet man den Mantel längs der durch c_1 gehenden Seitenlinie auf und breitet denselben derart in jene Tangentialebene aus, dass die Hälften des Mantels zu beiden Seiten dieser Seitenlinie liegen, so werden das Kurvenelement und die Tangente an dasselbe in m ihre Lage behalten. Folglich bildet die

Tangente in m' mit nn' einen Winkel, welcher ihrem Neigungswinkel gegen die erste Projektionsebene gleich ist. Man trage deshalb die Strecke $m_1 t$ aus der ersten Projektion nach $m''t'$ ab und ziehe $m't'$, dann ist die letztere die gesuchte Tangente.

β) Die Schnittebene SQR habe eine beliebige Lage (Fig. 84).

Zieht man auf der Ebene SQR eine Gerade parallel zur Spur QR, so ist deren erste Projektion $m_1 n_1$ parallel zur Achse OX. Projiciert man den Punkt m_1, in welchem diese Gerade die Spur QS trifft, auf die Achse OX nach m_2, so geht von letzterem Punkte die zweite Projektion $m_2 n_2$ der Geraden aus und zwar parallel zur Spur QR. Die Gerade schneidet den Cylinder in zwei Punkten, deren erste Projektionen a_1 und b_1 sind, und deren zweite Projektionen a_2 und b_2 senkrecht über a_1 und b_1 auf $m_2 n_2$ liegen. Auf diese Weise lassen sich beliebig viele Punkte der zweiten Projektion des Durchschnittes bestimmen.

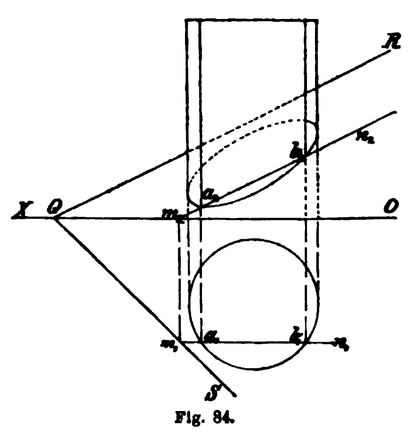


Fig. 84.

Übrigens kann man auch Hülfslinien in der Ebene SQR ziehen, welche parallel zur Spur QS sind, oder sonst eine beliebige Lage haben. Man bestimme noch die Hauptachsen der Durchschnittsellipse und diejenigen ihrer zweiten Projektion.

γ) Die Schnittebene ist durch eine begrenzte Figur, z. B. durch das Dreieck ($a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$) gegeben (Fig. 85).

Die erste Projektion des Durchschnittes fällt wieder mit dem Grundkreis des Cylinders zusammen.

Man zieht in der Ebene des Dreiecks eine beliebige Gerade ($d_1 e_1$, $d_2 e_2$). Dieselbe schneidet den Cylindermantel in zwei Punkten, deren erste Projektionen m_1 und n_1 sind. Die zweiten Projektionen m_2 und n_2 liegen senkrecht über m_1 und n_1 auf $d_2 e_2$.

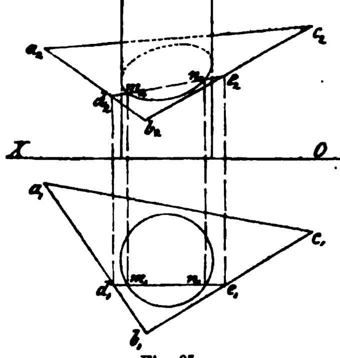


Fig. 85.

Man zeichne noch die wahre Gestalt des Dreiecks mit der darauf liegenden Durchschnittsfigur. Für die Lösung

dieser Aufgabe ist es zweckmässig, die vorhin angewendeten Hülfslinien parallel zur zweiten Projektionsebene anzunehmen, so dass ihre ersten Projektionen, wie $d_1 e_1$, parallel zur Achse OX sind. Warum? Bestimme auch die Hauptachsen der Durchschnittsellipse.

δ) Die Mantelfläche eines mit der Grundfläche auf der ersten Projektionsebene stehenden schiefen Cylinders näherungsweise abzuwickeln.

Wie (1, δ) d. Abschn. zu lösen.

39) Durchschnitt eines Kegels mit einer Ebene.

α) Der Kegel sei gerade, habe eine kreisförmige Grundfläche und stehe mit der letzteren auf der ersten Projektionsebene. Die Schnittebene SQR sei senkrecht zur zweiten Projektionsebene (Fig. 86).

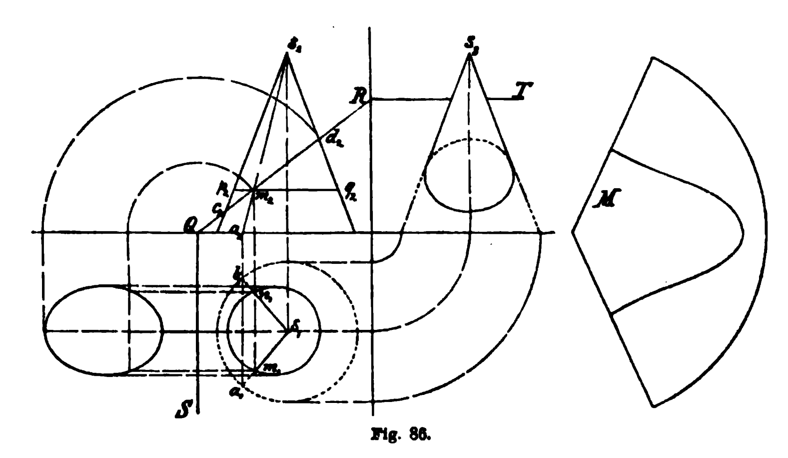


Fig. 86.

Die zweite Projektion der gesuchten Schnittfigur ist eine Gerade $c_2 d_2$, welche mit der Spur QR zusammenfällt. Ferner sei $(a_1 s_1, a_2 s_2)$ eine beliebige Seitenlinie der Kegelfläche. Dieselbe wird von der Ebene SQR in einem Punkte getroffen, dessen zweite Projektion m_2 ist. Die erste Projektion m_1 dieses Punktes liegt senkrecht unter m_2 auf $a_1 s_1$. (Den Projektionen $a_2 s_2$ und m_2 entsprechen ausserdem im Grundriss noch die Seitenlinie $b_1 s_1$ und der Punkt n_1.)

Die erste Projektion m_1 eines Durchschnittspunktes kann auch auf folgende Weise bestimmt werden. Man durchschneidet den Kegel mittelst einer Ebene, welche parallel zur ersten Projektionsebene ist und zugleich durch m_2 geht. Der Durchschnitt ist ein Kreis, dessen zweite Projektion durch die zur Achse OX parallele Gerade $p_2 q_2$ dargestellt wird. Die erste Projektion desselben ist ein um s_1 gezeichneter Kreis vom Durchmesser $p_2 q_2$. Der Kreis wird von der Ebene SQR in zwei Punkten ge-

schnitten, welche dieselbe zweite Projektion m_2 haben, während ihre ersten Projektionen m_1 und n_1 senkrecht unter m_2 auf der ersten Projektion des Durchschnittskreises liegen (s. auch I, 8). Man bestimme nach diesen Angaben die drei Projektionen des Durchschnittes, welcher eine Ellipse ist, und die wahre Gestalt desselben (Hauptachsen).

Die abgewickelte Mantelfläche M ist ein Kreisausschnitt, dessen Radius gleich der Seitenlinie und dessen Bogenlänge dem Umfang der Grundfläche des Kegels gleich ist. Man zeichne hiernach näherungsweise die Mantelfläche mit der Durchschnittskurve nach der Abwickelung.

β) Die Schnittebene SQR hat eine beliebige Lage (Fig. 87).

Anl. zur Aufl. Man durchschneide den Kegel und die Ebene SQR mittelst Hülfsebenen, welche der Grundfläche des Kegels parallel sind. Die zweite Spur einer solchen Ebene sei die zur Achse OX parallele Gerade $a_2 b_2$. Diese Ebene schneidet SQR in einer Geraden, welche der Spur SQ parallel ist. Die zweite Projektion derselben fällt mit $a_2 b_2$ zusammen; die erste Projektion $a_1 b_1$ findet man, wenn man b_2 auf OX nach b_1 projiciert und $b_1 a_1$ parallel zu QS zieht.

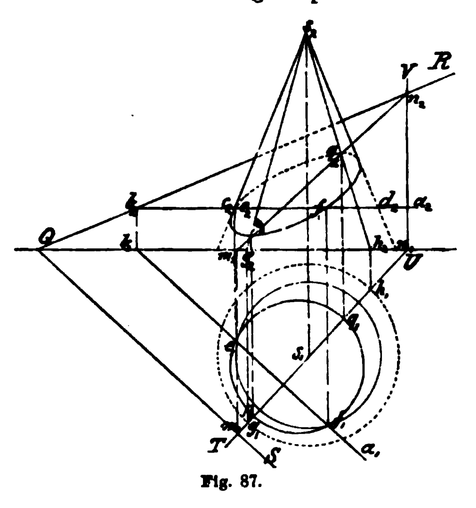


Fig. 87.

Die Hülfsebene schneidet ferner den Kegel in einem Kreise vom Durchmesser $c_2 d_2$, dessen erste Projektion der um s_1 als Mittelpunkt gezeichnete Kreis von derselben Grösse ist. Der letztere wird nun von $a_1 b_1$ in den Punkten e_1 und f_1 geschnitten, und diese sind die ersten Projektionen von zwei Punkten der Durchschnittskurve. Die zweiten Projektionen e_2 und f_2 liegen senkrecht über e_1 und f_1 auf $c_2 d_2$.

Man kann auch durch die Spitze des Kegels Hülfsebenen legen, welche senkrecht zur ersten Projektionsebene stehen. Ist die durch s_1 gehende Gerade TU die erste, UV ($\perp$ OX) die zweite Spur einer solchen Ebene, so schneidet dieselbe den Kegel in den beiden Seitenlinien ($g_1 s_1$, $g_2 s_2$) und ($h_1 s_1$, $h_2 s_2$). Ferner schneidet sie die Ebene SQR in der Geraden ($m_1 n_1$, $m_2 n_2$), deren erste Projektion $m_1 n_1$ mit TU zusammenfällt. $m_2 n_2$ schneidet nun die zweiten Projektionen jener Seitenlinien in den Punkten p_2 und q_2, welche der zweiten Projektion der

gesuchten Durchschnittskurve angehören. Die ersten Projektionen p_1 und q_1 liegen senkrecht unter p_2 und q_2 auf TU.

Steht TU senkrecht zu SQ, so erkennt man leicht, dass e_2f_2 von TU halbiert wird. Die zweite Projektion der Durchschnittskurve wird deshalb durch TU in diesem Falle in zwei kongruente Teile geteilt, folglich liegt eine der Hauptachsen der Kurve (welche bei der in Fig. 81 angenommenen Lage der Ebene SQR eine Ellipse ist) in TU. Man konstruiere nach diesen Angaben die Hauptachsen der Ellipse.

γ) Die Schnittebene SQR sei senkrecht zur zweiten Projektionsebene und parallel zur Seitenlinie (a_1s_1, a_2s_2), Fig. 88.

δ) Die Schnittebene SQ sei parallel zur zweiten Projektionsebene (Fig. 89).

Beide Aufgaben löst man am einfachsten durch Ebenen, welche parallel zur ersten Projektionsebene sind. Im ersten Falle erhält man eine

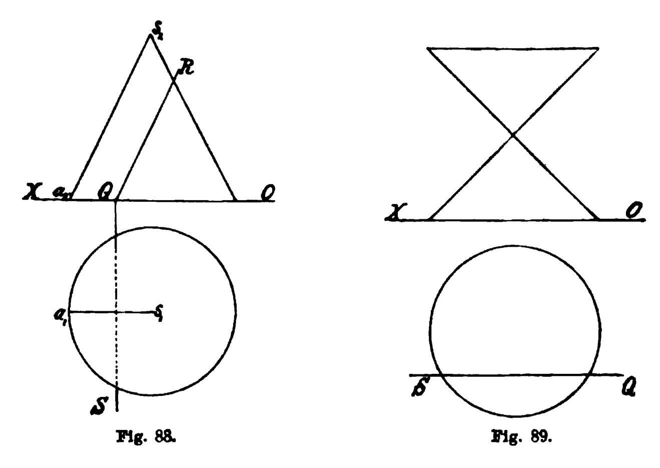


Fig. 88. Fig. 89.

Parabel, deren wahre Gestalt durch Niederklappung der Schnittebene um die Spur QS in die erste Projektionsebene bestimmt wird. Im zweiten Fall wird auch die über die Spitze hinaus erweiterte Kegelfläche von der Schnittebene getroffen. Der Durchschnitt ist in diesem Falle eine Hyperbel, deren wahre Gestalt man in ihrer zweiten Projektion erhält.

ε) Den Durchschnitt eines schiefen Kegels mit einer Ebene kann man ebenfalls nach einer der vorhin angegebenen Methoden finden. Soll auch die wahre Gestalt des Durchschnittes bestimmt werden, so bedient man sich am besten des in (IV, 1δ) angegebenen Verfahrens.

40) Den Durchschnitt einer Kugel mit einer Ebene zu finden (Fig. 90).

Es seien die Kreise K_1 und K_2 die beiden Projektionen der Kugel und SQR die gegebene Ebene. Man lege durch beide eine Hülfsebene TU, welche parallel zur ersten Projektionsebene ist. Dieselbe schneidet die Kugel in einem Kreise vom Durchmesser a_2b_2, dessen erste Projektion ein um c_1 als Mittelpunkt gezeichneter Kreis von demselben Durchmesser ist. Die Schnittlinie der Ebenen SQR und TU ist parallel zur Spur SQ. Ihre zweite Projektion m_2n_2 fällt mit TU zusammen und die erste m_1n_1 ist parallel zu QS; sie wird leicht durch das von m_2 auf OX gefällte Lot m_2m_1 bestimmt. Die wahre Gestalt der Durchschnittskurve ist, wie aus der Stereometrie bekannt, ein Kreis, dessen beide Projektionen Ellipsen sind. Man bestimme den wahren Durchmesser des Kreises und die Hauptachsen der beiden Projektionen.

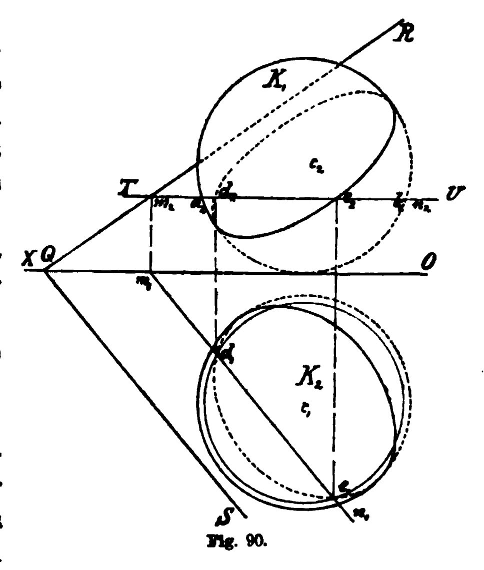


Fig. 90.

41) Die in 40) angewandte Konstruktion ist allgemein gültig für den Durchschnitt von Umdrehungsflächen mit einer Ebene, wenn die Umdrehungsachse senkrecht zu einer der Projektionsebenen ist.

Es soll der Durchschnitt einer Ebene mit einem Umdrehungsellipsoid bestimmt werden (Fig. 91).

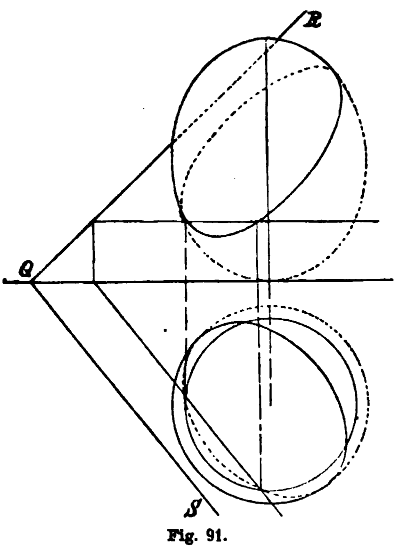


Fig. 91.

Diese Fläche wird von einer Ellipse beschrieben, welche sich um eine der Hauptachsen dreht. In Fig. 91 ist die senkrecht zur ersten Projektionsebene stehende grosse Achse der Ellipse als Umdrehungsachse angenommen. Jeder Punkt des Umfanges der Ellipse beschreibt einen Kreis, dessen Radius der Abstand des Punktes von der Drehachse ist. Hiernach ist

jeder Schnitt, welcher senkrecht zur Drehachse steht, ein Kreis, und der grösste dieser Kreise hat die halbe kleine Achse der Ellipse zum Halbmesser. Die erste Projektion des Ellipsoids ist offenbar ein Kreis von dieser Grösse. Jeder Schnitt, welcher durch die Achse des Ellipsoids (Meridianschnitt) geht, ist eine der ursprünglichen gleiche Ellipse. Leicht ergiebt sich hieraus, dass jede durch den Mittelpunkt dieser Ellipse gehende Gerade, welche von der Oberfläche des Ellipsoids begrenzt ist, in jenem Punkte halbiert wird; derselbe ist folglich der Mittelpunkt des Ellipsoids. Ähnliches gilt für dasjenige Ellipsoid, welches durch Drehung der Ellipse um ihre kleine Achse entsteht.

Der Durchschnitt einer beliebigen Ebene SQR mit dem Ellipsoid wird nun genau wie in 40) konstruiert. — Die Ausführung, welche in Fig. 91 angedeutet ist, bedarf keiner weiteren Erklärung.

42) Durchschnitt einer Ringfläche mit einer Ebene (Fig. 92).

Eine Ringfläche entsteht, wenn eine geschlossene Kurve um eine ausserhalb der Kurve, aber in der Ebene derselben liegende Gerade gedreht wird. Die Kurve sei ein Kreis, und die Drehachse stehe senkrecht zu P_1.

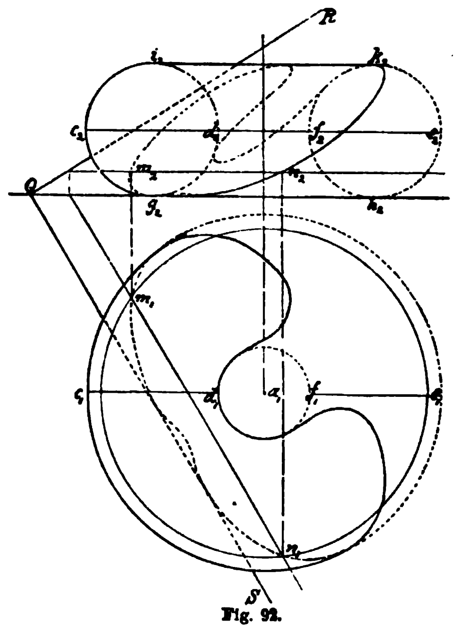


Fig. 92.

Die erste Projektion des Ringes wird von den Projektionen der beiden Kreise begrenzt, welche die Endpunkte c_1 und d_1 desjenigen Durchmessers des rotierenden Kreises beschreiben, welcher senkrecht zur Drehachse steht. Die erste Projektion des rotierenden Kreises erscheint bei allen Lagen desselben als gerade Linie, welche verlängert durch den Punkt a_1, die erste Projektion der Drehachse, geht. Sind $c_1 d_1$ und $e_1 f_1$ die beiden zu P_2 parallelen Lagen dieser Projektion, so erscheinen die zweiten Projektionen des Kreises in wahrer Gestalt, und die äusseren Hälften $i_2 c_2 g_2$, $k_2 e_2 h_2$ gehören dem äusseren Umrisse der zweiten Projektion der Ringfläche an. Die letztere wird ausserdem von den beiden Geraden $g_2 h_2$ und $i_2 k_2$ begrenzt, welche die Projektionen der von den Punkten i_2 und g_2 beschriebenen Kreise sind.

Den Durchschnitt irgend einer Ebene SQR mit der Ringfläche findet man, wie bei den vorhergehenden Beispielen, indem man beide mit Ebenen durchschneidet, welche parallel zur ersten Projektionsebene sind. Jede derartige Ebene schneidet, wie aus der Entstehungsweise der Ringfläche hervorgeht, die letztere in zwei Kreisen, und SQR in einer zu SQ parallelen Geraden, wodurch sich im allgemeinen vier Schnittpunkte ergeben. —

Von Interesse ist es, die Gestalt der Durchschnittskurve für einige besondere Lagen der Schnittebene kennen zu lernen. In Fig. 93 sind die beiden Projektionen der einen auf P_1 liegenden Ringhälfte dargestellt, wenn die vordere Abschnittsfläche, welche aus zwei Kreisen besteht, parallel zu P_2 ist. Es sei MN eine Ebene, welche parallel zur zweiten Projektionsebene liegt. Diese schneidet den Ring in einer Kurve, deren erste Projektion die Gerade $c_1 d_1$ ist. Um die zweite Projektion dieser Kurve zu finden, durchschneidet man wieder den Ring mittelst einer zu P_1 parallelen Ebene EF. Der Durchschnitt ist ein Halbkreis, dessen zweite Projektion die mit EF zusammenfallende Gerade $g_2 h_2$ ist. Die erste Projektion ist der um a_1 beschriebene Halbkreis $g_1 i_1 h_1$, wenn g_1 und h_1 senkrecht unter g_2 und h_2 liegen. Dieser Kreis wird nun von MN in den Punkten k_1 und l_1 geschnitten, welche die Projektionen von zwei Punkten der gesuchten Durchschnittskurve sind. Die zweiten Projektionen k_2 und l_2 dieser Punkte liegen senkrecht über k_1 und l_1 auf $g_2 h_2$. Auf diese Weise konstruiert man beliebig viele Punkte der Kurve. Leicht erkennt man, dass $g_1 i_1 h_1$ auch die erste Projektion eines zweiten Kreises der Ringfläche ist, welcher in gleicher Entfernung von der Mitte unterhalb derselben liegt, wodurch sich dann leicht zwei neue Punkte des Durchschnittes ergeben.

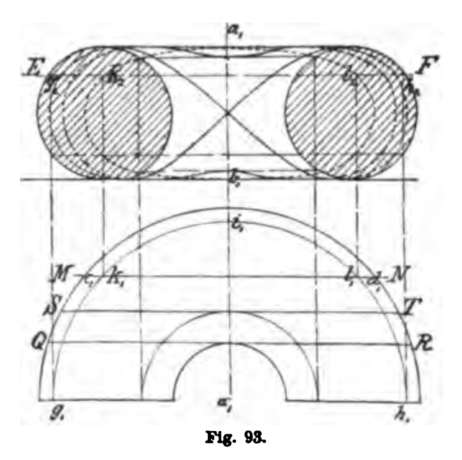


Fig. 93.

In Fig. 93 sind noch zwei zu MN parallele Schnitte angegeben, welche in der zweiten Projektion in wahrer Gestalt erscheinen. Die Schnittebene QR berührt den inneren kleinsten Kreis der Ringfläche; in diesem Falle hat die Durchschnittskurve eine schleifenförmige Gestalt (Lemniskate). Sie erscheint in ihren Mitten etwas eingedrückt, wenn die

Schnittebene der vorigen sich nähert; dagegen ähnelt sie der Ellipse, wenn dieselbe von QR um den Halbmesser des rotierenden Kreises oder mehr entfernt liegt.

Zu weiteren Beispielen über den Durchschnitt einer Ebene mit Undrehungsflächen kann man noch die beiden in Fig. 94 durch ihre zweiten

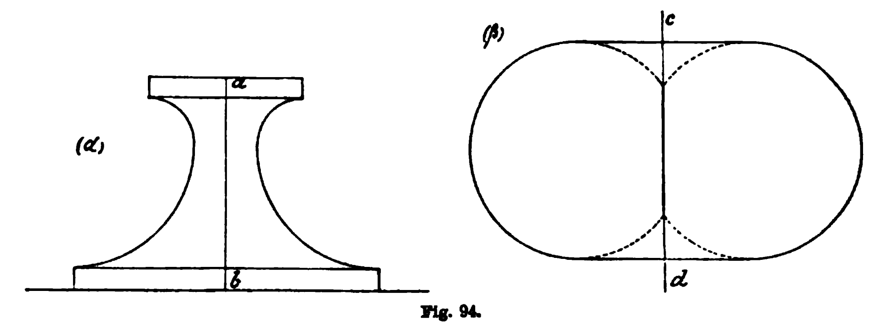


Fig. 94.

Projektionen dargestellten Flächen benutzen, deren Drehachsen die Geraden **ab** bez. **cd** sind. Ebenso kann man auch die Flächen verwenden, welche durch Drehung einer Parabel oder einer Hyperbel um eine Hauptachse entstehen.

V. Abschnitt.

Die Durchdringungen.

Mit dem Namen „Durchdringungen“ bezeichnet man in der darstellenden Geometrie diejenigen Durchschnittsfiguren, welche entstehen, wenn zwei oder mehrere Körper sich durchschneiden. Dieselben kommen in den praktischen Anwendungen der darstellenden Geometrie sehr häufig vor; es ist deshalb von der grössten Wichtigkeit, dass der Anfänger sich mit den Methoden, welche zur Ermittelung dienen, vollständig vertraut macht. Ausserdem bildet das sorgfältige Studium der Durchdringungen eines der vorzüglichsten Hülfsmittel zur Förderung der räumlichen Vorstellungskraft.

Die Durchdringungen solcher Körper, welche von ebenen Flächen begrenzt sind, werden lediglich mit Hülfe der Aufgabe (III, 18) bestimmt. Es ist auch hier von Vorteil, mit den einfachsten Fällen zu beginnen.

1) Durchschnitt zweier geraden dreiseitigen Prismen, welche auf P_1 liegen (Fig. 95).

Es seien K_1 und K_2 die beiden Projektionen des einen, K_1' und K_2' die Projektionen des anderen Prisma's. Die Grundflächen des letzteren sind parallel zu P_2 angenommen, so dass die zweiten Projektionen derselben durch das Dreieck $a_2b_2c_2$ dargestellt werden. In der ersten Projektion erscheinen diese Grundflächen als die Geraden $a_1b_1c_1$ und $d_1e_1f_1$, und die Kanten a_1d_1, b_1e_1 und c_1f_1 stehen senkrecht zur Achse. Unter dieser Voraussetzung fallen die zweiten Projektionen der Seitenflächen dieses Prisma's mit den Seiten des Dreiecks $a_2b_2c_2$ zusammen.

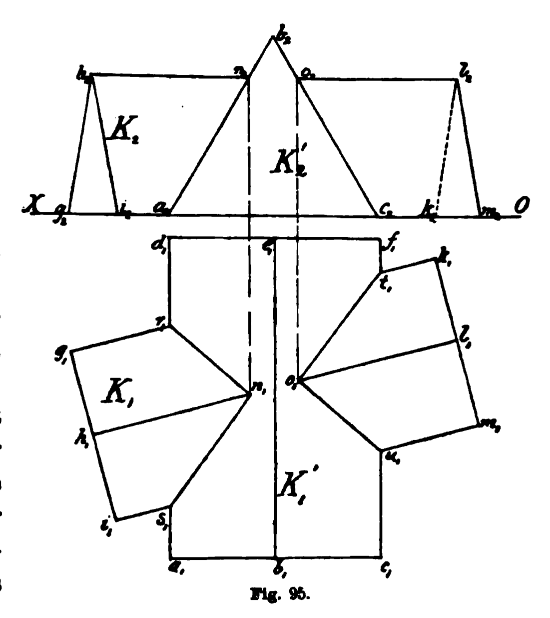


Fig. 95.

Es ist nun leicht ersichtlich, dass die vier auf P_1 liegenden Kanten der beiden Prismen sich in den Punkten r_1, s_1, t_1 und u_1 durchschneiden. Ferner trifft die Kante (h_1l_1, h_2l_2) die Seitenfläche des Prisma's $(K_1'K_2')$ in zwei Punkten, deren zweite Projektionen n_2 und o_2 gegeben sind. Die ersten Projektionen n_1 und o_1 liegen senkrecht unter n_2 und o_2 auf h_1l_1. Die Durchschnittsfigur besteht aus den Geraden r_1n_1, n_1s_1, o_1t_1, o_1u_1, deren zweite Projektionen wieder mit a_2b_2 bez. b_2c_2 zusammenfallen.

2) Die Durchdringung zu ermitteln, wenn in der vorigen Aufgabe statt des dreiseitigen Prisma's (K_1', K_2') ein solches gegeben ist, dessen Grundfläche ein halbes regelmässiges Achteck bildet (Fig. 96).

Die Seitenflächen des Prisma's (K_1', K_2') erscheinen in der zweiten Projektion als gerade Linien, welche mit a_2b_2, b_2c_2, c_2d_2, d_2e_2 zusammenfallen. Man findet deshalb die beiden Punkte, in welchen die Kante (m_1p_1, m_2p_2) dieses Prisma schneidet, zunächst im Aufriss in s_2 und v_2, deren erste Projektionen s_1 und v_1 auf m_1p_1 liegen. Der Einschnitt, welchen K_1 auf der Seitenfläche $a_1b_1g_1f_1$ macht, ist leicht zu bestimmen, wenn man sich die letztere erweitert denkt. Die zweite Projektion a_2b_2

dieser Seitenfläche wird verlängert, bis sie von $m_2 p_2$ in u_2 getroffen wird. Die erste Projektion u_1 dieses Punktes liegt senkrecht unter u_2 auf $m_1 p_1$.

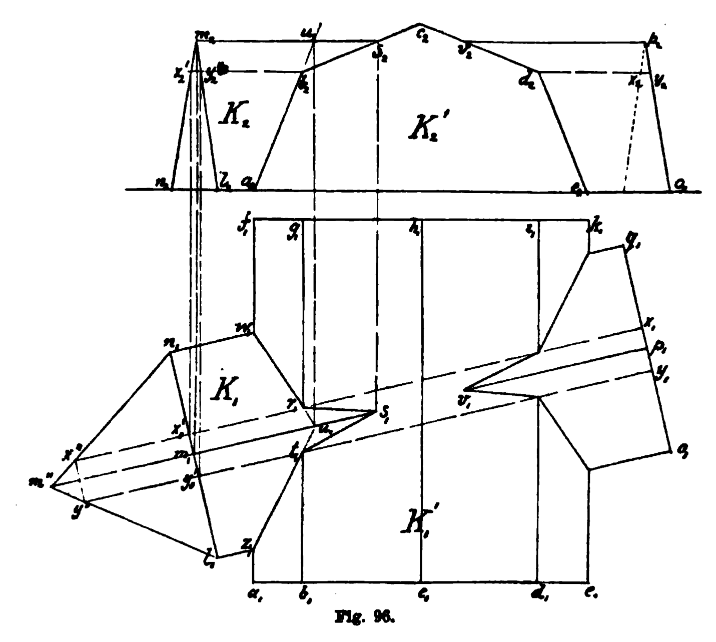


Fig. 96.

Hieraus erkennt man leicht, dass K_1 die erweiterte Seitenfläche $a_1 b_1 g_1 f_1$ in dem Dreiecke $w_1 u_1 z_1$ schneiden wird, von welchem aber der Teil $r_1 u_1 t_1$ ausserhalb $a_1 b_1 g_1 f_1$ liegt, also wieder hinwegfällt. Von r_1 und t_1 gehen noch zwei Schnittlinien nach s_1. Der übrige Teil der Durchdringung ist in gleicher Weise zu finden.

Die beiden Punkte r_1 und t_1 lassen sich auch folgendermassen bestimmen. Man lege durch die Kante, deren erste Projektion $b_1 g_1$ ist, eine Ebene, welche parallel zur Horizontalebene ist. Dieselbe erscheint in der zweiten Projektion als eine zur Achse OX parallele Gerade, welche durch b_2 geht, und sie schneidet das Prisma $(K_1 K_2)$ in einem Rechtecke, dessen Ecken x_2', y_2', x_2, y_2 im Aufriss in jener Geraden liegen. Die erste Projektion $x_1' y_1' x_1 y_1$ des Rechtecks ergiebt sich leicht durch die beiden projicierenden Geraden $x_1' x_2'$ und $y_1' y_2'$. Die Seiten $x_1 x_1'$ und $y_1 y_1'$ sind parallel zu $m_1 p_1$; sie werden von $b_1 g_1$ in den gesuchten Punkten r_1 und t_1 geschnitten.

Es kann vorkommen, dass die beiden projicierenden Geraden $x_1' x_2'$ und $y_1' y_2'$ die Gerade $n_1 l_1$ unter sehr spitzem Winkel treffen, wodurch die Punkte x_1' und y_1' nicht deutlich genug bestimmt erscheinen. In

diesem Falle klappe man die Grundfläche $m_1 l_1 n_1$ des Prisma's K_1 in die erste Projektionsebene nieder. Sie erhält die Lage $m'' l_1 n_1$, wo $m'' m_1$

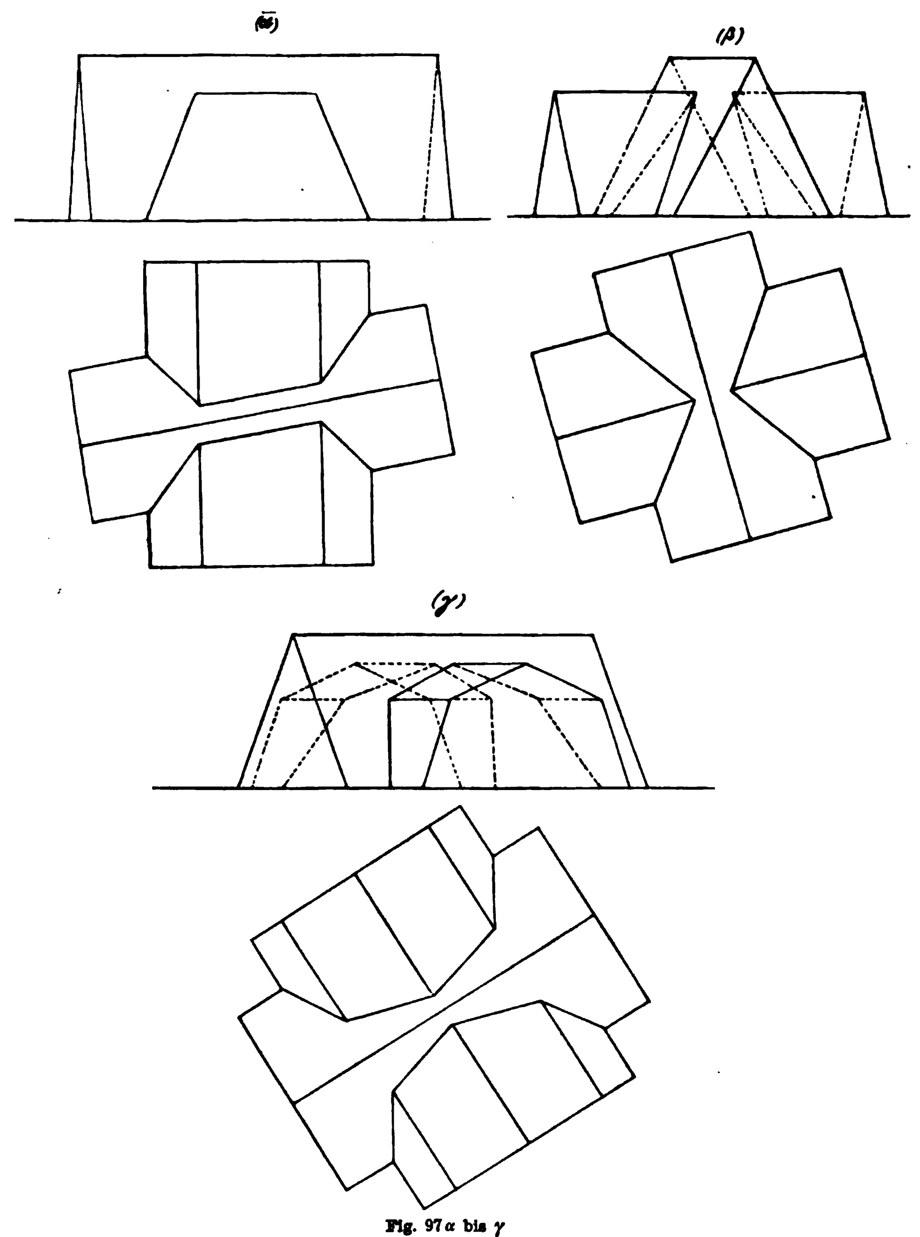


Fig. 97 α bis γ

gleich der aus der zweiten Projektion zu entnehmenden Höhe des Dreiecks $m_2 l_2 n_2$ ist.

Das Dreieck $m'' l_1 n_1$ ist nun parallel zu seiner Grundlinie $n_1 l_1$ durch die Gerade $x'' y''$, deren Abstand von $n_1 l_1$ gleich der Höhe von $x_2' y_2'$ über OX ist, zu durchschneiden. Hierdurch erhält man die Punkte x'' und y''. Bei der Drehung des Dreiecks $m'' l_1 n_1$ um $n_1 l_1$ in die frühere Lage beschreiben x'' und y'' Kreisbögen, deren Projektionen die zu $l_1 n_1$ Senkrechten $x'' x_1'$ und $y'' y_1'$ sind. Hierdurch erhält man die Punkte x_1' und y_1' ebenfalls.

Die oben gegebenen Erläuterungen sind auch auf die Ermittelung der in den Figuren 97, (α), (β) und (γ) dargestellten Durchdringungen anwendbar, welche wir der eigenen Übung überlassen.

3) Durchschnitt eines dreiseitigen Prisma's mit einer Pyramide (Fig. 98).

Das Prisma liegt mit einer Seitenfläche, und die Pyramide steht mit einer Grundfläche (welche in Fig. 98 als Quadrat angenommen ist) auf der ersten Projektionsebene. Um den Punkt zu bestimmen, in welchem die Kante ($k_1 n_1$, $k_2 n_2$) die Seitenfläche ($a_1 b_1 e_1 h_1$, $a_2 b_2 e_2 h_2$) trifft, legt man durch jene Kante eine Ebene, welche senkrecht zu P_1 steht. Dieselbe schneidet diese Seitenfläche in einer Geraden, deren erste Projektion $u_1 v_1$ mit $k_1 n_1$ zusammenfällt. Die zweite Projektion der Schnittlinie, nämlich $u_2 v_2$, erhält man leicht durch die projicierenden Geraden $u_1 u_2$, $v_1 v_2$. Der Schnittpunkt p_2, in welchem $u_2 v_2$ von $k_2 n_2$ getroffen wird, ist nun die zweite Projektion des gesuchten Durchschnittspunktes, dessen erste Projektion p_1 senkrecht unter p_2, auf $k_1 n_1$ liegt.

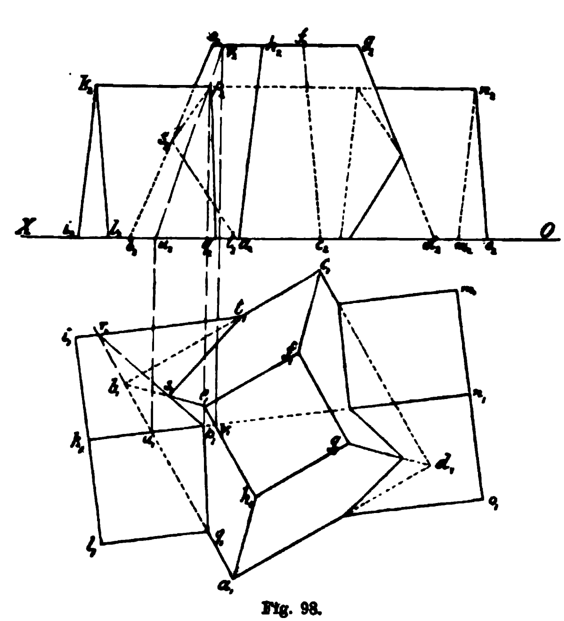


Fig. 98.

$a_1 b_1$ ist die erste Spur der Seitenfläche $a_1 b_1 e_1 h_1$. Denkt man sich

die letztere erweitert ($a_1 b_1$ also verlängert), so schneidet das Prisma diese Fläche in einem Dreieck, dessen erste Projektion $p_1 q_1 r_1$ ist. (q_1 und r_1 sind die Schnittpunkte von $a_1 b_1$ mit $l_1 o_1$ bez. $i_1 m_1$.) Da aber die Seitenfläche der Pyramide an $b_1 e_1$ aufhört, so fällt von der Schnittlinie $p_1 r_1$ ein Teil, nämlich $r_1 s_1$ wieder fort, und von s_1 geht noch eine Durchschnittslinie nach dem Punkte t_1, in welchem $i_1 m_1$ die Kante $b_1 c_1$ schneidet. Der andere Teil der Durchdringung ist ebenso zu ermitteln. Auch die Bestimmung der zweiten Projektion ist leicht und kann der eigenen Übung überlassen werden.

4) Durchschnitt zweier geraden Prismen, wenn das eine mit der Grundfläche auf der ersten Projektionsebene steht (Fig. 99).

Anl. zur Aufl. Das fünfseitige Prisma (K_1, K_2) steht auf P_1, und das vierseitige Prisma (M_1, M_2) liege so, dass seine Grundflächen senkrecht und die den letzteren nicht angehörigen Kanten parallel zu P_1 sind. Man erweitere nun eine der Seitenflächen von K, z. B. diejenige, deren erste Projektion die Gerade $a_1 b_1$ ist, so weit, bis das andere Prisma von dieser vollständig durchschnitten wird. Die Kanten des Prisma's M werden in vier Punkten getroffen, deren erste Projektionen $e_1 f_1 g_1$ und h_1 sich unmittelbar ergeben, und deren zweite Projektionen $e_2 f_2 g_2$ und h_2 leicht bestimmt werden können.

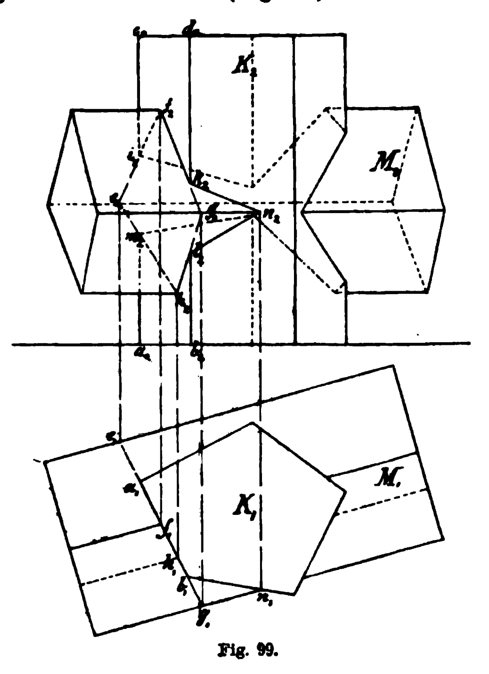


Fig. 99.

Soweit nun das hieraus sich ergebende Viereck $e_2 f_2 g_2 h_2$ innerhalb $a_2 b_2 c_2 d_2$ liegt, gehört dasselbe der zweiten Projektion des gesuchten Durchschnittes an.

In gleicher Weise konstruiere man den in Fig. 100 dargestellten Durchschnitt eines geraden Prisma's, welches auf P_1 steht, mit einer Pyramide. Bestimme die Abwickelung der Mantelfläche der Pyramide mit den darauf liegenden Durchschnittslinien.

Ferner stelle man Fig. 99 und 100 durch schiefe Projektionen dar.

5) Durchschnitt eines geraden dreiseitigen Prisma's und eines halben Cylinders, wenn beide Körper auf P_1 liegen (Fig. 101).

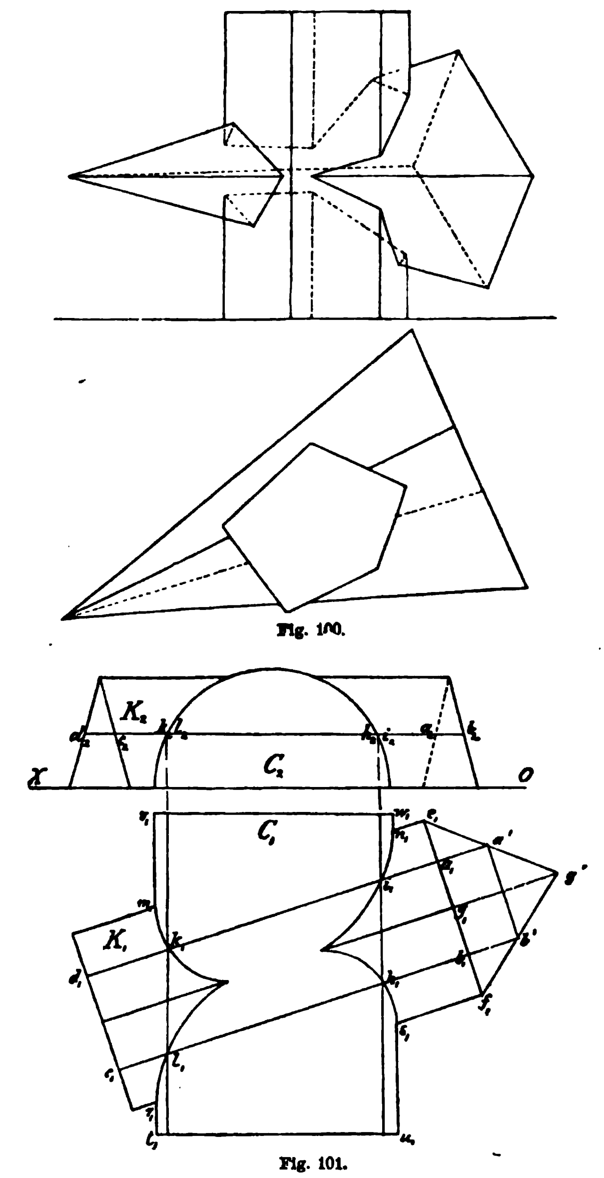


Fig. 100.

Fig. 101.

Der Cylinder liegt auf P_1 so, dass seine Achse senkrecht zu OX steht; die zweite Projektion desselben ist demnach der Halbkreis C_2. Man

durchschneidet wie in (2) d. Abschn. beide Körper mit Ebenen, welche parallel zu P_1 sind. Das Prisma wird in einem Rechteck geschnitten, dessen zweite Projektion $a_2 b_2 c_2 d_2$ eine zur Achse OX parallele Gerade ist, und dessen erste Projektion $a_1 b_1 c_1 d_1$ wie in Fig. 96 bestimmt wird. Die Cylinderfläche wird in zwei Seitenlinien geschnitten, deren zweite Projektionen die Punkte h_2 und l_2 sind. Diese schneiden jenes Rechteck

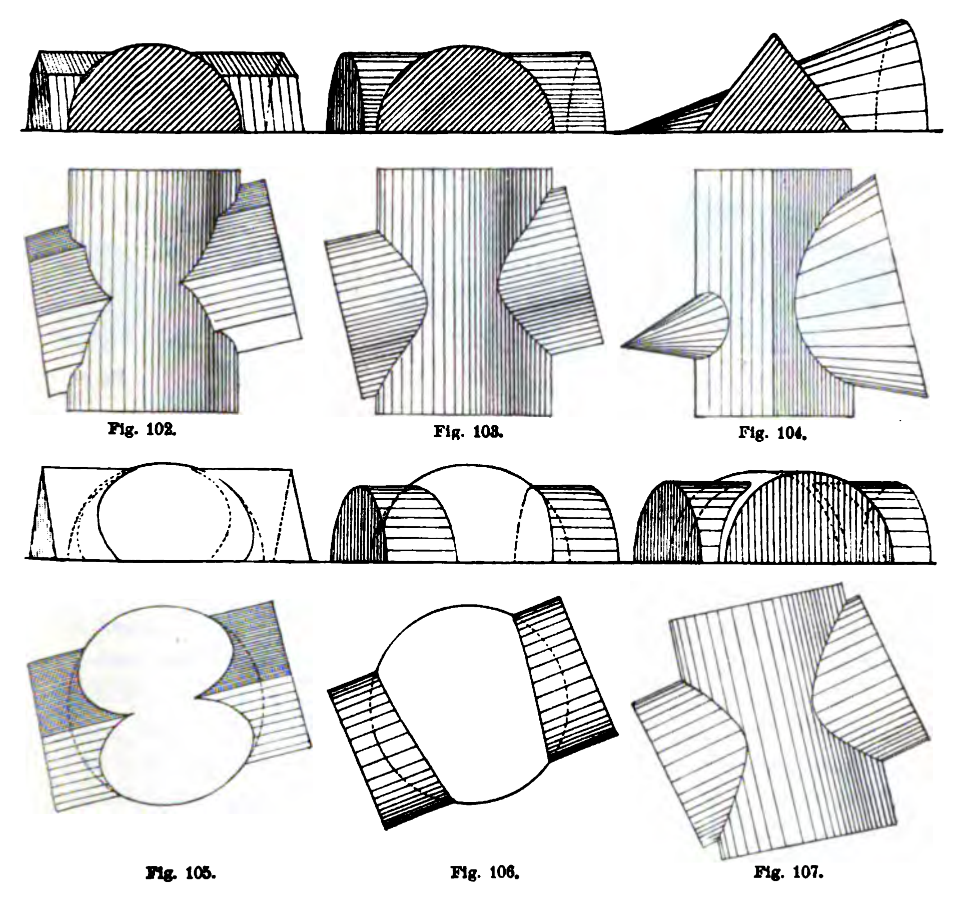


Fig. 102. Fig. 103. Fig. 104.

Fig. 105. Fig. 106. Fig. 107.

in vier Punkten, welche dem gesuchten Durchschnitt angehören. Die ersten Projektionen derselben liegen in h_1, i_1, k_1, l_1 senkrecht unter h_2 und l_2. Auf diese Weise lassen sich beliebig viele Punkte des Durchschnittes bestimmen. Die auf den Seitenflächen des Prisma's liegenden Kurven sind Teile von Ellipsen. Die letzteren berühren in m_1, n_1, r_1 und s_1 die beiden Seitenlinien $v_1 t_1$ bez. $u_1 w_1$ der Cylinderfläche.

6) Als weitere Übungsbeispiele mögen die folgenden in den Figuren 102—114 dargestellten Durchdringungen dienen.

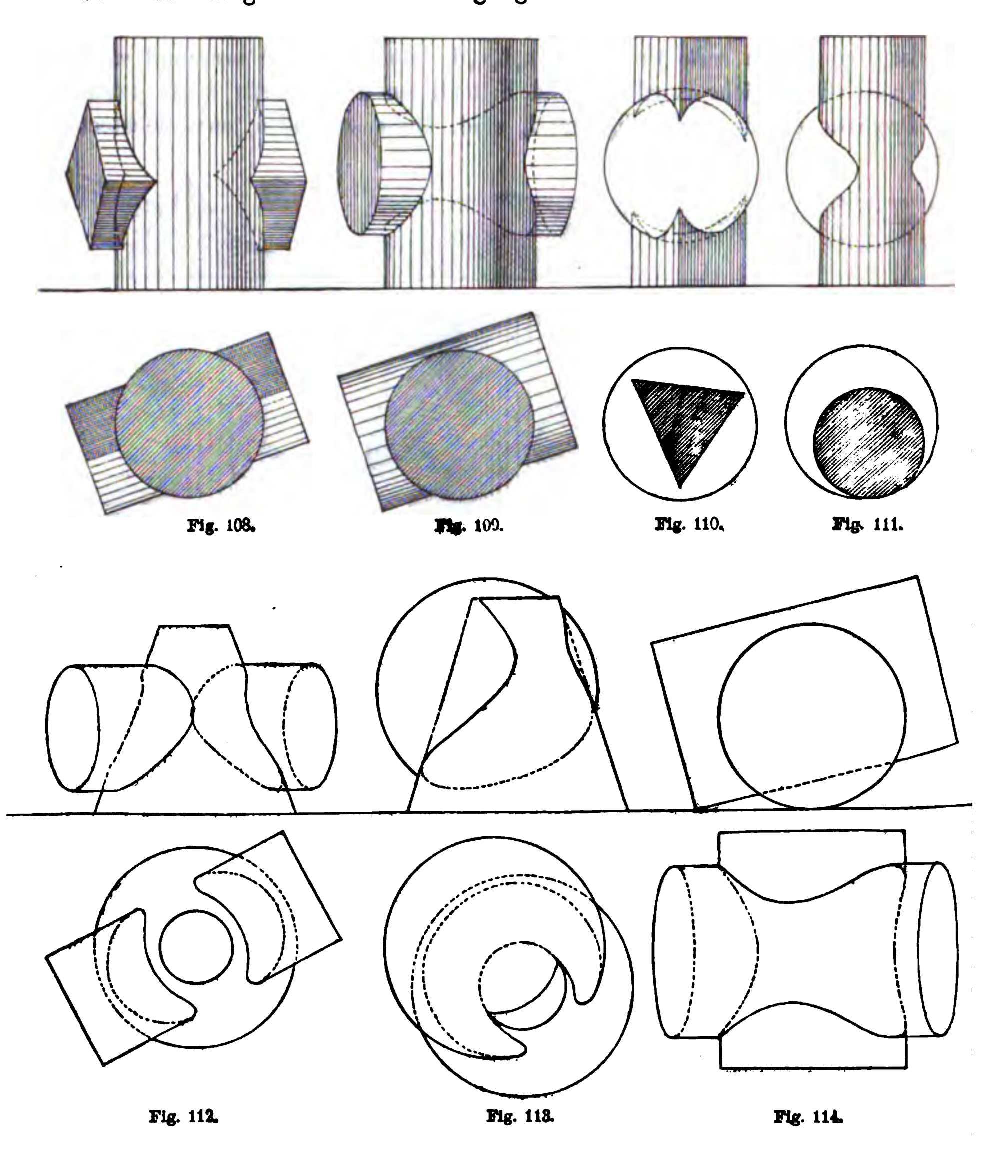


Fig. 108. Fig. 109. Fig. 110. Fig. 111.

Fig. 112. Fig. 113. Fig. 114.

7) Durchschnitt zweier Kegel.

Anl. z. Aufl. In Fig. 115 sind die Hälften zweier Kegel gegeben; die Achsen derselben liegen in P_1 und die Grundflächen stehen senkrecht

zu der letzteren, weshalb die Projektionen derselben die Geraden ab und df sind. Die erweiterten Ebenen der beiden Grundflächen, deren Spuren gh und gi sind, schneiden sich in einer Geraden gt, welche durch g geht und senkrecht zu P_1 steht. Werden die beiden Grundflächen um

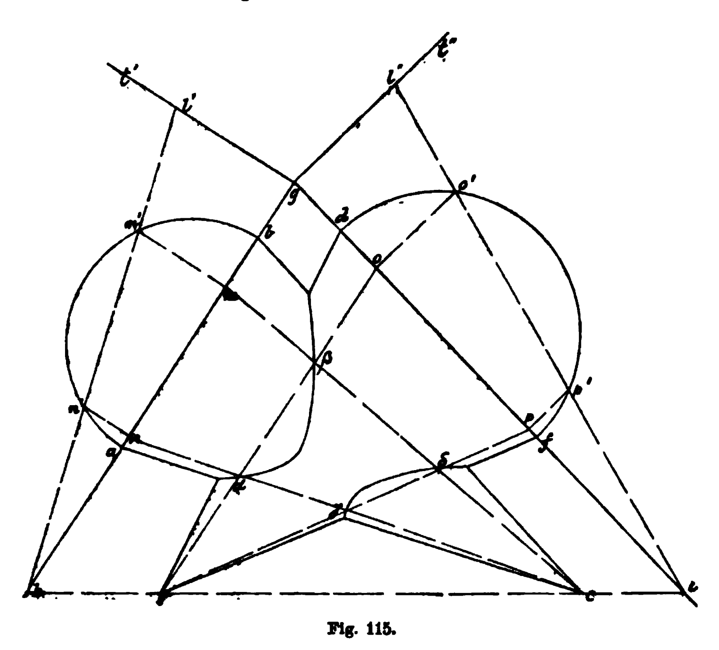


Fig. 115.

ihre Spuren in P_1 niedergeklappt, so gelangt jene Durchschnittslinie einmal nach gt′, oder nach gt″ (wenn $gt' \perp gh$ und $gt'' \perp gi$) und die umgeklappten Grundflächen sind die über ab und df gezeichneten Halbkreise. Man lege nun durch die beiden Spitzen c und e eine Ebene, deren Spur die Gerade hi ist. Diese schneidet die Ebenen der beiden Grundflächen in zwei Geraden, welche gt in demselben Punkte l treffen. Durch die vorhin erwähnten Umklappungen gelangt dieser Punkt nach l′ oder nach l″ (wo $gl' = gl''$ sein muss). Zieht man demnach die Geraden hl′ und il″, so stellen diese die Spuren einer durch c und e gehenden Ebene mit den Grundflächen der beiden Kegel dar. Diese Spuren treffen nun die Kreise in n′, m′ bez. p′ und o′; und wenn man von diesen Punkten Senkrechten zu ab, bez. df zieht, so erhält man in den Fusspunkten n, m und o, p die Projektionen der Schnittpunkte. Hiernach werden die beiden Kegel von der Hülfsebene in Geraden geschnitten, deren Projektionen cm, cn bez. eo und ep sind, und diese treffen sich

in den Punkten α, β, γ, δ, welche der Projektion des Durchschnittes angehören.

Man bestimme auch die zweite Projektion der beiden Kegel und ihres Durchschnittes.

8) Durchschnitt einer Halbkugel mit einem halben Kegel, welche beide auf der ersten Projektionsebene liegen (Fig. 116).

Anl. zur Aufl. Man lege durch die Spitze des Kegels eine Ebene senkrecht zu P_1. Dieselbe schneidet den Kegel in einer Seitenlinie und die Kugel in einem Halbkreis. Die ersten Projektionen beider, nämlich $s_1 c_1$ bez. $f_1 g_1$ fallen in dieselbe Gerade, weshalb die ersten Projektionen ihrer Schnittpunkte nicht zu erkennen sind. Man klappe die Hülfsebene in P_1 nieder, ziehe also $c_1 c' \perp s_1 c_1$ und mache $c_1 c'$ gleich der zu $a_1 b_1$ in c_1 errichteten Senkrechten $c_1 c''$, welche an dem über $a_1 b_1$ als Durchmesser gezeichneten Halbkreise endet. Der letztere ist die umgeklappte Grundfläche des Kegels. Die Gerade $c' s_1$ und der über $f_1 g_1$ gezeichnete Halbkreis sind nun die umgeklappten Durchschnitte der Hülfsebene mit Kegel und Kugel. Ihre Schnittpunkte d' und e' werden durch $d' d_1$ und $e' e_1$ auf $c_1 s_1$ projiciert, wodurch nun die ersten Projektionen d_1 und e_1 zweier Schnittpunkte bestimmt sind. Die weitere Ausführung, sowie die Ermittelung der zweiten Projektion bleibt dem Anfänger überlassen.

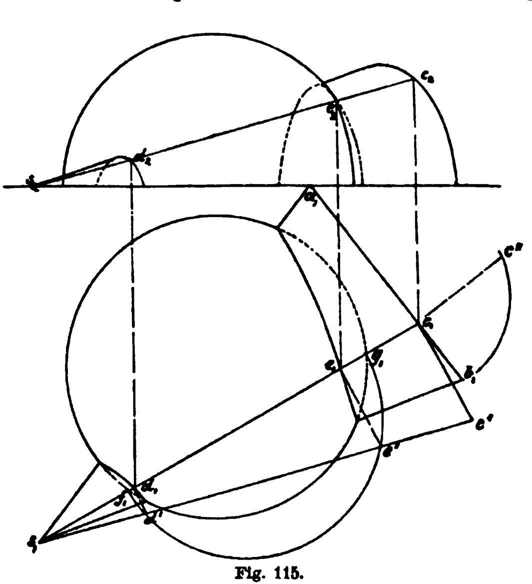


Fig. 115.

9) Die vorigen Aufgaben sind, mit Ausnahme von (7) durch Anwendung von Hülfsebenen gelöst, welche zu einer der Projektionsebenen P_1 oder P_2 senkrecht stehen. Bei den folgenden Aufgaben gestaltet sich die Lösung durch Annahme anderer Hülfsebenen einfacher und eleganter.

Durchschnitt zweier auf der ersten Projektionsebene stehenden schiefen Prismen (Fig. 117).

Anl. z. Auflösung. Man lege durch die Kanten des einen Prisma's

Ebenen, welche zu denen des anderen Prisma's parallel sind. Die Hülfsebenen werden dann den Kanten beider Prismen parallel sein. Nach (III, 13) zieht man durch den beliebig auf einer der Kanten z. B. ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) gewählten Punkt (c_1, c_2) die Gerade ($c_1 d_1$, $c_2 d_2$) parallel zu den

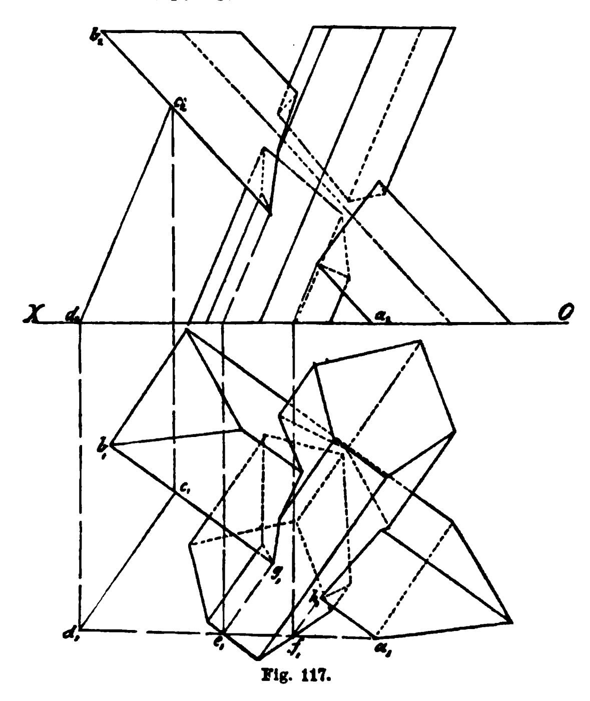


Fig. 117.

Kanten des anderen Prisma's. Die letztere schneidet P_1 im Punkte d_1, und folglich ist die erste Spur der durch beide Geraden gelegten Ebene die Verbindungslinie der beiden Punkte a_1 und d_1. Diese Spur schneidet die Grundfläche des andern Prisma's in den Punkten e_1 und f_1, und die Seitenflächen in den beiden zu den Kanten parallelen Geraden $e_1 g_1$ und $f_1 h_1$. Da wo die letzteren von $a_1 b_1$ getroffen werden, sind nun die ersten Projektionen zweier Schnittpunkte.

Um die übrigen Schnittpunkte zu finden, verschiebt man die angewandte Hülfsebene parallel mit sich selbst nach den übrigen Kanten u. s. f.

10) Durchschnitt eines Prisma's mit einer Pyramide (Fig. 118).

Anl. zur. Aufl. In ähnlicher Weise wie vorhin, legt man durch eine der Kanten der Pyramide, z. B. ($b_1 s_1$, $b_2 s_2$) eine Ebene, welche den Kanten des Prisma's parallel ist. Die Spur $a_1 b_1$ dieser Ebene wird mit Hülfe der durch die Spitze der Pyramide zu den Kanten des Prisma's

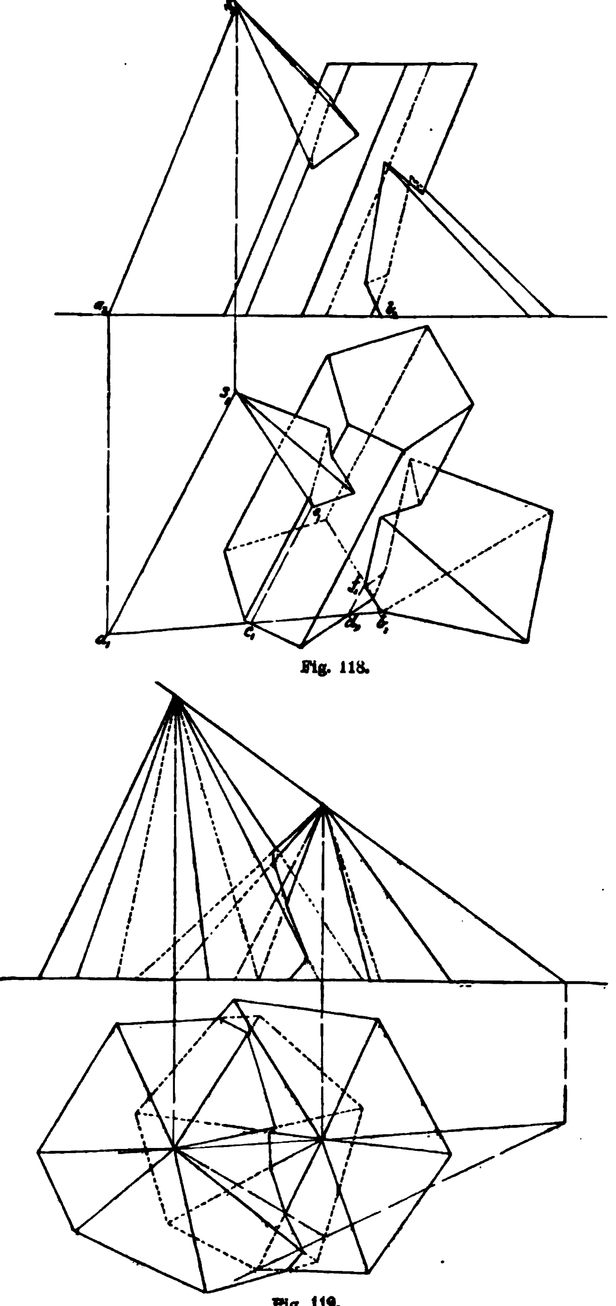


Fig. 118.

Fig. 119.

gezogenen Parallelen $(a_1 s_1, a_2 s_2)$ gefunden. Hierdurch ergeben sich wie in der vorigen Aufgabe die ersten Projektionen e_1 und f_1 zweier Schnittpunkte.

Durch $(a_1 s_1, a_2 s_2)$ und je eine Kante der Pyramide kann man eine Ebene legen, welche den Kanten des Prisma's parallel ist und durch die selbe Gerade und je eine Kante des Prisma's eine Ebene, welche durch die Spitze der Pyramide geht. Nach diesen Andeutungen konstruiere man die beiden Projektionen des Durchschnittes.

11) **Durchschnitt zweier Pyramiden, welche auf der ersten Projektionsebene stehen** (Fig. 119).

Die anzuwendenden Hülfsebenen legt man am besten durch die Verbindungslinie der beiden Spitzen und je eine Kante. Die Ausführung ist in Fig. 119 angedeutet und wird, weil sie den vorigen ähnlich ist, der eigenen Übung überlassen.

Man zeichne die drei letzten Durchdringungen auch in schiefer Projektion.

12) Durchschnitt einer abgestumpften Pyramide mit einem Prisma, wenn erstere auf P_1 steht, das letztere keine Fläche mit einer der Projektionsebenen gemeinschaftlich hat (Fig. 120).

Die Durchschnittspunkte sind leicht mit Hülfe von Ebenen zu bestimmen, welche durch die Kanten senkrecht zu P_1 oder P_2 gelegt werden.

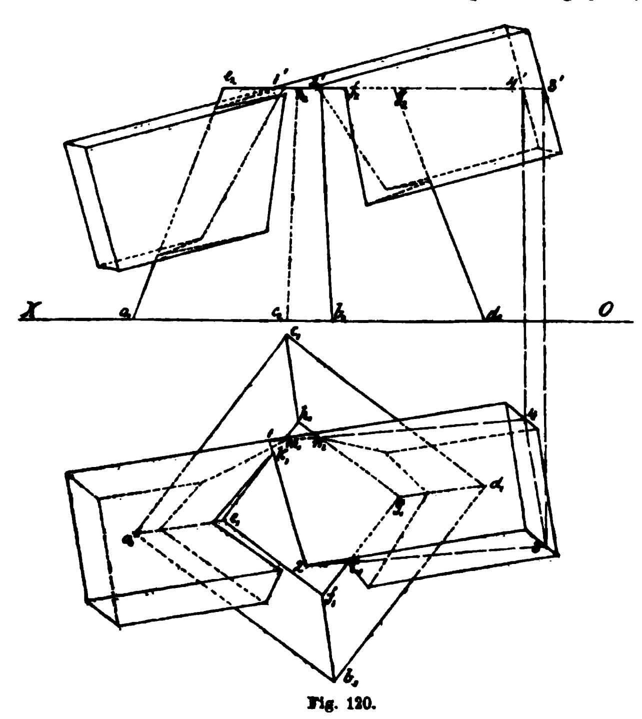


Fig. 120.

Erweitert man z. B. die obere Grundfläche der Pyramide, welche im Aufriss als Gerade $e_2 g_2$ erscheint, so schneidet dieselbe das Prisma in dem Viereck (1234, 1'2'3'4'). Diejenigen Teile der Seiten des letzteren, welche innerhalb der oberen Grundfläche der Pyramide liegen, wie im Grundriss die Geraden $2k_1$, $2l_1$, $m_1 n_1$, gehören dem gesuchten Durchschnitte an. Man konstruiere hiernach den ganzen Durchschnitt, ferner die Abwickelung der Mantelfläche der Pyramide.

VI. Abschnitt.

Berührungsebenen krummer Flächen.

Die Berührungsebenen krummer Flächen kommen in den Anwendungen der darstellenden Geometrie, besonders auf Schattenkonstruktionen häufig vor. Die zunächst zu betrachtenden Flächen, für welche die Berührungsebenen leicht zu bestimmen sind, umfassen die bereits aus der Stereometrie bekannten Cylinder-, Kegel- und Kugelflächen. Zur Lösung der hierher gehörigen Aufgaben dienen die folgenden Sätze.

1) Ist ab (Fig. 121) die Tangente für einen beliebigen Punkt a des Grundkreises (oder der Leitlinie) und ac eine Seitenlinie einer Cylinderfläche, so berührt die durch ab und ac gelegene Ebene E die Cylinderfläche in der Seitenlinie ac. Der Beweis ergiebt sich leicht, wenn man ac parallel mit sich selbst an der Tangente ab entlang gleiten lässt, wobei dieselbe die Ebene E durchläuft. Bei jeder anderen Lage, z. B. de, wird d als Punkt der Tangente ab ausserhalb der Grundfläche liegen, und weil de parallel zu den Seitenlinien der Cylinderfläche ist, so kann sie keine derselben treffen. Folglich liegt auch de ausserhalb der Cylinderfläche. Die letztere hat mit der Ebene E also nur die Gerade ac gemeinschaftlich.

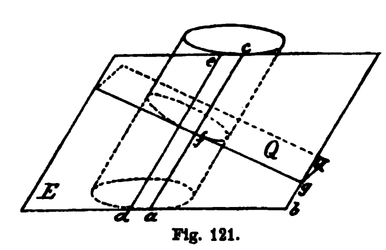


Fig. 121.

Schneidet eine Ebene Q den Cylinder und die Berührungsebene E, so ist die Schnittlinie fg von Q und E die Tangente der Durchschnittskurve in demjenigen Punkte f, in welchem dieselbe von ac getroffen wird.

Alle Berührungsebenen einer Cylinderfläche sind den Seitenlinien derselben parallel. Folglich schneiden sich je zwei Berührungsebenen in einer Parallelen zu den Seitenlinien.

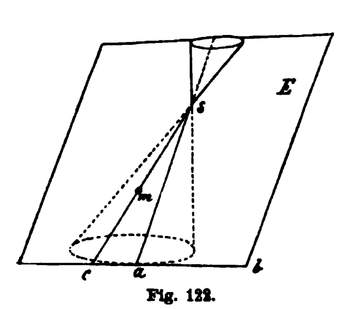


Fig. 122.

2) Die Ebene E, welche man durch eine Seitenlinie as einer Kegelfläche (Fig. 122) und durch die in a an den Grundkreis (oder an die Leitlinie) gezogene Tangente ab legt, berührt die Kegelfläche in der Seitenlinie as. Ist nämlich m ein beliebiger Punkt der Ebene E, so trifft die durch s und m gelegte Gerade cs die Tangente ab im Punkte c. Der letztere

liegt aber ausserhalb der Grundfläche, und da cs sämtliche Seitenlinien in s trifft, so liegt cs und mithin auch m ausserhalb der Kegelfläche. Folglich berührt E die Kegelfläche nur in as.

Die Schnittlinie von zwei Berührungsebenen einer Kegelfläche geht durch die Spitze derselben.

3) Steht eine Ebene E in dem Endpunkte a des Halbmessers ac einer Kugel (Fig. 123), senkrecht zu demselben, so hat sie mit der Kugeloberfläche nur den Punkt a gemeinschaftlich. E ist also eine Berührungsebene der Kugel. Zieht man nämlich durch einen andern Punkt m der Ebene E die Geraden am und cm, dann ist in dem bei a rechtwinkligen Dreieck acm die Hypothenuse cm > ac. Folglich liegt m ausserhalb der Kugelfläche.

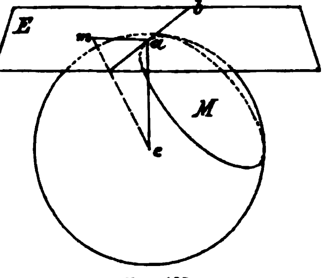


Fig. 123.

Jede Gerade, z. B. ab, welche man durch a in der Ebene E zieht, ist eine Tangente der Kugel. Legt man durch ab eine beliebige Ebene M, so ist ab auch Tangente des Durchschnittskreises von M und der Kugelfläche.

Zieht man von einem beliebigen Punkte s eine Tangente sa und die Gerade sc nach dem Mittelpunkte c eines Kreises (Fig. 124), und dreht alsdann die ganze Figur um cs als Achse, so durchläuft der Umfang des Kreises eine Kugeloberfläche und die Tangente as eine die letztere berührende Kegelfläche. Die Berührungskurve beider Flächen ist der Kreis, welchen a bei der Umdrehung durchläuft. Hieraus folgt noch, dass die Tangenten von s aus bis zu den Berührungspunkten gleiche Länge haben. Liegt die Spitze s unendlich weit entfernt, so wird der Berührungskegel zu einem Cylinder, welcher die Kugel in einem grössten Kreise berührt.

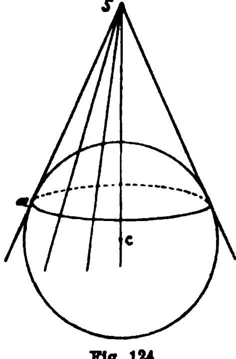


Fig. 124.

An zwei in einer Ebene liegenden Kreise, welche sich nicht schneiden und nicht ineinander liegen, lassen sich vier Tangenten ziehen. Zwei gehen durch den äusseren, und die beiden anderen durch den inneren Ähnlichkeitspunkt. Durch eine Drehung der beiden Kreise um ihre Centrallinie werden die Tangenten zwei Kegelflächen beschreiben, welche die von den Kreisen durchlaufenen Kugelflächen berühren. Diese Kegel- und Kugelflächen haben gemeinschaftliche Berührungsebenen.

Von den vorstehenden Sätzen ist, weil dieselben aus der Stereometrie bekannt sind, schon in (IV, 4, 31, 36) Gebrauch gemacht worden.

4) Für andere krumme Flächen findet man die Berührungsebene in einem beliebigen Punkte durch folgende Betrachtung, welche auch dem Anfänger wohl einleuchtend sein dürfte und für praktische Anwendungen vollständig genügt.

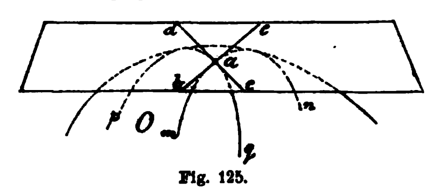


Fig. 125.

Durch den gegebenen Punkt a der krummen Fläche O (Fig. 125) lege man zwei Kurven mn und pq, welche auf O liegen. Ziehe in a an diese Kurven die Tangenten bc und de, und lege durch die letzteren die Ebene E, so ist diese die gesuchte Berührungsebene. Die Ausführung ist demnach immer möglich, wenn sich durch a Kurven legen lassen, für welche die Tangentenkonstruktion bekannt ist.

5) Wird eine krumme Fläche O (Fig. 126) von einer Ebene E geschnitten, und kann man für einen beliebigen Punkt a, welcher auf der Durchschnittskurve liegt, die Berührungsebene M an O bestimmen, so lässt sich auch die Tangente in a an die Durchschnittskurve ziehen. Die gesuchte Tangente liegt nämlich in der Ebene E sowohl, als auch in der Berührungsebene M; sie ist folglich die Durchschnittslinie beider.

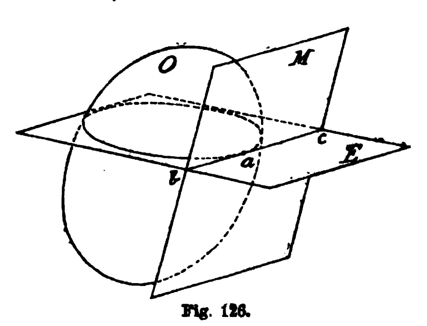


Fig. 126.

6) Schneiden sich zwei krumme Flächen, so ist die Tangente für einen Punkt a ihrer Durchschnittskurve die Schnittlinie der beiden Berührungsebenen, welche durch a an die krummen Flächen gelegt werden können.

Berührungsebenen der Cylinderflächen.

7) An eine durch erste und zweite Projektion gegebene Cylinderfläche durch einen auf derselben liegenden Punkt die Berührungsebene zu legen (Fig. 127).

Die Grundfläche des Cylinders sei ein Kreis oder eine Ellipse und liege in P_1. Die Seitenlinien stehen nicht senkrecht zur Grundfläche. Man bestimme den Durchschnitt der Cylinderfläche mit P_2, indem man

die zweiten Spuren einer Reihe von Seitenlinien aufsucht. Der Punkt, durch welchen die Berührungsebene gelegt werden soll, ist durch seine erste Projektion m_1 gegeben. Zieht man durch m_1 die erste Projektion a_1b_1 einer Seitenlinie, deren zweite Projektion a_2b_2 ist, so liegt auf der

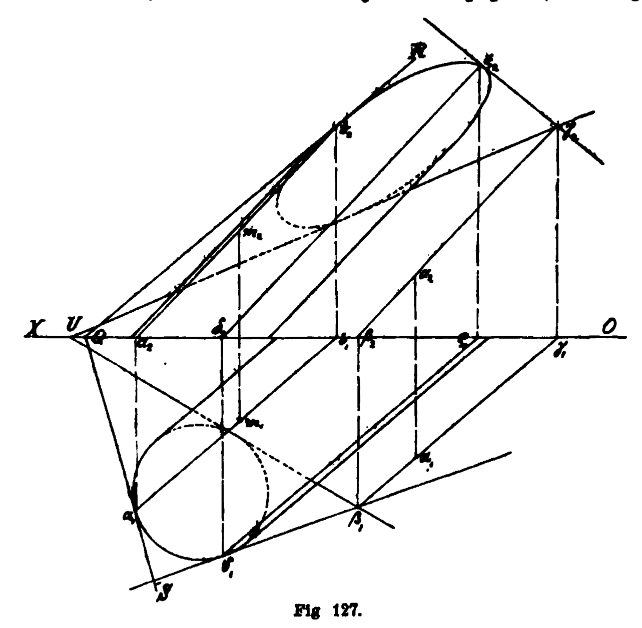


Fig 127.

letzteren, senkrecht über m_1, die zweite Projektion m_2 des gegebenen Berührungspunktes. In (a_1b_1, a_2b_2) berührt nun die gesuchte Ebene die Cylinderfläche, folglich geht die erste Spur QS der Berührungsebene durch a_1 und ist zugleich Tangente der Grundfläche. Die zweite Spur QR geht durch b_2 und berührt in diesem Punkte die Schnittkurve der Cylinderfläche mit P_2.

Der gegebenen Projektion m_1 entsprechen zwei Punkte der Cylinderfläche. Man bestimme auch für den zweiten Punkt die Spuren der Berührungsebene.

8) Von einem gegebenen Punkte (α_1, α_2) Berührungsebenen an eine gegebene Cylinderfläche zu legen.

Man ziehe durch den Punkt (α_1, α_2) die Gerade $(\beta_1\gamma_1, \beta_2\gamma_2)$ parallel zu den Seitenlinien, und durch die Spur β_1 eine Tangente $\beta_1\delta_1$ an die Grundfläche. Zieht man durch den Berührungspunkt δ_1 der letzteren die zu $(\beta_1\gamma_1, \beta_2\gamma_2)$ parallele Seitenlinie $(\delta_1\varepsilon_1, \delta_2\varepsilon_2)$, so ist die durch diese beiden Geraden gelegte Ebene eine der gesuchten Berührungsebenen.

Die Spuren derselben sind die beiden durch β_1 und γ_2 gehenden Tangenten $\beta_1\delta_1$ bez. $\gamma_2\epsilon_2$ der Endflächen des Cylinders. Die Spuren der zweiten Berührungsebene sind die beiden andern von β_1 und γ_2 möglichen Tangenten $\beta_1 U$ bez. $\gamma_2 U$. Man bestimme die Berührungspunkte der Spuren beider Ebenen.

9) An einen Cylinder Berührungsebenen zu legen, welche einer gegebenen Geraden G parallel sind.

Anl. zur Aufl. Durch einen beliebigen Punkt der Geraden G ziehe man eine Parallele zu den Seitenlinien der Cylinderfläche. Die Ebene, welche durch diese beiden Geraden gelegt werden kann, ist den Seitenlinien parallel und kann deshalb parallel mit sich selbst verschoben werden, bis sie die Cylinderfläche berührt. Man bestimme nach diesen Andeutungen die Spuren der beiden möglichen Berührungsebenen.

Berührungsebenen der Kegelflächen.

10) Ein schiefer Kegel, dessen in P_1 liegende Grundfläche ein Kreis oder eine Ellipse ist, sei gegeben. Diese Seitenlinien sind über die Spitze $(s_1 s_2)$ hinaus bis zu P_2 verlängert. Hierdurch findet man die Schnittfigur der Kegelfläche mit P_2. Man soll durch einen Punkt der Kegelfläche, deren erste Projektion a_1 gegeben ist, die Berührungsebene an dieselbe legen (Fig. 128).

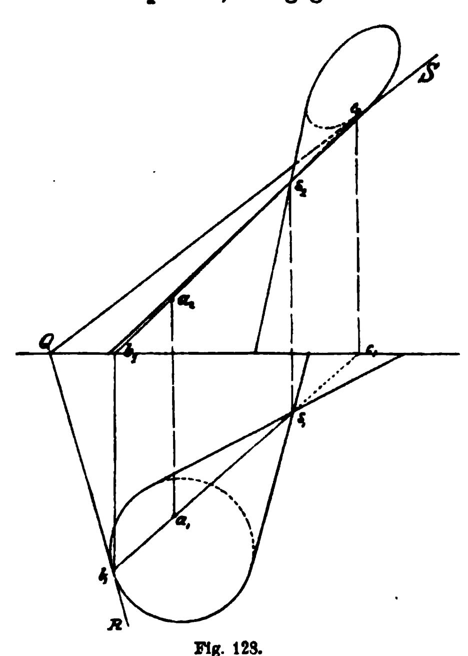


Fig. 128.

Nach (2) berührt die gesuchte Ebene den Kegel in einer Seitenlinie, deren erste Projektion die durch a_1 und s_1 gehende Gerade $b_1 c_1$ ist. Man bestimmt hiernach die zweite Projektion $b_2 c_2$ der Seitenlinie und diejenige des gegebenen Punktes, welche in a_2 liegt. Die Spuren der gesuchten Ebene sind nun die Tangenten QR und QS, welche durch die Spuren b_1 bez. c_2 der Seitenlinie $(b_1 c_1, b_2 c_2)$ gehen, und in diesen

Punkten die Endflächen des Kegels berühren. Auch in diesem Falle entsprechen wie in (7) der Projektion a_1 zwei Punkte der Kegelfläche.

11) Von einem gegebenen Punkte (a_1, a_2) Berührungsebenen an eine gegebene Kegelfläche zu legen.

Anl. z. Aufl. Da die gesuchten Ebenen durch die Spitze (s_1, s_2) des Kegels gehen, so enthalten dieselben die Verbindungslinie dieses Punktes mit (a_1, a_2). Die Spuren der Berührungsebenen gehen durch die Spuren dieser Geraden.

12) An einen gegebenen Kegel Berührungsebenen zu legen, welche einer gegebenen Geraden G parallel sind.

Anl. z. Aufl. Man ziehe durch die Spitze des Kegels die Gerade G′ parallel zu G, dann wird G′ in den gesuchten Ebenen liegen; sie ist nach (2) die Schnittlinie derselben. Die Spuren der Berührungsebenen gehen nun durch die Spuren der Geraden G′.

Berührungsebenen einer Kugelfläche.

13) Die Spuren der Ebene zu finden, welche eine gegebene Kugelfläche (K_1, K_2) in dem gegebenen Punkte (a_1, a_2) berührt (Fig. 129).

Der Berührungspunkt ist durch seine erste Projektion a_1 gegeben. Die zweite Projektion a_2 wird nach (I, 9) bestimmt. Durch (a_1, a_2) ist nun die gesuchte Ebene senkrecht zum Halbmesser ($c_1 a_1$, $c_2 a_2$) zu legen. Nach (III, 19) stehen die Spuren SQ und QR der Berührungsebene senkrecht zu den entsprechenden Projektionen des Halbmessers ($c_1 a_1$, $c_2 a_2$). Zieht man deshalb durch (a_1, a_2) eine Gerade parallel zu SQ, so liegt dieselbe in der gesuchten Ebene, und ihre erste Projektion $a_1 b_1$ steht senkrecht zu $c_1 a_1$. Die zweite Projektion $a_2 b_2$ dieser Geraden ist parallel zur Achse OX. Durch die zur Achse Senkrechte $b_1 b_2$ bestimmt man die zweite Spur b_2 der Hülfsgeraden, und durch b_2 zieht man nun die Spur QR senkrecht zu $c_2 a_2$. Die erste Spur SQ geht durch Q und ist parallel zu $a_1 b_1$.

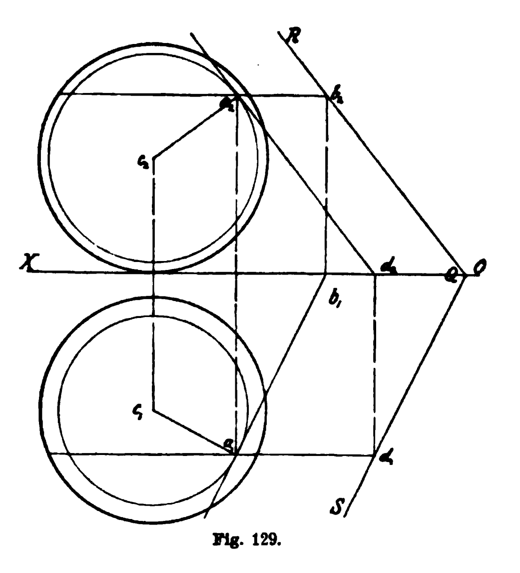


Fig. 129.

Man kann auch nach (VI, 4) durch den Punkt (a_1, a_2) zwei Kreise legen, von denen der eine parallel zu P_1, der andere parallel zu P_2 ist. An diese Kreise lege man durch (a_1, a_2) die Tangenten ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$), ($a_1 d_1$, $a_2 d_2$), und durch die letzteren die gesuchte Berührungsebene.

14) Durch eine gegebene Gerade ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) Berührungsebenen an eine gegebene Kugel (K_1, K_2) zu legen (Fig. 130).

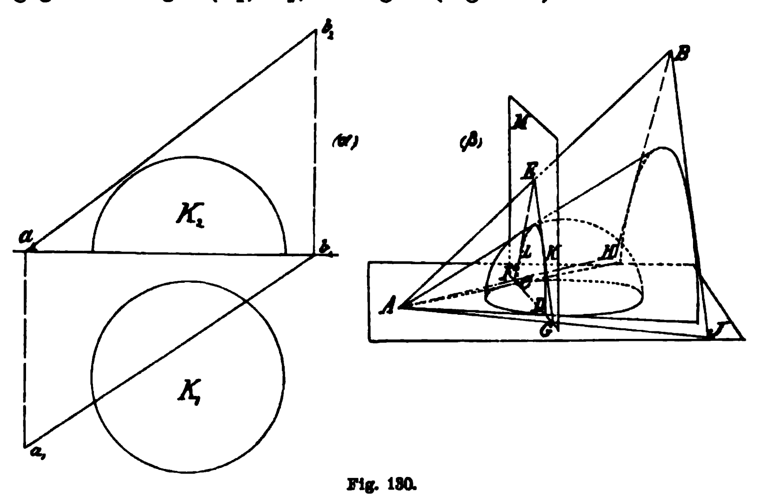


Fig. 130.

Der Mittelpunkt der Kugel liege in der ersten Projektionsebene. Der Gang der Lösung ist in (β) in schiefer Projektion dargestellt. Die erste Spur A der gegebenen Geraden betrachte man als die Spitze einer die Kugel einschliessenden und berührenden Kegelfläche. Die beiden Tangenten AC und AD, welche von A aus an den Grundkreis der auf P_1 liegenden Halbkugel gezogen werden können, bilden die äussersten Seitenlinien des ebenfalls auf P_1 liegenden und die Kugel berührenden halben Kegels, dessen Achse die Gerade von A nach dem Mittelpunkt der Kugel ist. Die Ebene M des Berührungskreises der Kegel- und Kugelfläche steht senkrecht zu P_1, und ihre Spur FG ist die Sekante, welche durch die Berührungspunkte C und D der beiden Tangenten AC und AD geht. Zugleich ist CD der Durchmesser dieses Berührungskreises. AB treffe die Ebene M in E; zieht man von E aus die beiden Tangenten EF und EG an den Berührungskreis, so treffen dieselben die Spur FG in den Punkten F und G, und nun sind die Ebenen ABH und ABJ, welche man durch AB und EF oder durch AB und EG legen kann, die gesuchten Berührungsebenen. Die ersten Spuren derselben sind die Geraden AF und AG. Diese beiden Ebenen berühren nämlich die Kegel-

fläche und folglich auch die Kugel; die letztere in den Berührungspunkten L und K der beiden Tangenten EF und EG. Mit Hülfe dieser Andeutungen sollen die Spuren der beiden möglichen Berührungsebenen in Fig. 130(α) bestimmt werden.

Man löse die Aufgabe auch, wenn der Mittelpunkt der Kugel nicht in einer der Projektionsebenen liegt.

15) An eine gegebene Kugel Berührungsebenen zu legen, welche einer gegebenen Geraden parallel sind.

16) Von einem Punkte aus Berührungsebenen an eine gegebene Kugel zu legen.

In (15) und (16) sind unzählig viele Ebenen möglich. Im ersten Falle liegen die Berührungspunkte auf einem grössten Kreise der Kugel, im letzteren bilden dieselben einen kleineren Kreis. Die Projektionen dieser Berührungskreise sind zu bestimmen.

17) Die Spuren der Berührungsebenen zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und zwei gegebene Kugeln berühren.

Es giebt vier Ebenen, welche mit Hülfe der Berührungskegel beider Kugeln leicht nach (11) zu bestimmen sind.

18) An zwei Kugeln gemeinschaftliche Berührungsebenen zu legen, welche einer gegebenen Geraden parallel sind.

19) An einen auf P_1 stehenden geraden Kegel und an eine gegebene Kugel gemeinschaftliche Berührungsebenen zu legen (Fig. 131).

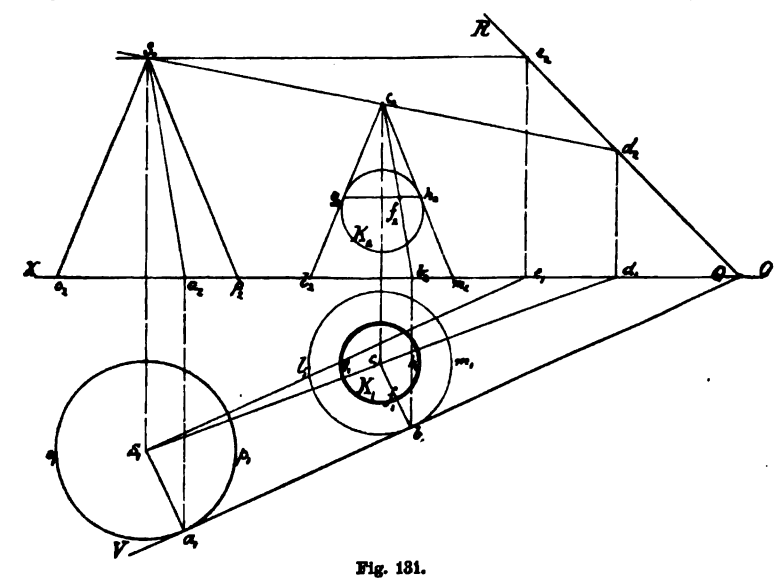


Fig. 131.

Anl. zur Aufl. Man lege um die gegebene Kugel (K_1, K_2) einen berührenden Kegel, welcher dem gegebenen Kegel ähnlich ist und ähn-

liche Lage hat. Die zweite Projektion desselben ist das Dreieck $l_2 m_2 c_2$, welches der zweiten Projektion des gegebenen Kegels, nämlich dem Dreieck $o_2 p_2 s_2$ ähnlich ist. Der auf P_1 liegende Grundkreis des Kegels, dessen Durchmesser gleich $l_2 m_2$ ist, ergiebt sich hieraus leicht. Zieht man an die beiden Grundkreise dieser Kegel die gemeinschaftliche Tangente QV, und durch die Berührungspunkte a_1 und b_1 die Seitenlinien $(a_1 s_1, a_2 s_2)$, $(b_1 c_1, b_2 c_2)$, so sind die letzteren parallel, und die Ebene, welche durch beide gelegt werden kann, hat die Tangente QV zur ersten Spur. Sie ist deshalb eine gemeinschaftliche Berührungsebene beider Kegel; folglich berührt sie auch die Kugel, und zwar in demjenigen Punkte (f_1, f_2), in welchem die Seitenlinie $(b_1 c_1, b_2 c_2)$ den Berührungskreis schneidet.

Die Berührungsebene enthält die Verbindungslinie der Spitzen beider Kegel; ihre zweite Spur QR geht deshalb durch die zweite Spur d_2 dieser Geraden. Oder man kann zur Bestimmung von QR durch die Spitze (s_1, s_2) eine Gerade $(s_1 e_1, s_1 e_2)$ parallel zur Spur QV ziehen. Diese Gerade liegt dann ebenfalls in der Berührungsebene. Ihre zweite Projektion $s_2 e_2$ ist parallel zur Achse OX, und die Spur QR geht auch durch die zweite Spur e_2 dieser Hülfslinie.

In gleicher Weise bestimme man die Spuren der übrigen drei noch möglichen Berührungsebenen.

20) An einen schiefen Kegel und an eine gegebene Kugel gemeinschaftliche Berührungsebenen zu legen.

Anl. z. Aufl. Man lege um die Kugel einen berührenden Kegel, welcher mit dem gegebenen Kegel die Spitze gemeinschaftlich hat. An diese beiden Kegel lassen sich, wie leicht ersichtlich ist, gemeinschaftliche Berührungsebenen legen.

21) An einen Cylinder und an eine Kugel sollen gemeinschaftliche Berührungsebenen gelegt werden.

Anl. zur Aufl. Man lege um die Kugel einen berührenden Cylinder, dessen Seitenlinien denjenigen des gegebenen Cylinders parallel sind. An diese beiden Cylinder kann man gemeinschaftliche Berührungsebenen legen. Man bestimme hiernach die Spuren derselben.

22) An drei gegebene Kugeln K_1, K_2, K_3 gemeinschaftliche Berührungsebenen zu legen.

Anl. zur Aufl. Man lege die drei Kugeln so, dass ihre Mittelpunkte in einer der Projektionsebenen, z. B. in P_1 liegen. Je zwei Kugeln werden von einer Kegelfläche eingeschlossen und berührt, deren Spitze auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Kugeln, also auch in P_1 liegt. Die Spur einer Ebene, welche den Kegel, also auch die beiden entsprechenden Kugeln berührt, muss durch diese Spitze gehen.

Man bestimme hiernach die ersten Spuren sämtlicher Berührungsebenen und die ersten Projektionen ihrer Berührungspunkte.

Berührungsebenen an Umdrehungsflächen.

Das Umdrehungs-Ellipsoid.

23) Die Spuren der Ebene zu finden, welche das gegebene Umdrehungsellipsoid (E_1, E_2) in einem gegebenen Punkte (a_1, a_2) seiner Oberfläche berührt (Fig. 132).

Aufl. Die Umdrehungsachse des Ellipsoides soll senkrecht zu P_1 angenommen werden wie in Fig. 91. Die Konstruktion kann nach (4) folgendermassen ausgeführt werden. Man lege durch den gegebenen Punkt (a_1, a_2) einen Meridianschnitt, und einen Schnitt senkrecht zur Drehachse. Der erste Schnitt ist eine, der erzeugenden gleiche Ellipse, deren erste Projektion mit dem durch a_1 gehenden Durchmesser $m_1 n_1$ zusammenfällt, während die zweite Projektion eine durch a_2, d_2 und e_2 gehende Ellipse ist. (Zur Lösung der Aufgabe ist die Zeichnung dieser sonst leicht zu findenden Kurve nicht erforderlich.) Der zweite Schnitt ist ein Kreis, dessen zweite Projektion in der durch a_2 zur Achse OX gezogenen Parallelen $k_2 a''$ liegt. Durch (a_1, a_2) zieht man an diesen Kreis die Tangente ($a_1 h_1$, $a_2 h_2$). Die zweite Projektion $a_2 h_2$ fällt in die Verlängerung von $k_2 a''$, und die zweite Spur der Tangente liegt in h_2. Ferner lege man

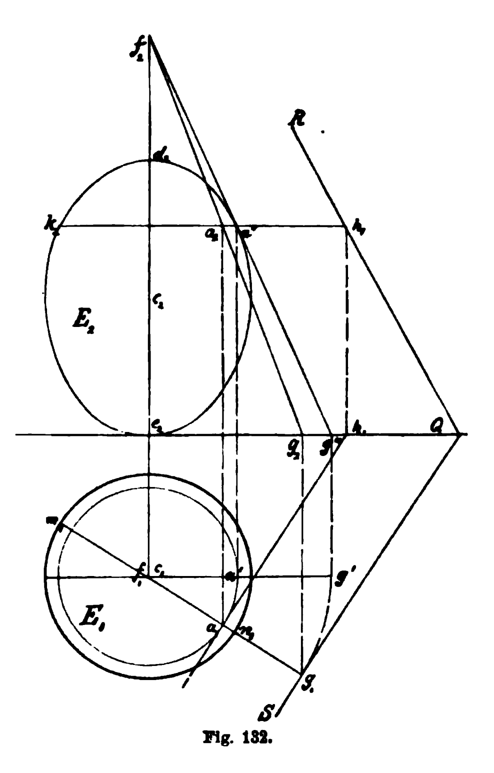


Fig. 132.

durch (a_1, a_2) auch eine Tangente an den Meridianschnitt. Die erste Projektion $a_1 g_1$ fällt in die Verlängerung von $m_1 n_1$; um die zweite Projektion der Tangente zu finden, drehe man den Schnitt um die Achse des Ellipsoids, bis derselbe parallel zu P_2 wird. Nach der Drehung fällt die zweite Projektion des Schnittes mit der Ellipse $d_2 k_2 e_2 a''$ zu-

sammen, und der gegebene Punkt bewegt sich auf dem Umfang des ersten Schnittes bis a″. Durch diesen Punkt zieht man (s. IV, 9) die Tangente $f_2 g''$ an die gedrehte Ellipse. Beim Zurückdrehen des Schnittes in die ursprüngliche Lage gelangt a″ wieder nach a_2, während der Punkt f_2 auf der Drehachse an der Stelle bleibt; folglich ist die durch f_2 und a_2 gezogene Gerade $f_2 g_2$ die zweite Projektion der gesuchten Tangente. Durch die Spur g_1 der letzteren zieht man nun die erste Spur SQ der gesuchten Berührungsebene parallel zu $a_1 h_1$. Die zweite Spur der Ebene geht von Q durch h_2.

24) Von einem gegebenen Punkte A aus Berührungsebenen an das vorige Umdrehungsellipsoid zu legen (Fig. 133).

Anl. zur Aufl. In diesem Falle sind unzählig viele Ebenen möglich, welche die Fläche in einer zu konstruierenden Kurve berühren. Legt man durch A eine Ebene M senkrecht zur Drehachse EF, so schneidet sie das Ellipsoid in einem Kreise, an welchen man von A aus die beiden Tangenten AB und AC ziehen kann. Die Berührungspunkte B und C gehören der gesuchten Kurve an. Es sei OR ein zweiter Kreis, welcher ebenfalls senkrecht zur Drehachse EF steht, dessen Ebene aber nicht durch A geht; ferner sei KFL eine das Ellipsoid in diesem Kreise berührende Kegelfläche, welche von der Tangente FL an den Meridianschnitt ODR durch Drehung um die Achse EF beschrieben wird, und welche die Ebene M in dem Kreise KL schneidet. An den letzteren ziehe man von A aus die Tangenten AG und AH, und durch die Berührungspunkte G und H die Seitenlinien FG und FH der Kegelfläche. Die Ebene, welche man durch FG und AG legen kann, berührt die Kegelfläche in der Seitenlinie FG. Folglich berührt sie auch das Ellipsoid in demjenigen Punkte N, in welchem FG den Kreis OR trifft. Ebenso ist der Schnittpunkt J des Kreises OR und der Seitenlinie FH der Berührungspunkt der Ebene, welche durch AH und FH gelegt werden kann.

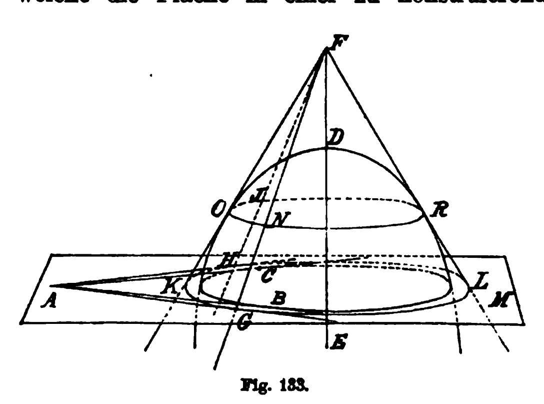


Fig. 133.

Auf die angegebene Weise lassen sich beliebig viele Punkte der Berührungskurve bestimmen. Man konstruiere hiernach die beiden Pro-

jektionen derselben, und ermittele noch besonders die beiden Punkte der Kurve, welche in der durch A und die Achse DE gehenden Ebene liegen.

25) An dasselbe Umdrehungsellipsoid Berührungsebenen zu legen, welche einer gegebenen Geraden G parallel sind.

Anl. z. Aufl. Legt man an jeden der in (24) benutzten Hülfskegel nach (12) Berührungsebenen, welche der Geraden G parallel sind, so berühren diese auch das Ellipsoid. Man bestimme hiernach die beiden Projektionen der Berührungskurve.

26) An eine Ringfläche durch einen auf derselben gegebenen Punkt (a_1, a_2) die Berührungsebene zu legen (Fig. 134).

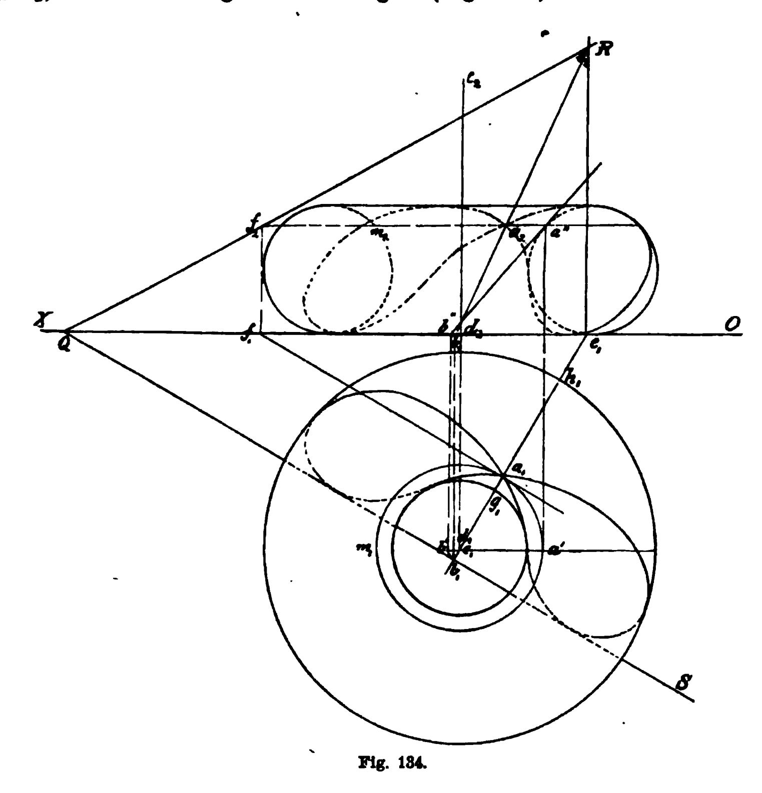


Fig. 134.

Die Ringfläche (s. IV, 42) liege auf P_1. Durch (a_1, a_2) gehen zwei Kreise, welche auf der Ringfläche liegen. Der eine, dessen erste Projektion $a'm_1$ und dessen zweite Projektion die Gerade $a''m_2$ ist, steht senkrecht zur Drehachse. Der andere liegt in der Ebene, welche durch (a_1, a_2) und durch die Drehachse der Ringfläche geht. Seine erste Projektion ist die durch c_1 und a_1 bestimmte Gerade g_1h_1; die zweite Pro-

jektion würde eine durch a_2 gehende Ellipse sein, welche aber nicht gezeichnet zu werden braucht. An beide Kreise zieht man in (a_1, a_2) Tangenten, dann ist die Ebene, welche durch diese gelegt werden kann, die gesuchte Berührungsebene.

Die Projektionen der Tangente an den ersten Kreis sind $a_1 f_1$ und $a_2 f_2$, von denen die letztere mit der Geraden $a'' m_2$ zusammenfällt. In f_2 trifft dieselbe P_2. Um die Tangente an den zweiten Kreis zu bestimmen, dreht man den letzteren um die Achse $(c_1 d_1, c_2 d_2)$, bis derselbe parallel zu P_2 wird. Hierdurch gelangt (a_1, a_2) nach (a', a''). In a'' zieht man die Tangente $a'' b''$ an den gedrehten Kreis. Die erste Projektion $a' b'$ ist dann parallel zu OX und die erste Spur der Tangente liegt senkrecht unter b'' in b'. Wird nun der Schnitt mit der Tangente wieder in seine erste Lage zurückgedreht, so beschreibt b' den Kreisbogen $b' b_1$ um den Mittelpunkt c_1 und (a', a'') kommt wieder nach (a_1, a_2). Hieraus ergeben sich die beiden Projektionen $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ der Tangente, und zugleich deren Spuren b_1 und e_2. Durch b_1 zieht man die erste Spur SQ der gesuchten Berührungsebene parallel zu $a_1 f_1$; die zweite Spur QR geht durch die Punkte e_2 und f_2.

Der Punkt (a_1, a_2) ist in Fig. 134 auf der inneren Seite der Ringfläche angekommen. Die gefundene Berührungsebene wird deshalb an anderen Stellen die Ringfläche schneiden. Man konstruiere nach (IV, 42) die Durchschnittskurve und bestimme nach (5) für einen beliebigen Punkt derselben die Tangente.

27) Von einem gegebenen Punkte ausserhalb Berührungsebenen an eine Ringfläche zu legen.

Wie in (24) zu lösen.

28) An eine Ringfläche Berührungsebenen zu legen, welche einer gegebenen Geraden parallel sind.

Die Berührungskurve wird nach (25) bestimmt.

Zur weiteren Übung mögen noch folgende Aufgaben dienen.

29) An zwei gegebene Kegelflächen parallele Berührungsebenen zu legen.

Anl. zur Aufl. Man konstruiere einen Hülfskegel, dessen Spitze mit derjenigen des einen der gegebenen Kegel zusammenfällt, und welcher dem andern Kegel ähnlich ist und ähnliche Lage mit demselben hat. An zwei Kegel mit gemeinschaftlicher Spitze lassen sich gemeinschaftliche Berührungsebenen legen u. s. f.

30) An zwei Cylinder parallele Berührungsebenen zu legen.

31) An einen Kegel und einen Cylinder parallele Berührungsebenen zu legen.

32) Gegeben zwei Kugeln K_1 und K_2 und ein Kegel M. Man soll an M Berührungsebenen legen, welche parallel zu gemeinschaftlichen Berührungsebenen der Kugeln K_1 und K_2 sind.

33) In eine dreiseitige Pyramide eine Kugel zu legen, welche die Seitenflächen der Pyramide berührt.

34) In einen geraden Kreiskegel eine die Mantelfläche desselben berührende Kugelfläche zu legen, welche durch einen gegebenen Punkt geht. Wie viele Kugelflächen sind möglich?

35) Durch drei gegebene Punkte eine Kugelfläche zu legen, welche eine gegebene Ebene berührt.

36) Durch drei gegebene Punkte eine Kugelfläche zu legen, welche eine andere gegebene Kugel berührt.

37) Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, welche von einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand hat.

38) Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, welche von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat.

Anwendung der Berührungsebenen auf die Projektionen von Umdrehungsflächen.

39) Wird eine beliebige Kurve AB (Fig. 135) um eine Gerade CD gedreht, so durchläuft AB eine Umdrehungsfläche. Es soll dabei vorausgesetzt werden, dass AB und CD in einer Ebene liegen. Ist nun EG eine Tangente an AB, E der Berührungspunkt derselben, und EF senkrecht zu EG, so heisst EF die Normale der Kurve AB für den Punkt E. Der Kreis, welcher mit dem Halbmesser EF um F als Mittelpunkt beschrieben wird, hat mit der Kurve AB die Tangente in E gemeinschaftlich; beide Kurven berühren sich deshalb in diesem Punkte. Durch Drehung des Halbkreises HEK um CD entsteht nun eine Kugelfläche, welche die von AB beschriebene Umdrehungsfläche in dem Kreise berührt, welchen der Punkt E durchläuft. Zur Darstellung der Projektionen von Umdrehungsflächen werden häufig solche berührende Kugeln mit Vorteil benutzt, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

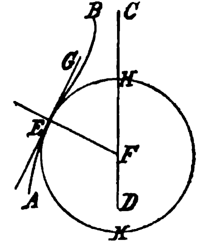


Fig. 135.

Umdrehungsellipsoid.

40) Die zweite Projektion eines Ellipseids habe die in Fig. 136 angegebene Lage. Man soll die erste Projektion desselben bestimmen.

Die grosse Achse (c_1d_1, c_2d_2), welche zugleich Drehachse ist, sei parallel zu P_2, jedoch nicht senkrecht zu P_1. In diesem Falle ist ihre erste Projektion c_1d_1 parallel zu OX.

In einem beliebigen Punkt m_2 der Ellipse $c_2e_2d_2f_2$ ziehe man die Normale m_2n_2 und zeichne aus n_2 mit m_2n_2 als Halbmesser einen Kreis, welcher die zweite Projektion einer das Ellipsoid berührenden Kugel dar-

stellt. Die erste Projektion dieser Kugel ist ein gleicher Kreis mit dem senkrecht unter n_2 auf $c_1 d_1$ liegenden Mittelpunkte n_1. Legt man nun beliebig viele solcher berührenden Kugeln in das Ellipsoid, so werden dieselben von der Oberfläche des letzteren eingehüllt, der Umriss der ersten Projektion ist deshalb diejenige Kurve, welche die ersten Projektionen aller berührenden Kugeln einhüllt.

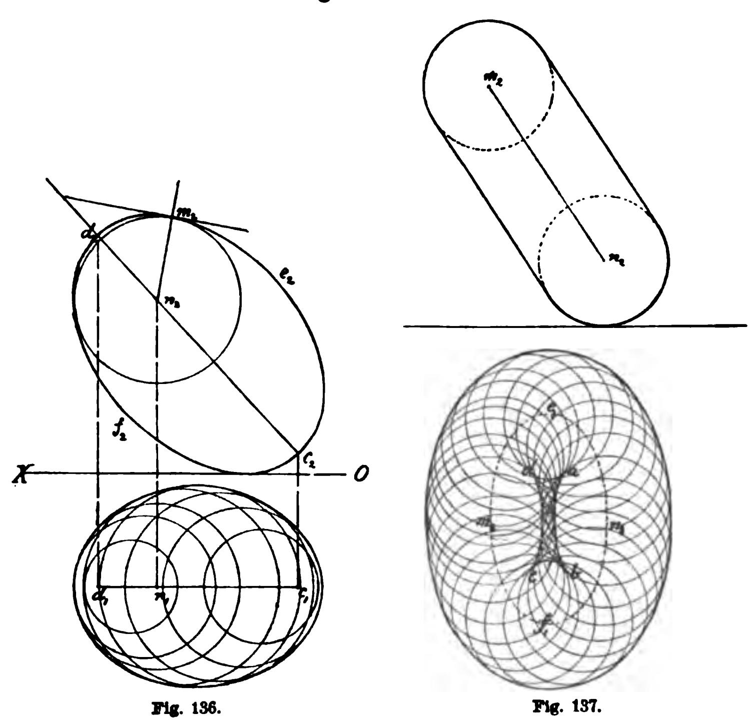


Fig. 136. Fig. 137.

41) Die schon früher dargestellte Ringfläche lässt sich auch bei beliebiger Stellung leicht mittelst Hülfskugeln projicieren. Es ist jedoch vorteilhaft, die Mittelpunkte der berührenden Kugeln nicht auf der Drehachse anzunehmen, sondern auf demjenigen Kreise, welchen der Mittelpunkt des Meridianschnittes bei der Umdrehung beschreibt. In diesem Falle sind sämtliche Kugeln gleich gross. Die zweite Projektion der Ringfläche habe die in Fig. 137 angegebene Lage, dann ist diejenige des eben erwähnten Kreises die Gerade $m_2 n_2$, während die erste Projektion desselben die leicht zu konstruierende Ellipse $m_1 e_1 n_1 f_1$ ist. Beschreibt man nun aus beliebig vielen Punkten der letzteren Kreise, welche den Meridianschnitten gleich sind, so kann man dieselben als die Projektionen

von Kugeln betrachten, welche der Ringfläche einbeschrieben sind. Die erste Projektion der letzteren ist dann die einhüllende Kurve aller dieser Kreise.

Diese Kurve besteht aus zwei getrennten Teilen, von welchen der innere besondere Eigentümlichkeiten zeigt. Derselbe hat nämlich in den vier Punkten a, b, c und d Spitzen. Der Zweig von a bis b liegt auf der oberen Seite der Ringfläche und ist deshalb im Grundriss sichtbar; der untere Zweig von d nach c, und die Bögen von a nach d und von b nach c sind gar nicht sichtbar.

Man kann selbstverständlich die vorstehende Konstruktion nur als eine näherungsweise betrachten, welche aber für den praktischen Gebrauch nützlich und vollkommen ausreichend ist. Es sind hauptsächlich keine bestimmten Punkte des Umrisses der ersten Projektion ermittelt, und die Berührungspunkte desselben mit den gezeichneten Kreisen sind auch nicht konstruiert worden. Es lassen sich aber beliebig viele Punkte der Kurve mit Hülfe von Berührungsebenen bestimmen, wie nun an einem andern Beispiel gezeigt werden soll.

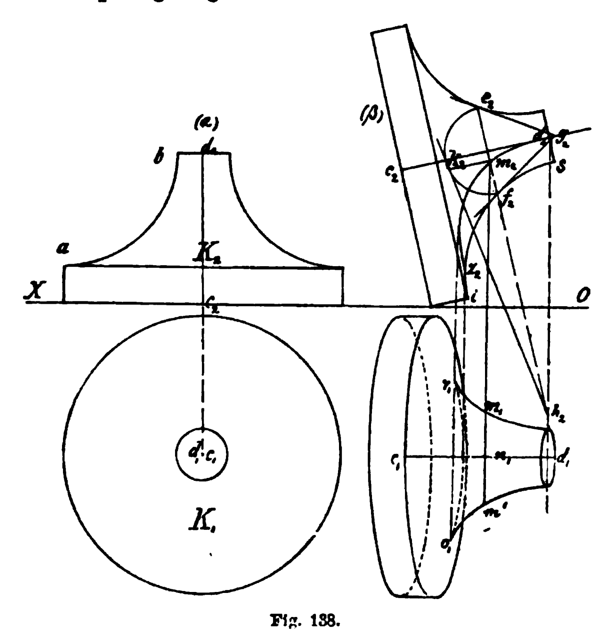


Fig. 138.

42) Es seien K_1 und K_2, Fig. 138(α), die beiden Projektionen eines Umdrehungskörpers, welcher auf P_1 steht. Der untere Teil ist cylindrisch, der obere Teil ist von einer Fläche begrenzt, welche durch Drehung eines

Viertelkreises ab um die Achse cd erzeugt wird. In (β) ist nun der Körper in eine andere Lage gebracht, so dass die Drehachse zwar noch parallel zu P_2, aber nicht senkrecht zu P_1 ist. Die ersten Projektionen der beiden Grundkreise des cylindrischen Teiles werden nach (III, 39) bestimmt. Der Umriss des anderen Teiles ist aber die Projektion derjenigen Kurve auf demselben, welche die Berührungspunkte aller zur ersten Projektionsebene senkrechten Berührungsebenen enthält.

Es sei $e_2 f_2$ die Projektion eines Schnittes, welcher senkrecht zur Drehachse steht, $e_2 f_2 g_2$ diejenige des Kegels, welcher die Umdrehungsfläche in dem Schnittkreise berührt. An diesen Kegel legt man Berührungsebenen, welche senkrecht zu P_1 stehen. Man ziehe also durch die Spitze g_2 eine zu P_1 senkrechte Gerade, deren zweite Projektion $g_2 h_2$ auf OX senkrecht steht. Diese Gerade trifft die erweiterte Grundfläche des Berührungskegels in h_2. Man dreht nun den Berührungskreis um $e_2 h_2$ so weit, bis derselbe parallel zu P_2 wird, also im Aufriss in wahrer Gestalt erscheint, zieht alsdann die Tangente $h_2 k_2$ und fällt von dem Berührungspunkte k_2 eine Senkrechte auf $e_2 f_2$, welche die letztere in dem Punkte m_2 trifft. Die zu P_1 senkrechten Berührungsebenen des Kegels $e_2 f_2 g_2$ werden nun die Umdrehungsfläche in zwei Punkten berühren, welche dieselbe zweite Projektion m_2 haben (s. 24). Die ersten Projektionen derselben liegen senkrecht unter m_2 in den Abständen $m_1 n_1 = m' n_1 = k_2 m_2$ von der ersten Projektion $c_1 d_1$ der Drehachse. Auf diese Weise kann man beliebig viele Punkte des Umrisses bestimmen, und zugleich findet man hierdurch auch die zweite Projektion $z_2 m_2 d_2$ der Kurve. z_2 ist der Berührungspunkt der zur Achse senkrechten Tangente des Kreisbogens is. Der Umriss zeigt im Grundriss zwei Spitzen bei o_1 und r_1; diese letzteren Punkte liegen auf der an die zweite Projektion der Kurve gezogenen, zur Achse OX senkrechten Tangente.

Das gleiche Verfahren ist auch bei der Ringfläche, sowie bei allen anderen Umdrehungsflächen anwendbar.

VII. Abschnitt.

Durchschnitte krummer Flächen.

Die einfachsten Fälle von Durchschnitten krummer Flächen unter sich sind bereits in V. vorgekommen. Es sollen im Folgenden nun die allgemeinen Methoden gezeigt und an entsprechenden Beispielen erläutert werden. Hierbei findet auch mit Hülfe der in VI. aufgestellten Gesetze das Tangentenproblem für die gefundenen Durchschnittskurven entsprechende Verwendung.

1) Das erste Verfahren, Durchschnittspunkte zweier krummer Flächen F und f zu finden, welches auch in V schon mehrfach angewendet ist, besteht darin, dass man beide krummen Flächen mit einer Ebene E durchschneidet. Die Schnittkurven von E mit F und f müssen, weil sie in derselben Ebene liegen, sich schneiden, und die Schnittpunkte gehören dann beiden Flächen F und f an. Dieser Weg führt stets zum Ziele, wenn E die Flächen F und f entweder in geraden Linien oder in Kreisen schneidet. Sind aber diese Durchschnitte Kurven, welche punktweise konstruiert werden müssen, so sind ihre Schnittpunkte nur näherungsweise bestimmt. Zuweilen führt dann einer der später zu zeigenden Wege zum Ziele; im anderen Falle muss man sich mit einer solchen Annäherung, welche bei sorgfältiger Ausführung auch praktisch sehr wohl brauchbar ist, begnügen.

Durchschnitt zweier schiefen Cylinder.

Es seien (K_1, K_2), (L_1, L_2) die Projektionen zweier auf P_1 stehenden Cylinder, von denen der erstere in Fig. 139 eine Ellipse, der zweite einen Kreis zur Grundfläche hat. Man durchschneidet beide Cylinderflächen mittelst Ebenen, welche den Seitenlinien oder Achsen der Cylinder parallel sind, da solche Ebenen die Cylinderflächen in geraden Linien schneiden.

Ist nun $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ eine beliebige Seitenlinie des einen Cylinders, so ziehe man durch einen Punkt derselben, z. B. (a_1, a_2) die Gerade $(a_1 c_1, a_2 c_2)$ parallel zu den Seitenlinien des anderen Cylinders. Durch die ersten Spuren b_1 und c_1 dieser beiden Geraden geht nun die erste Spur $b_1 c_1$ der Ebene E, welche sich durch $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ und $(a_1 c_1, a_2 c_2)$ legen lässt, und diese Ebene ist den Seitenlinien beider Cylinder parallel. $b_1 c_1$ schneidet die Grundflächen in den Punkten b_1, f_1 bez. d_1, e_1. Zieht man durch diese die Seitenlinien $(a_1 b_1, a_2 b_2)$, $(f_1 r_1, f_2 r_2)$ bez. $(d_1 m_1, d_2 m_2)$, $(e_1 n_1, e_2 n_2)$, so treffen sich dieselben in den vier Punkten (g_1, g_2), (h_1, h_2),

(i_1, i_2), (l_1, l_2), welche dem gesuchten Durchschnitt angehören. Die Ebene E kann nun parallel mit sich selbst verschoben werden, dann schneidet sie beide Cylinderflächen stets in Seitenlinien, wodurch man neue Schnittpunkte erhält. Die Spuren aller Hülfsebenen sind parallel zu $b_1 c_1$. Man vergl. hiermit die Aufgabe (V, 9).

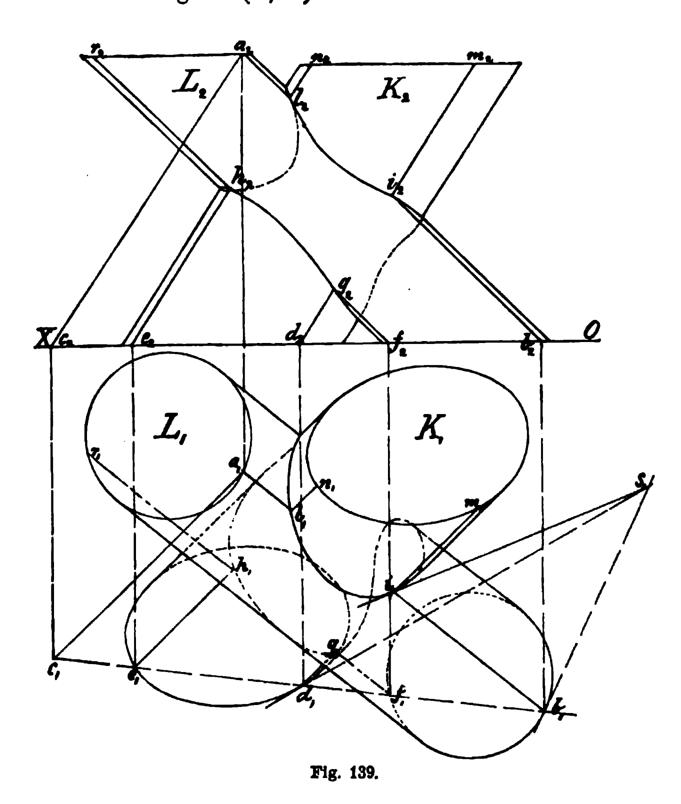


Fig. 139.

Um für einen beliebigen Punkt, z. B. $(i_1 i_2)$, die Tangente zu finden, legt man nach (VI, 6) an beide Cylinderflächen Berührungsebenen durch diesen Punkt. Die Spuren derselben sind die beiden Tangenten $b_1 s_1$ und $d_1 s_1$, welche man durch die Fusspunkte b_1 und d_1 der durch $(i_1 i_2)$ gehenden Seitenlinien an die Grundflächen ziehen kann. Die gesuchte Tangente ist als Schnittlinie jener beiden Berührungsebenen die Gerade $i_1 s_1$, deren zweite Projektion leicht zu finden ist.

2) Durchschnitt eines Cylinders mit einem Kegel (Fig. 140).

Man lege durch die Spitze des Kegels eine Gerade $(a_1 c_1, a_2 c_2)$, welche den Seitenlinien des Cylinders parallel ist. Jede Ebene, welche durch diese

Gerade gelegt wird und beide krummen Flächen schneidet, trifft dieselben in Seitenlinien; die ersten Spuren dieser Ebenen gehen sämtlich durch a_1.

Ist nun $a_1 b_1$ die erste Spur einer solchen Ebene, so schneidet dieselbe den Cylinder in den Seitenlinien $(f_1 l_1, f_2 l_2)$ und $(e_1 m_1, e_2 m_2)$; den Kegel dagegen in $(b_1 c_1, b_2 c_2)$ und $(c_1 d_1, c_2 d_2)$. Diese vier Seitenlinien

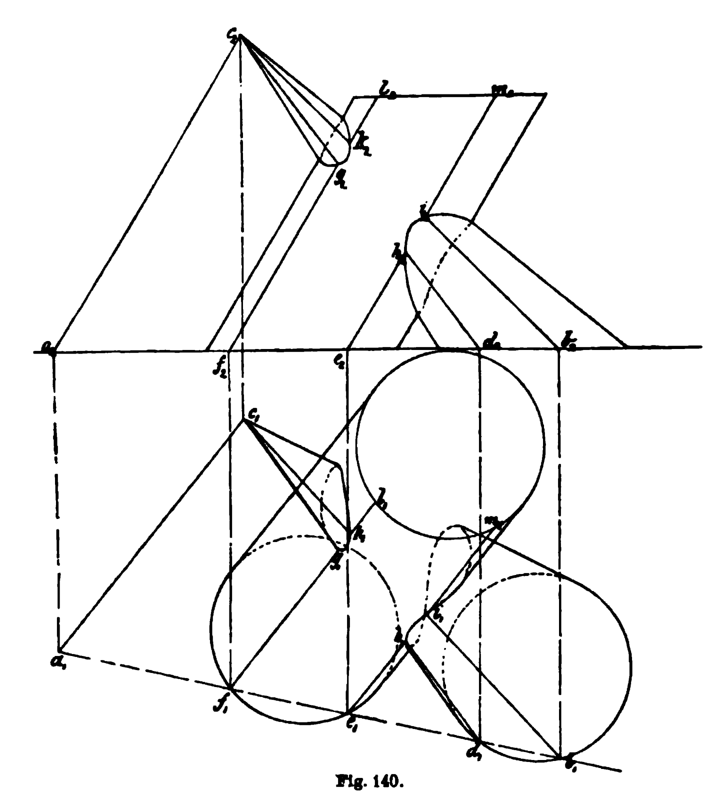


Fig. 140.

treffen sich in den Punkten (g_1, g_2), (h_1, h_2), (i_1, i_2), (k_1, k_2), welches nun Durchschnittspunkte der beiden krummen Flächen sind. Man führe hiernach die Konstruktion aus und zeichne auch für einen beliebigen Punkt der Durchschnittskurve die Tangente (vergl. V, 10).

3) Die vorige Aufgabe zu lösen, wenn der Kegel nicht mit seiner Grundfläche auf einer der Projektionsebenen steht (Fig. 141).

Anl. zur Aufl. Wir geben in Fig. 141 (β) den Gang der Lösung und überlassen die Ausführung in (α) dem Schüler. Es sei QRT die erweiterte Ebene der Grundfläche E des Kegels, QR ihre erste Spur. Durch die Spitze s ziehe man die Gerade **ab** parallel zu den Seitenlinien des

Cylinders und bestimme ihre Schnittdunkte a und b mit P_1 bez. E. Jede Ebene, welche durch ab geht und die Cylinder- und Kegelfläche schneidet, trifft dieselben in Seitenlinien. Die erste Spur einer solchen Ebene sei die durch a gehende Gerade ac, dann wird E von dieser Ebene in bc

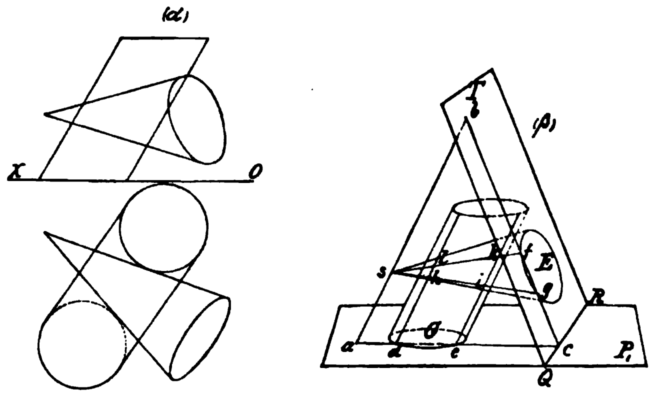


Fig. 141 (α und β).

geschnitten. Durch d und e zieht man auf der Cylinderfläche zwei Seitenlinien und durch f und g die Linien fs und gs auf der Kegelfläche. Diese Seitenlinien treffen sich in den vier Punkten h, i, k, l der gesuchten Durchschnittskurve.

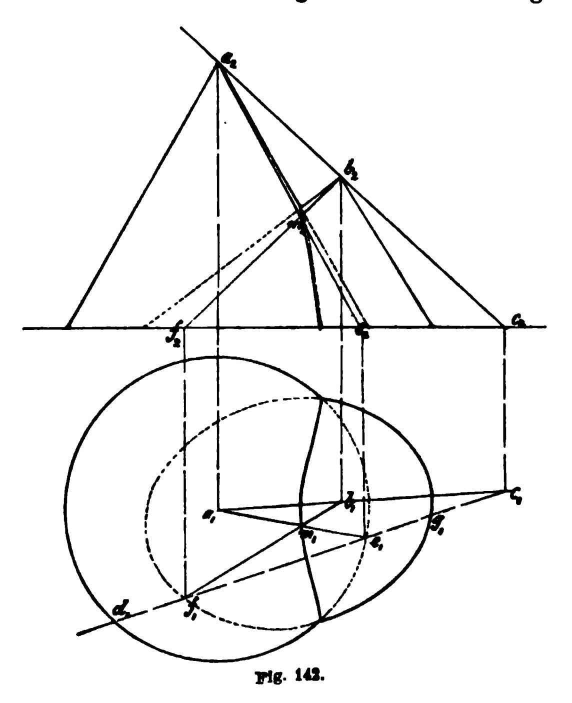


Fig. 142.

Man konstruiere auch für einen beliebigen Punkt der Kurve die Tangente.

4) **Durchschnitt zweier Kegel** (Fig. 142).

In Fig. 142 stehen beide Kegel mit ihren Grundflächen auf P_1. Die Hülfsebenen werden durch die Verbindungslinie der beiden Spitzen (a_1, a_2) und (b_1, b_2) gelegt. Die letztere schneidet P_1 in c_1. Durch c_1 ziehe man die erste Spur $c_1 d_1$ einer solchen Hülfsebene; dieselbe

trifft die Grundflächen in den Punkten d_1, e_1 bez. f_1 und g_1. Die Hülfsebene schneidet dann die Kegelflächen in den Seitenlinien (a_1e_1, a_2e_2) bez. (b_1f_1, b_2f_2), welche sich in dem der gesuchten Durchschnittskurve zugehörigen Punkte (m_1, m_2) treffen. Die beiden anderen Seitenlinien, in welchen die Kegelflächen von der Hülfsebene noch geschnitten werden, sind weggelassen, weil ihr Schnittpunkt nicht mehr innerhalb der gegebenen Grenzen der Kegelfläche liegt. Man bestimme für einen beliebigen Punkt des Durchschnittes die Tangente.

Sind die Grundflächen beider Kegel Kreise, so kann man den Durchschnitt auch durch Hülfsebenen finden, welche parallel zu P_1 sind.

Die vorige Aufgabe zu lösen, wenn die Verbindungslinie der Spitzen beider Kegel P_1 innerhalb der Grenzen der Zeichenfläche nicht mehr schneidet.

Zur weiteren Übung dienen folgende Aufgaben.

5) Durchschnitt eines auf P_1 stehenden Kegels mit einem Cylinder, dessen Achse zu P_1 parallel ist (Fig. 143).

Anl. zur Aufl. Man lege durch die Spitze (s_1, s_2) des Kegels die Gerade (a_1b_1, a_2b_2) parallel zu den Seitenlinien des Cylinders und bestimme die Durchschnitte derselben mit den Grundflächen des letzteren. Die Projektionen der Schnittpunkte sind (a_1, a_2) und (b_1, b_2). Durch die Gerade (a_1b_1, a_2b_2) lege man die Hülfsebenen, deren erste Spuren den Seitenlinien des Cylinders parallel sein müssen. Ist c_1d_1 die Spur einer solchen Ebene, so schneidet die letztere die Grundflächen des Cylinders in den beiden Geraden (a_1c_1, a_2c_2), (b_1d_1, b_2d_2). Diese treffen die Grundflächen in den Punkten (g_1, g_2), (i_1, i_2) und (h_1, h_2), (k_1, k_2); diejenige des Kegels wird in e_1 und f_1 geschnitten. Hiernach liegen in der angenommenen Hülfsebene die Seitenlinien (g_1h_1, g_2h_2), (i_1k_1, i_2k_2)

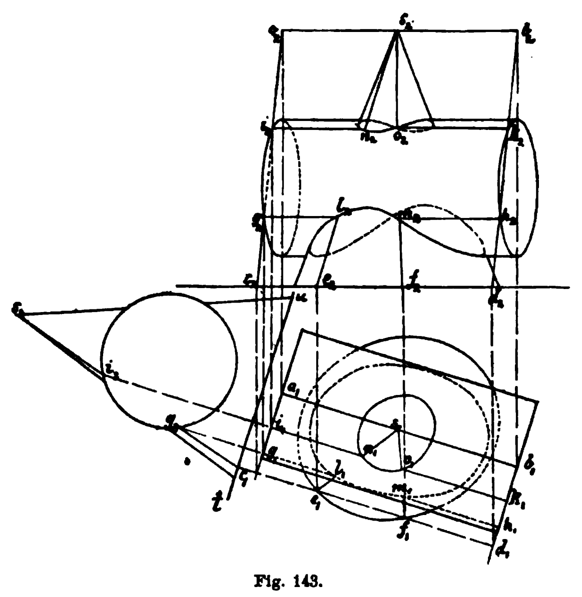


Fig. 143.

und $(e_1 s_1, e_2 s_2)$, $(f_1 s_1, f_2 s_2)$, welche die vier dem gesuchten Durchschnitte angehörigen Punkte (l_1, l_2), (m_1, m_2), (n_1, n_2), (o_1, o_2) ergeben.

Die Punkte g_1 und i_1 kann man auch durch eine Seitenprojektion auf eine zur Achse des Cylinders senkrechte Ebene tu bestimmen. Diese Konstruktion ist in Fig. 136 angedeutet. Man zeichne noch die Tangente für einen beliebigen Punkt des Durchschnittes.

Man löse noch die vorige Aufgabe, wenn die Seitenlinien des Cylinders nicht parallel zu P_1 sind. Man kann in diesem Falle einen ähnlichen Weg, wie oben angegeben, einschlagen, oder eine Projektion des ganzen Gegenstandes auf einer zu den Seitenlinien des Cylinders senkrecht stehenden Ebene benutzen.

6) Den Durchschnitt zweier Kegel zu finden, deren Grundflächen nicht in einer Ebene liegen. Tangentenkonstruktion.

7) Es sind drei Punkte A, B, C durch ihre Projektionen gegeben. Von einem Punkte D aus sind diejenigen Winkel gemessen, welche die Geraden AD, BD und CD mit dem in D zu P_1 errichteten Lote bilden. Man soll hieraus die Lage des Punktes D (d. h. seine Projektionen) bestimmen.

Mit Hülfe der Durchschnitte von drei auf P_1 stehenden geraden Kreiskegeln zu lösen.

Durchschnitte von Umdrehungsflächen mit Cylindern oder Kegeln.

8) Hülfssätze.

α) Zwei Cylinderflächen, welche parallele Achsen haben, schneiden sich in Seitenlinien. Sind nämlich G_1 und G_2 (Fig. 144) ihre in der Ebene E liegenden Grundflächen, ferner a und b Schnittpunkte der Umfänge der letzteren, so liegen die Geraden ab und cd, welche man durch a und c parallel zu den Achsen zieht, auf beiden Cylinderflächen.

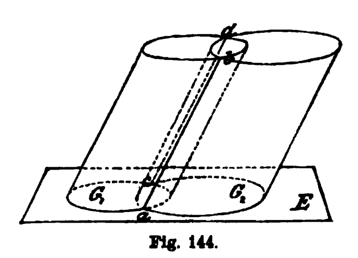


Fig. 144.

β) Zwei Kegelflächen, welche die Spitze gemeinschaftlich haben, schneiden sich in Seitenlinien. Beweis leicht.

9) Durchschnitt eines Umdrehungsellipsoids mit einem schiefen Cylinder (Fig. 145).

Die Drehachse $(c_1 d_1, c_2 d_2)$ des Ellipsoids (E_1, E_2) stehe senkrecht zu P_1. Man durchschneide das Ellipsoid mittelst einer zu P_1 parallelen Ebene, dann ist der Durchschnitt ein Kreis, dessen zweite Projektion die Gerade $e_2 f_2$ und erste Projektion der Kreis $e_1 f_1$ ist. Man betrachte diesen

Kreis als Grundfläche eines Cylinders, dessen Achse ($g_1 h_1$, $g_2 h_2$) mit derjenigen des gegebenen Cylinders parallel ist. Der erweiterte Cylinder schneidet P_1 in einem Kreise vom Halbmesser $e_2 g_2$ mit dem Mittelpunkt h_1, und dieser Kreis trifft in k_1 und l_1 den Umfang der Grundfläche des gegebenen Cylinders. Beide Cylinder schneiden sich deshalb in den

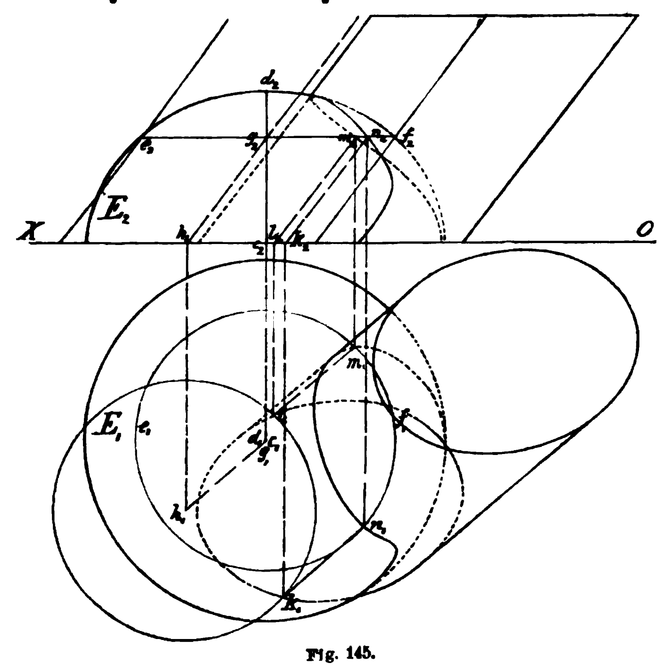


Fig. 145.

Seitenlinien ($k_1 n_1$, $k_2 n_2$) und ($l_1 m_1$, $l_2 m_2$). Die letzteren treffen nun den Kreis ($e_1 f_1$, $e_2 f_2$), weil sie mit diesem auf derselben Cylinderfläche liegen, in den Punkten (n_1, n_2), (m_1, m_2), welche der gesuchten Durchschnittskurve angehören.

Man ziehe eine Tangente an die Schnittlinie.

10) Den Durchschnitt einer Ringfläche mit einem Cylinder von elliptischer Grundfläche zu zeichnen.

11) Ebenso den Durchschnitt der Umdrehungsfläche, Fig. 94 α, mit einem Cylinder zu finden.

12) Die in (9) angegebene Methode ist auch verwendbar, wenn die eine der Flächen nicht gerade eine Umdrehungsfläche ist, sobald nur alle Schnitte, welche z. B. parallel zu P_1 sind, Kreise werden. — Dies trifft bei dem Beispiel (1), Fig. 139, zu, wo der eine Cylinder eine kreisförmige Grundfläche hat. Man konstruiere den Durchschnitt auch auf diese Weise.

13) Den Durchschnitt eines Umdrehungsellipsoids mit einem Kegel zu finden (Fig. 146).

Die Grundfläche des Kegels sei eine in P_1 liegende Ellipse. Das Ellipsoid ist durch die Drehung einer halben Ellipse um ihre kleine Achse entstanden und liegt mit seiner Grundfläche, einem Kreis, dessen Durchmesser gleich der grossen Achse ist, ebenfalls auf P_1.

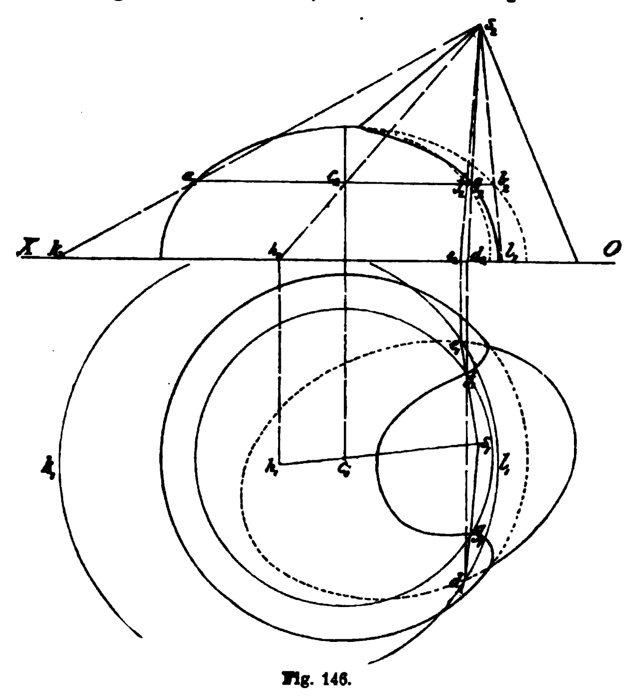


Fig. 146.

Man durchschneide wie in (9) das Ellipsoid mit einer Ebene $a_2 b_2$, welche parallel zu P_1 ist, und betrachte den Durchschnittskreis als Grundfläche eines Kegels, dessen Spitze (s_1, s_2) diejenige des gegebenen Kegels ist. Wird nun diese neue Kegelfläche erweitert, so schneidet sie P_1 in einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Durchschnitt h_1 der durch (s_1, s_2) und (c_1, c_2) gehenden Achse mit P_1 ist. Die zweite Projektion dieses Kegels ist das Dreieck $k_2 s_2 l_2$, der Halbmesser des Schnittkreises mit P_1 ist gleich $k_2 h_2$. Der letztere trifft die Grundfläche des gegebenen Kegels in d_1 und e_1, folglich schneiden sich beide Kegelflächen nach (8, β) in den Seitenlinien $(d_1 s_1, d_2 s_2)$ und $(e_1 s_1, e_2 s_2)$. Die Punkte, in welchen diese den Kreis $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ treffen, liegen auf der gesuchten Durchschnittskurve.

Für einen beliebigen Punkt des Durchschnittes bestimme man die Tangente.

14) Den Durchschnitt einer Ringfläche mit einem Kegel zu finden.

Durchschnitt zweier Umdrehungsflächen.

15) Zwei Umdrehungsflächen mit gemeinschaftlicher Drehachse schneiden sich nur in Kreisen.

Es seien M und L (Fig. 147) zwei Kurven und G eine Gerade, welche in derselben Ebene liegen. Werden die Kurven um G gedreht, so beschreiben dieselben zwei Umdrehungsflächen, und die Schnittpunkte a und b durchlaufen Kreise, deren Halbmesser die senkrechten Abstände der Punkte a und b von G sind. Diese Kreise liegen auf beiden Umdrehungsflächen zugleich, sie sind also die Durchschnitte derselben.

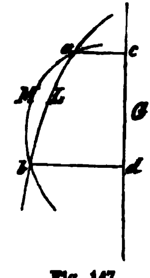


Fig. 147.

Eine Kugelfläche ist eine Umdrehungsfläche von der besonderen Eigenschaft, dass jeder Durchmesser derselben als eine Drehachse angesehen werden kann. Diese Eigenschaft der Kugel dient dazu, die Durchschnitte von zwei Umdrehungsflächen zu finden, deren Drehachsen sich schneiden.

16) Den Durchschnitt der beiden geraden Kreiskegel (K_1, K_2), (L_1, L_2) zu finden (Fig. 148).

Es wird vorausgesetzt, dass die Drehachsen $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ und $(c_1 d_1, c_2 d_2)$ der beiden Kegel parallel zu P_1 liegen und sich in (m_1, m_2) schneiden. Die ersten Projektionen der Grundflächen erscheinen dann als gerade Linien, welche senkrecht zu den entsprechenden Achsen stehen. Um den Schnittpunkt m_1 zeichnet man mit beliebigem Halbmesser einen die äussersten Seitenlinien der ersten Projektionen schneidenden Kreis. Derselbe kann als Projektion einer Kugel betrachtet werden, für welche sowohl die Achse des einen, wie die des anderen Kegels Drehachse sein kann. Diese Kugel schneidet deshalb beide Kegelflächen nach (15)

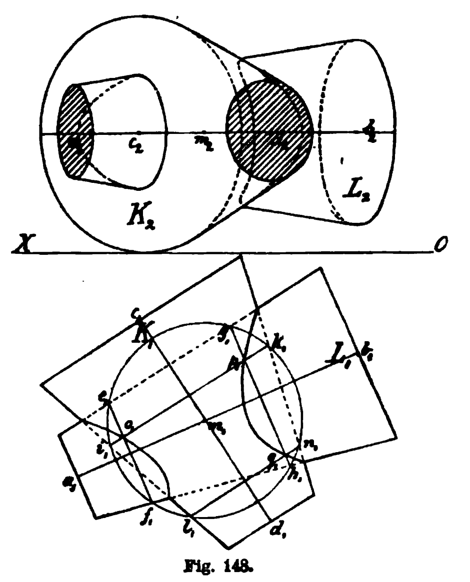


Fig. 148.

in Kreisen, deren Projektionen die Geraden e_1f_1, g_1h_1 bez. i_1k_1, l_1n_1 sind. Da diese Kreise auf derselben Kugelfläche liegen, so treffen sie sich, und die Schnittpunkte o_1, p_1, q_1 sind demnach die ersten Projektionen von Punkten der gesuchten Durchschnittskurve. Um andere Punkte zu erhalten, ist der Halbmesser der angenommenen Kugel zu verändern.

Man bestimme auch die zweite Projektion der Durchschnittskurve und lege durch einen beliebigen Punkt eine Tangente an dieselbe.

17) Durchschnitt zweier Umdrehungsellipsoide (Fig. 149).

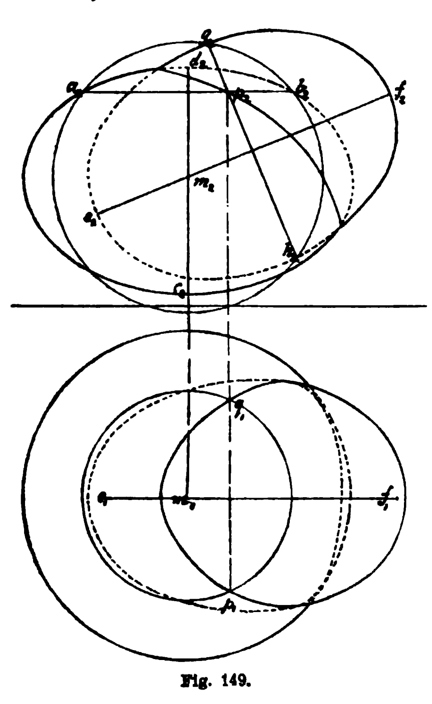


Fig. 149.

Die Drehachsen beider Ellipsoide liegen in einer zu P_2 parallelen Ebene und treffen sich im Punkte (m_1, m_2). Ihre zweiten Projektionen sind c_2d_2 und e_2f_2. Man zeichne um m_2 als Mittelpunkt einen Kreis, welcher die zweite Projektion einer Kugel darstellt. Da jede der Achsen der beiden Ellipsoide als Drehachse für die Kugelfläche angesehen werden kann, so schneidet die letztere die beiden ersten in Kreisen. Die zweiten Projektionen derselben sind die Geraden a_2b_2 und g_2h_2, welche sich nun in einem Punkte p_2 des gesuchten Durchschnittes treffen. In p_2 fallen übrigens die Projektionen von zwei Punkten der Kurve zusammen.

Man konstruiere hiernach die beiden Projektionen des Durchschnittes und eine Tangente desselben. Die erste Projektion des einen Ellipsoids ist ein Kreis, weil die Drehachse desselben senkrecht zu P_1 steht. Die Projektion des andern Ellipsoids kann nach (VI, 39) bestimmt werden.

VIII. Abschnitt.

Untersuchung krummer Flächen.

In den vorhergehenden Abschnitten sind ausser der Cylinder-, Kegel- und Kugelfläche noch einige andere krumme Flächen, soweit als nötig, hinsichtlich ihrer Eigenschaften in Bezug auf Berührungsebenen betrachtet worden. Es sollen nun im folgenden weitere Eigenschaften solcher Flächen, welche für die darstellende Geometrie von Wichtigkeit sind, näher untersucht und elementar begründet werden. Zunächst betrachten wir diejenigen Umdrehungsflächen, welche durch Drehung eines Kegelschnittes um eine Hauptachse erzeugt werden.

Das Umdrehungsellipsoid.

1) Der Durchschnitt einer Ebene E mit einem Umdrehungsellipsoid ist eine Ellipse. Dieselbe geht in einen Kreis über, wenn E senkrecht zur Drehachse steht.

Zum Beweise dient folgender Hülfssatz.

Drei Ebenen E_1, E_2, E_3, welche durch dieselbe Gerade ab gehen, schneiden auf parallelen Geraden G_1 und G_2 proportionierte Stücke ab (Fig. 150).

Die parallelen Geraden G_1 und G_2 mögen die drei Ebenen in c, d, e bez. f, g, h treffen. Legt man durch G_1 und G_2 eine Ebene, so schneidet dieselbe E_1, E_2 und E_3 in den Geraden cf, dg, eh, welche verlängert in einem Punkte m der Linie ab sich treffen müssen. Geraden, welche durch einen Punkt gehen, schneiden aber nach einem bekannten Satze der Planimetrie auf parallelen Linien proportionierte Stücke ab. Es verhält sich also:

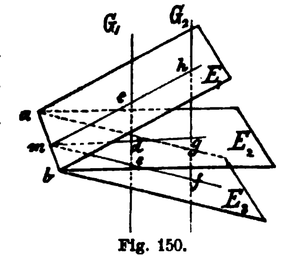


Fig. 150.

$$cd : ce = fg : fh.$$

Umgekehrt folgt hieraus: Werden beliebig viele parallele Geraden von zwei Ebenen E_1 und E_2 geschnitten, und trägt man von denjenigen Schnittpunkten, welche in der einen Ebene, z. B. E_1 liegen, auf diesen Parallelen Strecken ab, welche dasselbe Verhältnis zu den von E_1 und E_2 abgeschnittenen Stücken haben, so liegen die Endpunkte jener Strecken in einer durch die Schnittlinie von E_1 und E_2 gehenden Ebene.

Es sei das Ellipsoid AHCKBD durch Drehung der Ellipse ABCD um die kleine Achse BD entstanden. Dreht man den Hauptkreis AFCG gleichzeitig um dieselbe Achse, so beschreibt dieser eine Kugelfläche. AHCK sei der von dem Endpunkt der grossen Achse durchlaufene Kreis, welcher der zu BD senkrecht stehende grösste Kreis der Kugel ist. Das von einem beliebigen Punkte M der Kugelfläche auf die Ebene dieses Kreises gefällte Lot MQ trifft das Ellipsoid in einem Punkte P. Wenn man nun durch M und die Drehachse eine Ebene legt, so schneidet diese das Ellipsoid in der Ellipse BKDH, und die Kugel in dem Hauptkreise derselben. Diese Ellipse stellt aber eine der Lagen der beweglichen Ellipse dar und hat also dieselben Achsen wie diese. Bezeichnet man also AO mit a, BO mit b, so verhält sich nach (IV, 5):

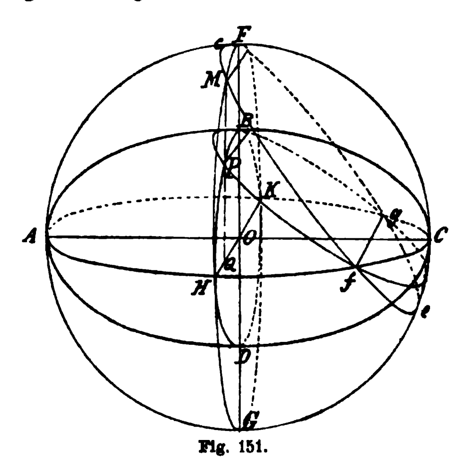


Fig. 151.

$$PQ : MQ = b : a.$$

Alle Lote, welche man von beliebigen Punkten der Kugelfläche auf die Ebene des Kreises AHCK fällen kann, werden deshalb von der Oberfläche des Ellipsoids nach diesem Verhältnis geteilt.

Nun sei der Kreis ce ein ebener Durchschnitt der Kugel, fg seine Schnittlinie mit dem Kreise AKCH. Fällt man von allen Punkten des Umfanges dieses Kreises Lote auf die Ebene AKCH, so werden dieselben durch die Oberfläche des Ellipsoids sämtlich nach demselben Verhältnis ($PQ : MQ = b : a$) geteilt; folglich liegen die Schnittpunkte der Lote mit dem Ellipsoid nach dem vorhin angegebenen Hülfssatze in einer Ebene, welche durch fg geht. Jene Schnittpunkte bilden demnach die Durchschnittskurve dieser Ebene mit dem Ellipsoid. Da die letztere als eine schiefe Projektion des Kreises erscheint, so folgt, dass dieselbe eine Ellipse ist.

Leicht ergiebt sich hieraus, dass parallele Schnitte des Ellipsoids ähnliche Ellipsen (d. h. von gleichem Achsenverhältnis) sind, weil dieselben als Projektionen von parallel liegenden Kreisen der Kugel angesehen werden können.

Mit Berücksichtigung von (VI, 5 Anm.) ergiebt sich leicht, dass der

eben bewiesene Satz sowie auch der folgende für dasjenige Ellipsoid gültig sind, welches durch Drehung einer Ellipse um ihre grosse Achse entsteht.

2) Es sei ABCD (Fig. 152) die zweite Projektion eines Umdrehungsellipsoids, wobei vorausgesetzt wird, dass die Drehachse BD parallel zu P_2 ist. Der um AC gezeichnete Kreis stellt die Projektion der umbeschriebenen Kugel dar, während der von den Endpunkten der grossen Achse AC beschriebene Kreis als die Gerade AC erscheint. Legt man um die Kugel eine berührende Cylinderfläche, deren Seitenlinien parallel zu P_2 sind, so wird die Projektion derselben von zwei parallelen Tangenten EH und JG begrenzt. Sie berührt die Kugelfläche in einem grössten Kreise, dessen Projektion die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte H und J ist. Fällt man nun von allen Punkten dieses Kreises Lote auf die Ebene AC, so treffen diese das Ellipsoid in einer Ellipse, deren Projektion durch die Gerade KL dargestellt wird (HK und JL $\perp$ AC). Die Tangenten der Ellipse ABCD in den Punkten K und L treffen nach (IV, 8) in E und G mit den Tangenten EH und GL auf AC zusammen.

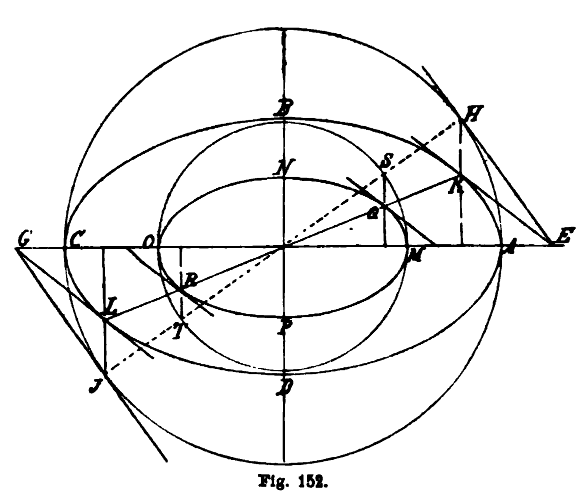


Fig. 152.

Legt man durch die Kugel und durch das Ellipsoid eine Ebene parallel zu P_2, so wird das letztere in einer Ellipse MNOP und die erste in dem Hauptkreise derselben getroffen. Als parallele Schnitte sind aber die Ellipsen MNOP und ABCD ähnlich, und in Fig. 152 konzentrisch und ähnlich gelegen. Die Punkte Q und R, in welchen KL die Ellipse MNOP trifft, können durch die zur Achse AC Senkrechten SQ und TR bestimmt werden (s. die Aufgabe IV, 11). Die Tangenten in Q und R sind wegen der Ähnlichkeit parallel zu EK und GL. Das letztere gilt aber für alle Punkte des Schnittes KL.

Da nun alle derartigen Tangenten eine Cylinderfläche bilden, so folgt hieraus:

Jede das Ellipsoid umhüllende Cylinderfläche berührt dasselbe in einer Ellipse, deren Ebene durch den Mittelpunkt des Ellipsoids geht.

Man löse nach diesem Satze die Aufgabe (VI, 25).

3) Man beweise ebenso, dass die Kurve, in welcher ein umhüllender Kegel ein Umdrehungsellipsoid berührt, eine Ellipse ist und löse hiernach die Aufgabe VI, 24.

4) Die Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden G mit einem gegebenen Umdrehungsellipsoid zu finden.

Anl. zur Aufl. Man lege durch G eine Ebene, welche das Ellipsoid in einer Ellipse schneidet. Bestimme die Achsen der Ellipse und ermittele nach (IV, 11) die Punkte, in welchen G die Ellipse trifft.

5) Zwei konzentrische Umdrehungsellipsoide (d. h. solche mit gemeinsamem Mittelpunkt), deren Meridianschnitte in denjenigen Achsen übereinstimmen, welche nicht Drehachsen sind, schneiden sich in zwei Ellipsen (Fig. 153).

Sind nämlich BCDE und FHGJ zwei in derselben zu P_2 parallelen Ebene liegende Ellipsen, mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte A, deren halbe Achsen AD und AF gleich gross sind, und drehen sich dieselben um die Achsen BC bez. HJ, so kommt in beiden Fällen AD sowohl als AF in senkrechte Lage zu P_2. A ist deshalb die Projektion von zwei gemeinsamen Punkten der Oberfläche beider Ellipsoide. Legt man durch die Schnittpunkte Q und R eine Ebene senkrecht zu P_2, so ist deren Projektion die durch A gehende Gerade QR. Diese Ebene schneidet jede der Umdrehungsflächen nach (1) in einer Ellipse, welche aber in diesem Falle zusammenfallen, weil beide die Achsen, nämlich QR, und die durch A gehende zu P_2 senkrecht stehende gemeinschaftlich haben. In den Endpunkten der letzteren berühren sich die Ellipsoide. Ebenso ist die Gerade ML die Projektion einer zweiten auf beiden krummen Flächen liegenden Ellipse.

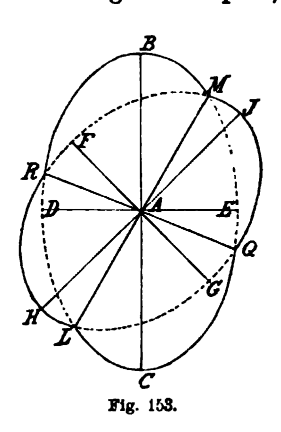


Fig. 153.

Dieser Satz dient zur Lösung der Aufgabe: Den Durchschnitt zweier Umdrehungsellipsoide zu finden, deren Drehachsen sich nicht schneiden*).

Anl. z. Aufl. Es seien E′ und E″ die zweiten Projektionen zweier Umdrehungsellipsoide, deren Drehachsen cd und ef parallel zu P_2 sind. In diesem Falle sind die Umrisse den Meridianschnitten kongruent. Man zeichne nun ein drittes Umdrehungsellipsoid E‴, welches dem einen z. B.

*) S. Darstellende Geometrie von Dr. Chr. Wiener, Bd. II, S. 282.

E' ähnlich und in ähnlicher Lage ist und dessen Mittelpunkt A_2 mit demjenigen des Ellipsoids E'' zusammenfällt. Die Bedingung ist erfüllt, wenn die Achsen von E''' parallel und proportioniert denen von E' sind. Ferner sollen noch diejenigen Achsen von E'' und E''' gleich gross sein, welche nicht Umdrehungsachsen sind. Die durch A_2 gehende Gerade $l\,m$ stellt alsdann die Projektion einer der Durchschnittsellipsen von E'' und E''' dar. Nun werden E', E'' und E''' von jeder zu $l\,m$ parallelen Ebene in ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen geschnitten; man lege deshalb die Achse OX so, dass die Projektionen dieser Ellipsen auf P_1 zu Kreisen werden, dann erhält man die erste Projektion des Durchschnittes leicht und hieraus auch die zweite Projektion desselben.

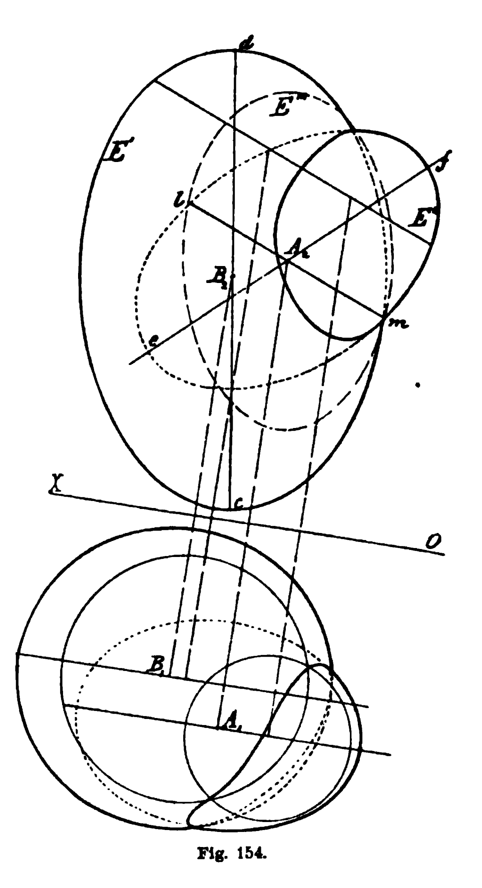


Fig. 154.

Das einschalige Umdrehungshyperboloid.

6) Wird eine Gerade AB um eine andere Gerade CD, welche mit AB nicht in einer Ebene liegt, gedreht, so durchläuft AB eine krumme Fläche, welche man ein Umdrehungshyperboloid nennt. Es lässt sich nämlich zeigen, dass alle durch die Drehachse CD gelegten Schnitte dieser Fläche kongruente Hyperbeln sind, woraus sich dann leicht die zweite Entstehungsweise ergiebt.

Die Drehachse $(c_1 d_1, c_2 d_2)$ stehe senkrecht zu P_1, so dass ihre erste Projektion der Punkt $(c_1 d_1)$ ist; $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ seien die beiden Projektionen der beweglichen Geraden, wenn dieselbe parallel zu P_2 liegt. In diesem Falle ist $a_1 b_1$ parallel zur Achse OX. Der Abstand der beiden Geraden $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ und $(c_1 d_1, c_2 d_2)$ (Achse der Windschiefen) ist gleich dem Abstand des Punktes c_1 von $a_1 b_1$. Ein beliebiger Punkt (m_1, m_2),

welcher auf der beweglichen Geraden liegt, beschreibt bei der Umdrehung einen Kreis mit dem Halbmesser $c_1 m_1$. Die erste Projektion desselben ist der um c_1 mit $c_1 m_1$ als Halbmesser gezeichnete Kreis, und die zweite Projektion die Gerade $g_2 h_2$, welche gleich dem Durchmesser $g_1 h_1$ und parallel zur Achse OX ist. Man sieht leicht, dass die Punkte g_2 und h_2 dem Umrisse der zweiten Projektion der gesuchten Fläche angehören. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man, wie in Fig. 155 angegeben ist, beliebig viele Punkte des Umrisses finden. Aus der ersten Projektion geht hervor, dass dieser Umriss zugleich die wahre Gestalt eines durch die Drehachse gehenden und zu P_2 parallelen Schnittes der Fläche ist. Ferner ist aus der Entstehungsweise der Fläche klar, dass jeder andere Achsenschnitt der Fläche dieselbe Gestalt haben muss.

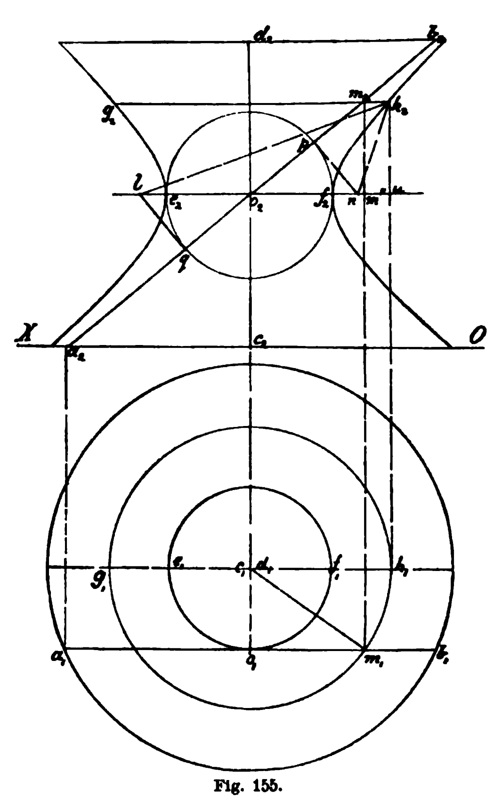


Fig. 155.

Um zu zeigen, dass der oben gefundene Umriss (oder Achsenschnitt) eine Hyperbel ist, ziehe man durch o_2 die Gerade $e_2 f_2$ parallel zu OX und mache $o_2 e_2 = o_2 f_2$ gleich der Achse $c_1 o_1 = r$ der beiden Windschiefen $(c_1 d_1,\ c_2 d_2)$, $(a_1 b_1,\ a_2 b_2)$. Dann ist $e_2 f_2$ die zweite Projektion des kleinsten Kreises, welcher auf der Umdrehungsfläche möglich ist. Um o_2 zeichne man mit dem Halbmesser r einen Kreis und ziehe in den Punkten p und q, in welchen derselbe $a_2 b_2$ schneidet, die Tangenten ql und pn. Diese treffen $e_2 f_2$ in l bez. n. Es sei nun:

$c_1 m_1 = c_1 h_1 = o_2 u = x;\ a_2 o_2 = L,\ a_2 c_2 = A,\ h_2 u = y,\ o_2 l = o_2 n = \xi,$

dann ist

$$(1) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} lh_2^2 = y^2 + (\xi + x)^2 \\ nh_2^2 = y^2 + (\xi - x)^2. \end{array} \right.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $a_2 c_2 o_2$ und $o_2 lq$ folgt:

$$lo_2 : o_2 q = a_2 o_2 : a_2 c_2 \quad \text{oder}$$
$$\xi : r = L : A$$
$$\xi = \frac{rL}{A}.$$

Ferner sind die Dreiecke $a_2 c_2 o_2$ und $o_2 m_2 m''$ ähnlich, woraus sich ergiebt:

$$m'' m_2 : o_2 m'' = o_2 c_2 : a_2 c_2,$$

oder da $m'' m_2 = h_2 u = y$, ferner $o_2 m'' = o_1 m_1 = \sqrt{x^2 - r^2}$,

$$\text{und } o_2 c_2 = \sqrt{L^2 - A^2},$$
$$y : \sqrt{x^2 - r^2} = \sqrt{L^2 - A^2} : A$$
$$y = \frac{\sqrt{(x^2 - r^2)(L^2 - A^2)}}{A}.$$

Setzt man die gefundenen Worte von ξ und y in die Gleichungen (1), so kommt:

$$lh_2^2 = \frac{(x^2 - r^2)(L^2 - A^2)}{A^2} + \left(\frac{rL}{A} + x\right)^2,$$
$$nh_2^2 = \frac{(x^2 - r^2)(L^2 - A^2)}{A^2} + \left(\frac{rL}{A} - x\right)^2,$$

oder nach gehöriger Reduktion:

$$lh_2^2 = \frac{L^2 x^2}{A^2} + \frac{2rLx}{A} + r^2,$$
$$nh_2^2 = \frac{L^2 x^2}{A^2} - \frac{2rLx}{A} + r^2,$$

woraus folgt:

$$lh_2 = \frac{Lx}{A} + r \quad \text{und} \quad nh_2 = \frac{Lx}{A} - r.$$

Hieraus ergiebt sich endlich: $lh_2 - nh_2 = 2r$.

Es ist also die Differenz der Entfernungen des Punktes h_2 von den beiden Punkten l und n gleich 2r. Da dasselbe für jeden anderen Punkt der Kurve ebenso bewiesen werden kann, so folgt nach IV, 32, dass der Achsenschnitt eine Hyperbel ist, deren Hauptachse die Länge 2r hat.

Die Fläche lässt sich auch gut durch eine Reihe von Lagen der beweglichen Geraden (Erzeugenden) darstellen (Fig. 156). Die letzteren erscheinen in der zweiten Projektion als einhüllende Tangenten des Umrisses. Die ersten Projektionen der Erzeugenden berühren sämtlich diejenigen des Kehlkreises; die zweiten Projektionen bestimmt man leicht durch Projicieren der Endpunkte. Es ist in Fig. 156 angenommen, dass

die Abschnitte der Erzeugenden zu beiden Seiten desjenigen Punktes, in welchem sie den Kehlkreis treffen, gleich gross sind. Das Hyperboloid erscheint deshalb durch zwei gleiche Kreise begrenzt, deren erste Projektionen zusammenfallen und deren zweite Projektionen die Geraden $a_2 b_2$, $d_2 e_2$ sind. Die vollständige Fläche erstreckt sich natürlich bis ins Unendliche.

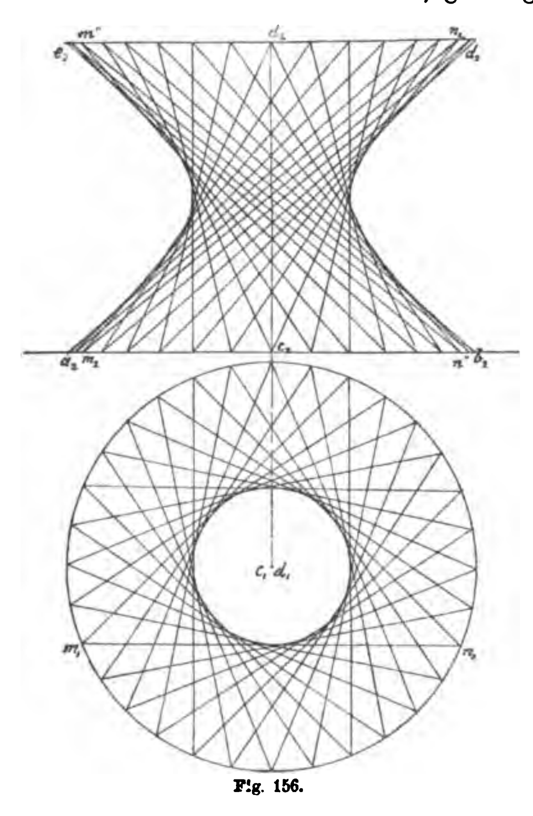


Fig. 156.

Ist $(m_1 n_1, m_2 n_2)$ eine der Erzeugenden, so ist leicht zu sehen, dass diejenigen Gerade, deren erste Projektion $m_1 n_1$ und zweite Projektion $m'' n''$ ist, bei der Drehung um die Achse $(c_1 d_1, c_2 d_2)$ dasselbe Hyperboloid durchläuft. Es giebt demnach zwei Scharen von Erzeugenden auf dieser Fläche. Durch einen beliebigen Punkt M des Hyperboloids gehen demnach zwei Geraden, welche den beiden Scharen angehören. Die Ebene, welche durch diese Geraden gelegt werden kann, ist demnach die Berührungsebene für den Punkt M (VI, 4). Sie schneidet aber in jenen Geraden das Hyperboloid und berührt dasselbe in M.

7) Der Durchschnitt eines Umdrehungshyperboloids mit einer Ebene ist eine Ellipse, eine Hyperbel, Parabel, oder besteht aus zwei Geraden (Fig. 157).

Der letzte Fall ist durch das vorhergehende schon erledigt. Wir wollen noch den elliptischen Schnitt näher betrachten, welcher entsteht, wenn die schneidende Ebene Q sämtliche Erzeugenden der beiden Scharen trifft.

Ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Umdrehungsachse liegt, und welcher die Hyperbel in einem Punkte G berührt (d. h. in G die Tangente mit der erzeugenden Hyperbel gemeinschaftlich hat), beschreibt bei

der Drehung um CD eine Kugel K_1. Diese berührt das Hyperboloid in dem von G durchlaufenen Kreise GH. Es seien nun K_1 und K_2 diejenigen Kugeln oberhalb und unterhalb Q, welche das Hyperboloid in den Kreisen GH bez. JL, und die Ebene Q in den Punkten A, bez. B berühren. Durch einen beliebigen Punkt M der Durchschnittskurve von Q mit dem Hyperboloid ziehe man auf der letzteren Fläche die Erzeugende ON. Dieselbe berührt die Kugeln K_1 und K_2 in den Punkten E und F. Man ziehe noch AM und BM, welche ebenfalls Tangenten der Kugeln sind, dann ist:

$$AM = EM,$$
$$BM = FM;$$

folglich: $AM + BM = EM + FM = EF$.

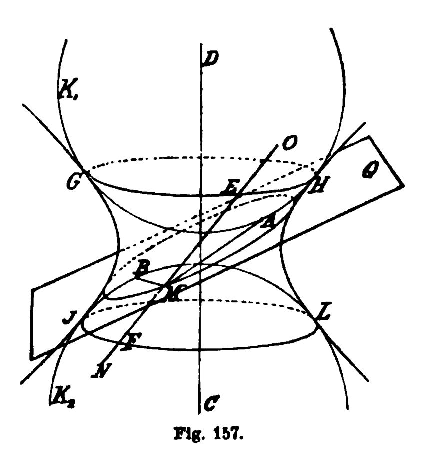


Fig. 157.

Die Abschnitte der Erzeugenden, welche zwischen den beiden Berührungskreisen GH und JL liegen, haben aber sämtlich die Länge EF; folglich ist für jeden Punkt der Durchschnittskurve die Summe der Entfernungen von A und B dieselbe. Die Kurve ist deshalb nach (IV, 3) eine Ellipse.

Ist die Schnittebene parallel zu zwei Seitenlinien, so ist die Schnittfigur eine Hyperbel, oder sie besteht aus zwei Geraden. Der Beweis ist in gleicher Weise wie oben zu führen. Man vergl. auch die Beweise in (IV, 4) und (IV, 37).

Bei welcher Lage der Schnittebene entsteht eine Parabel?

Diejenige Umdrehungsfläche, welche durch Drehung einer Hyperbel um ihre Hauptachse entsteht, wird ein zweischaliges Hyperboloid genannt.

Aufgaben: 8) Die Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden mit einem einschaligen oder zweischaligen Hyperboloid zu finden.

9) An ein zweischaliges Hyperboloid durch einen auf demselben gegebenen Punkt eine Berührungsebene zu legen.

10) Von einem gegebenen Punkte aus Berührungsebenen an ein Umdrehungshyperboloid (ein- oder zweischaliges) zu legen. (Die Berührungskurve ist zu zeichnen.)

11) An ein Umdrehungshyperboloid Berührungsebenen zu legen, welche einer gegebenen Geraden parallel sind.

12) Die Aufgaben 9, 10, 11 für diejenige Fläche zu lösen, welche durch Drehung einer Parabel um ihre Achse entsteht (Umdrehungsparaboloid).

Anmerkung. Über den Beweis des Satzes 6 s. auch Seite 22 des IV. Teiles.

Das hyperbolische Paraboloid.

13) Es sei abcd (Fig. 158) ein windschiefes Viereck, und das Parallelogramm aecd die gerade oder schiefe Projektion desselben auf eine Ebene E, welche durch die beiden Seiten ad und cd gelegt ist. Man ziehe die Gerade hi zwischen ad und bc parallel zu der projicierenden Ebene abe; ebenso die Gerade fg zwischen ab und de parallel zu der Ebene bce, dann werden fg und hi sich in einem Punkte m treffen.

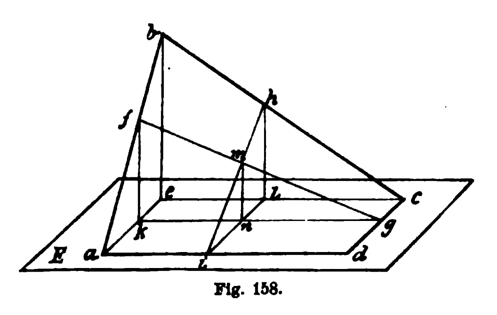


Fig. 158.

Projiciert man nämlich beide Geraden auf E, und sind gk bez. il die Projektionen, so ist: fk || be || hl; gk || ce || ad; il || ae || cd. Durch den Schnittpunkt n ziehe man die projicierende Gerade mn. Betrachtet man nun m als Punkt der Geraden fg, so findet man leicht:

$$\frac{mn}{fk} = \frac{gn}{gk} \quad \text{und} \quad \frac{fk}{be} = \frac{ak}{ae},$$

woraus durch Multiplikation sich ergiebt:

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad mn = \frac{be \cdot gn \cdot ak}{gk \cdot ae}.$$

Nimmt man an, m läge auf ih, so ergiebt sich ebenso

$$\frac{mn}{hl} = \frac{in}{il}, \quad \text{und} \quad \frac{hl}{be} = \frac{cl}{ce},$$

woraus folgt:

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad mn = \frac{be \cdot cl \cdot in}{ce \cdot il}.$$

Berücksichtigt man nun, dass $cl = gn$, $in = ak$, $ce = gk$ und $il = ae$ ist, so ergiebt sich, dass die in (1) und (2) gefundenen Ausdrücke für mn gleich gross sind. Folglich ist m der Schnittpunkt der beiden Geraden fg und ih.

Gleitet nun die Gerade ih an den beiden festen Geraden ad und bc derart, dass sie stets parallel der Ebene abe bleibt, so beschreibt sie eine krumme Fläche. Dieselbe Fläche wird aber auch von der Geraden fg durchlaufen, wenn diese an den beiden Geraden ab und cd so gleitet, dass sie immer parallel zu der Ebene bce bleibt. Denn nach dem oben bewiesenen Satze schneiden sich fg und ih bei jeder ihrer Lagen

in einem Punkte, welcher der erzeugten Fläche angehört. Es giebt demnach auf dieser Fläche zwei Scharen gerader Linien. Zwei Linien, welche derselben Schar angehören, sind windschief und können sich deshalb nicht schneiden; dagegen schneidet jede Linie der einen Schar sämtliche Linien der andern Schar. Diese krumme Fläche wird nun ein hyperbolisches Paraboloid genannt. Selbstverständlich erstreckt sich dieselbe ins Unendliche.

Man stellt diese Fläche, oder vielmehr einen Teil derselben durch die Projektionen einer Reihe von Erzeugenden dar. In Fig. 159 sei das Parallelogramm $a_1 b_1 c_1 d_1$ die erste Projektion eines windschiefen Vierecks. Die Lage ist so angenommen, dass in der zweiten Projektion je zwei Seiten $a_2 b_2$ und $a_2 d_2$ so wie $b_2 c_2$ und $c_2 d_2$ zusammenfallen. Lässt man nun eine Gerade parallel zu einer Ebene, welche durch $a_1 d_1$ geht und senkrecht zu P_1 steht, an den beiden festen Geraden $(a_1 b_1, a_2 b_2)$, $(c_1 d_1, c_2 d_2)$ gleiten, so durchläuft dieselbe nach der obigen Erklärung ein hyperbolisches Paraboloid. Die ersten Projektionen der Erzeugenden sind parallel zu $a_1 d_1$ und $b_1 c_1$. In Fig. 159 ist $a_1 b_1$ in acht gleiche Teile geteilt, und durch die Teilpunkte sind die Erzeugenden gezogen. Die zweiten Projektionen der letzteren findet man, wenn man jene Teilpunkte auf $a_2 b_2$ und $c_2 d_2$ projiciert, oder besser, wenn man diese beiden Geraden in dieselbe Anzahl gleicher Teile teilt wie $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$, und die Teilpunkte der ersten Projektion entsprechend durch Geraden verbindet. Der Vergleich dieser zweiten Projektion mit Fig. 77 zeigt, dass die Erzeugenden eine Parabel einhüllen.

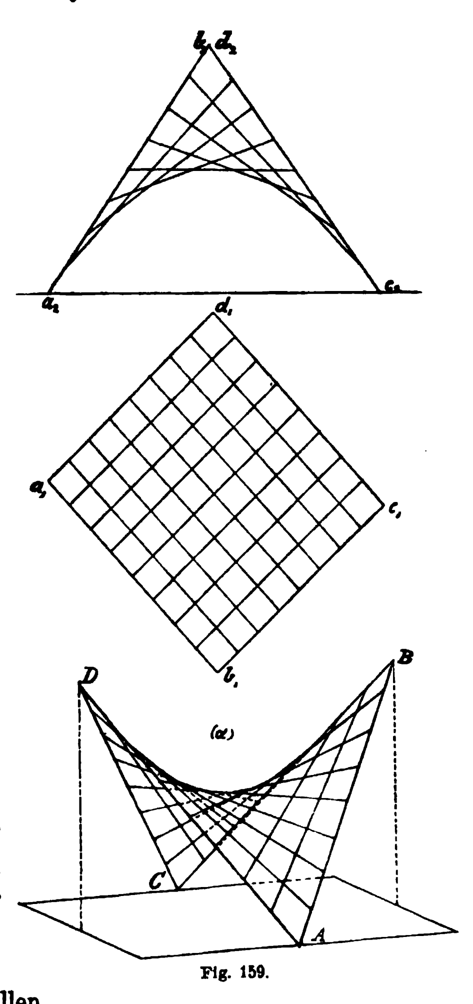
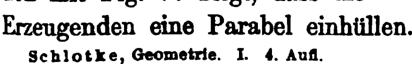


Fig. 159.



In Fig. 159(α) ist die Fläche der grösseren Anschaulichkeit wegen in schiefer Projektion dargestellt.

Die Erzeugenden der zweiten Schar sind parallel zu einer durch $a_1 b_1$ gehenden und zu P_1 senkrechten Ebene; ihre ersten Projektionen werden hiernach parallel zu $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$. Teilt man $a_1 d_1$ in dieselbe Anzahl gleicher Teile wie vorhin $a_1 b_1$ und legt durch diese Teilpunkte die ersten Projektionen der Erzeugenden, so ist leicht zu erkennen, dass die zweiten Projektionen derselben mit denjenigen der ersten Schar zusammenfallen.

Da je zwei gegenüberliegende Seiten des ursprünglich gegebenen windschiefen Vierecks der einen oder anderen Schar von Erzeugenden angehören, so ist die Lage der Ebene E, zu welcher die Erzeugenden der einen Schar parallel sein müssen, bestimmt durch diejenigen Seiten des Vierecks, welche dieser Schar angehören. E muss parallel zu diesen beiden Geraden sein.

Die Berührungsebene für einen gegebenen Punkt M der Fläche ist bestimmt durch die beiden Erzeugenden, welche durch M gehen. Ihre Spuren sind deshalb leicht nach (III, 9) zu finden. Diese Ebene schneidet die krumme Fläche in jenen beiden Erzeugenden, berührt sie aber in dem Schnittpunkte derselben.

Man konstruiere noch zwei ebene Schnitte, welche über bez. unter dem Scheitel der Parabel der zweiten Projektion in Fig. 159 parallel zu P_1 gelegt werden. Die leicht zu findenden ersten Projektionen derselben sind, wie hier beiläufig bemerkt werden mag, Hyperbeln. (Näheres findet man im vierten Teil d. W.)

Das gerade Konoid.

14) Es sei $a_2 b_2 c_2 d_2$ (Fig. 160) ein in P_2 liegender Kreis; $(b_1 d_1, b_2 d_2)$ eine Gerade, welche senkrecht zu P_1 steht und deren zweite Projektion mit dem Durchmesser $b_2 d_2$ des Kreises zusammenfällt. Bewegt sich nun eine Gerade parallel zu P_1 so, dass sie stets den Kreis und die Gerade $(b_1 d_1, b_2 d_2)$ schneidet, so beschreibt dieselbe eine krumme Fläche, welche man ein gerades Konoid nennt. Je zwei Seitenlinien dieser Fläche sind windschief; es ist deshalb ein zwischen zwei unendlich nahen Seitenlinien liegendes Flächenelement nicht (wie etwa bei einer Kegelfläche) als ebenes Element anzusehen. Die Darstellung der Projektionen des Konoids ist sehr einfach. Die zweiten Projektionen der Seitenlinien erscheinen als Sehnen des gegebenen Kreises, welche der Achse OX parallel sind. Die ersten Projektionen derselben gehen sämtlich durch den Punkt $(b_1 d_1)$.

In (α) ist die Fläche in schiefer Projektion anschaulicher dargestellt.

Jeder zu P_2 parallele Schnitt dieser Fläche ist eine Ellipse.

Beweis: Es sei $m_1 n_1$ die erste Projektion eines solchen Schnittes (wo $m_1 n_1 \parallel OX$) und die Kurve $b_2 m_2 d_2 n_2$ die zweite Projektion desselben. Die letztere stellt zugleich die wahre Gestalt des Schnittes dar. Ist der auf $b_1 e_1$ liegende Punkt g_1 die erste Projektion eines Punktes der Kurve, so findet man die zweite Projektion g_2 desselben durch die zu OX senkrechte Gerade $g_1 g_2$. Leicht findet man nun, dass sich verhält:

$$f_1 g_1 : h_1 e_1 = f_1 n_1 : h_1 c_1$$

oder

$$b'' g_2 : b'' e_2 = h_2 n_2 : h_2 c_2 .$$

(Die übereinander stehenden Glieder beider Proportionen stellen je gleich lange Strecken in Fig. 160 dar.)

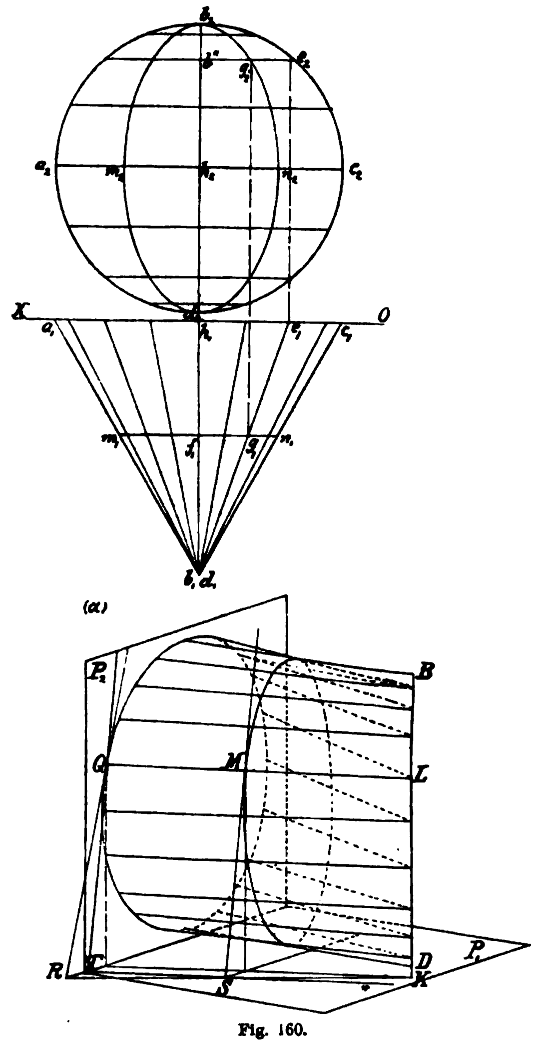


Fig. 160.

Nach (IV, 5) folgt hieraus, dass die Schnittkurve $b_2 n_2 d_2 m_2$ eine Ellipse ist.

Der eben bewiesene Satz ermöglicht auch die Bestimmung der Berührungsebene in einem beliebigen Punkte M des Konoids.

Anl. zur Lösung. Man lege durch M einen Schnitt parallel zu P_2 und ziehe die Tangente in M an die Durchschnittsellipse. Die Ebene, welche durch diese Tangente und durch die den Punkt M enthaltende Seitenlinie des Konoids gelegt werden kann, ist die gesuchte Berührungsebene.

Eine andere Konstruktion, welche die Zeichnung eines elliptischen Schnittes nicht erfordert, ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung.

Es sei QL (Fig. 160α) die durch M gehende Seitenlinie des Konoids, welche P_2 in Q trifft. Man ziehe in Q die Tangente QR an den Kreis; verbinde den Punkt R, in welchem sie die Achse OX schneidet, mit dem Durchschnittspunkte K der Geraden BD und P_1. Hierdurch entsteht das windschiefe Viereck KLQR. Die Seitenlinie QL ist parallel zu P_1 und KR liegt in der letzteren. Gleitet deshalb KR an RQ und BK parallel zu P_1 hinauf, so beschreibt sie ein hyperbolisches Paraboloid. Bei dieser Bewegung gelangt die Gerade einmal nach QL, aber sowohl unmittelbar vor, wie nach Überschreitung dieser Lage befindet sie sich ausserhalb des Konoids. Folglich berührt das Hyperboloid in der Geraden QL das Konoid, deshalb haben beide Flächen auch in M eine gemeinschaftliche Berührungsebene. Um die Spuren der letzteren zu bestimmen, ist noch die durch M gehende Erzeugende MS der zweiten Schar des Hyperboloids zu ermitteln. Da nun RQ in P_2 liegt und BK parallel zu P_2 ist, so wird MS die beiden Geraden QL und RK schneiden und ebenfalls parallel zu P_2 sein. Hieraus ergiebt sich leicht die Lage von MS. Durch QL und MS legt man nun die gesuchte Ebene, deren erste Spur TS parallel zu QL ist und durch S geht. Die zweite Spur QT ist parallel zu MS.

Auch in diesem Falle berührt die gefundene Ebene nur in M, während sie in allen übrigen Punkten der Geraden das Konoid schneidet.

Man zeichne nach diesen Angaben in Fig. 160 die Spuren der Berührungsebene und bestimme noch den vollständigen Durchschnitt derselben mit dem Konoid.

15) Wenn eine Gerade G an einer anderen Geraden G_1 und an einer Kugelfläche K so entlang gleitet, dass sie stets einer gegebenen Ebene E parallel bleibt, so durchläuft G ein schiefes Konoid. Man konstruiere die Berührungskurve desselben mit der Kugel, die Durchschnittskurven mit den Projektionsebenen und lege durch einen gegebenen Punkt auf dem Konoid die Berührungsebene an dasselbe.

Schraubenlinie und Schraubenflächen.

16) Zieht man auf der abgewickelten Mantelfläche M (Fig. 161) eines geraden Cylinders mit kreisförmiger Grundfläche eine Gerade ab, welche die Seitenlinien nicht rechtwinklig schneidet, so bildet ab nach wieder erfolgter Aufwickelung der Mantelfläche eine Kurve, die **Schraubenlinie**. Da der Winkel, unter welchem ab die Seitenlinien der Cylinderfläche trifft, durch die Aufwickelung unverändert bleibt, so schneidet die Schrauben-

linie alle Seitenlinien ebenfalls unter demselben Winkel. Es folgt hieraus leicht, dass die Schraubenlinie überall gleiche Krümmung hat. Ein beliebiges Stück derselben kann deshalb an jeder anderen Stelle der

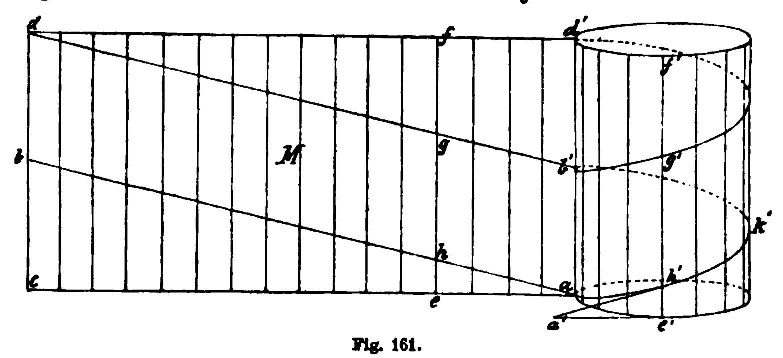


Fig. 161.

Schraubenlinie mit einem entsprechenden Stück zur Deckung gebracht werden. Diese Eigenschaft besitzen in der Ebene nur der Kreis und die gerade Linie.

Ist ac der ausgestreckte Umfang des Grundkreises, so fällt bei der Aufwickelung des Mantels die Seitenlinie cd mit ad′ zusammen. Der Punkt b gelangt nach b′, und die Kurve ah′k′b′ bildet nun einen Schraubengang; ab′ heisst die Ganghöhe. Zieht man b′d parallel zu ab, so geht diese Gerade in die Fortsetzung der Schraubenlinie über und bildet einen zweiten Gang derselben. Je zwei Punkte der Schraubenlinie, welche wie g′ und h′ auf derselben Seitenlinie liegen, sind um die Ganghöhe von einander entfernt.

Wird das dreieckige Stück ae′h′ der Cylinderfläche in diejenige Berührungsebene abgewickelt, welche den Mantel in der Seitenlinie e′f′ berührt, dann geht dasselbe in ein rechtwinkliges Dreieck a′e′h′ über, in welchem die Kathete a′e′ die Tangente in dem Punkte e′ des Grundkreises ist. Die Strecke a′e′ hat die Länge des Bogens ae′. Die abgewickelte Schraubenlinie a′h′ bildet die Hypotenuse des Dreiecks a′e′h′, und ist zugleich die Tangente in dem Punkte h′ der Schraubenlinie.

Hiernach kann die Tangente für jeden Punkt der Schraubenlinie leicht gefunden werden.

Die Darstellung der geraden Projektionen der Schraubenlinie ist sehr einfach, wenn man berücksichtigt, dass der Höhenunterschied zweier Punkte der Schraubenlinie, welche auf je zwei gleich weit voneinander entfernten Seitenlinien liegen, stets derselbe ist, wie sich aus der Abwickelung sofort ergiebt.

Man teile den Umfang der Grundfläche (erste Projektion des Cylinders) (Fig. 162) und die Ganghöhe $a_2 b_2$ in dieselbe Anzahl, z. B. 16 gleicher Teile. Soll (a_1, a_2) der Anfangspunkt der Schraubenlinie sein, so sind durch die Teilpunkte des Grundkreises die Seitenlinien zu ziehen. Auf den zweiten Projektionen der letzteren sind dann, wie in Fig. 162 angedeutet ist, der Reihe nach $\frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16} \ldots$ der Ganghöhe u. s. f. abzutragen. Durch die Endpunkte dieser Höhen geht die zweite Projektion der Schraubenlinie.

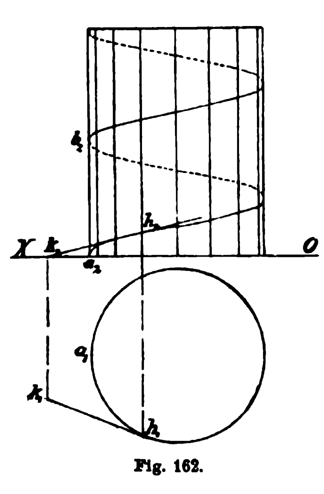


Fig. 162.

Um die Tangente im Punkte (h_1, h_2) zu ziehen, zeichnet man eine solche zunächst in h_1 für den Grundkreis. Diese Tangente $k_1 h_1$ ist die erste Projektion der Tangente der Schraubenlinie. Macht man $k_1 h_1 = \widehat{a_1 h_1}$, so ist k_1 die erste Spur, und wenn man k_1 auf OX projiciert, so erhält man noch in $k_2 h_2$ die zweite Projektion der Tangente.

17) Eine Gerade G von unveränderlicher Länge bewege sich so, dass sie mit einem Punkt an einer Schraubenlinie, und mit dem anderen auf

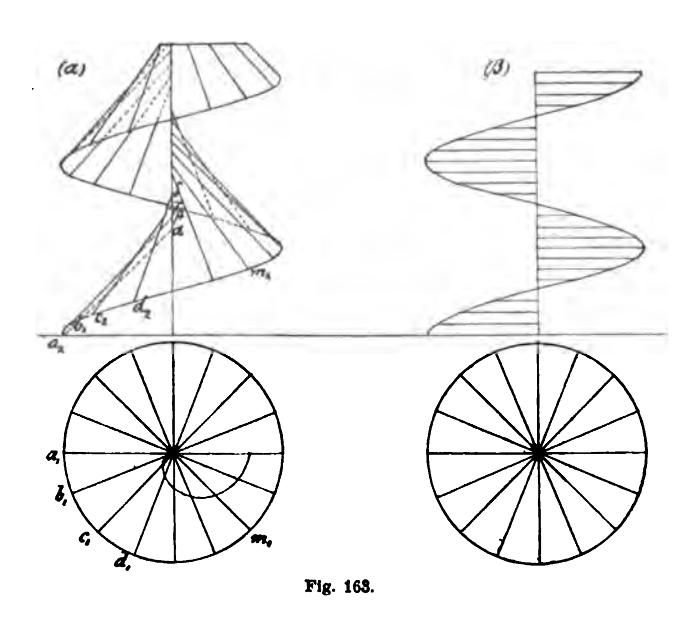


Fig. 163.

der Achse des zugehörigen Cylinders gleitet. G beschreibt bei dieser Bewegung eine krumme Fläche, welche eine windschiefe Schraubenfläche genannt wird. Da alle Punkte der Schraubenlinie gleich weit von der Achse des Cylinders entfernt sind, so bildet die Gerade G in allen Lagen denselben Winkel mit dieser Achse. Steht also die letztere senkrecht zu P_1 (Fig. 163), so sind die ersten Projektionen der Erzeugenden Halbmesser des Grundkreises. Die zweiten Projektionen sind ebenfalls leicht zu finden. Sind a_2, b_2, c_2 ... Punkte der Schraubenlinie, die (wie in Fig. 162) auf gleich weit voneinander entfernten Seitenlinien der Cylinderfläche liegen, und $a_2\alpha$ diejenige Erzeugende, welche parallel zu P_1 liegt, so mache man $\alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\delta \ldots\ldots =$ den Höhenunterschieden der Punkte a_2, b_2, c_2, d_2 ..... Die Verbindungslinien $a_2\alpha$, $b_2\beta$, $c_2\gamma$, $d_2\delta$ .... sind alsdann die zweiten Projektionen der Erzeugenden. In Fig. 163(β) ist die windschiefe Schraubenfläche dargestellt, bei welcher die Seitenlinien derselben parallel zu P_1 sind. Denkt man sich die bewegliche Erzeugende nach beiden Seiten ins Unendliche erweitert, so erstreckt sich auch die Schraubenfläche ins Unendliche. Alle Schnitte, welche senkrecht zur Cylinderachse oder parallel mit P_1 hindurchgelegt werden, sind Spiralen. Man konstruiere einen Teil des Durchschnittes der erweiterten Schraubenfläche in Fig. 163(α) mit P_1.

Aufgaben. Die Spuren der Berührungsebene für den Punkt ($m_1 m_2$) der Schraubenfläche zu bestimmen.

Den Durchschnitt einer Cylinderfläche mit der windschiefen Schraubenfläche zu finden, wenn beide die Achsen gemeinschaftlich haben.

Die Spuren der Berührungsebene für einen beliebigen Punkt der Schraubenfläche zu finden.

18) Die abwickelbare Schraubenfläche (Fig. 164α und β). Diese Fläche wird von allen Tangenten einer Schraubenlinie gebildet. In Fig. 164(α) sind für einen Gang der Schraubenlinie die beiden Projektionen der Schraubenfläche durch eine Reihe von Tangenten dargestellt. Die letzteren werden nach (16) bestimmt. Die Durchschnittspunkte aller Tangenten mit P_1 bilden eine Kurve, welche Kreisevolvente genannt wird. Für eine beliebige Tangente, deren erste Projektion bc ist, folgt aus 16, dass $bc = \widehat{ab}$, wenn a der Anfangspunkt der Schraubenlinie ist, und da gleiches für alle anderen Tangenten gilt, so kann man sich die Kurve auch folgendermassen entstanden denken. Man lege um den Grundkreis abe einen Faden, welcher in a befestigt ist, und dessen Länge dem Umfange des Kreises gleich ist. Wird nun der Faden abgewickelt, so ist das freie zur geraden Linie ausgestreckte Stück fort-

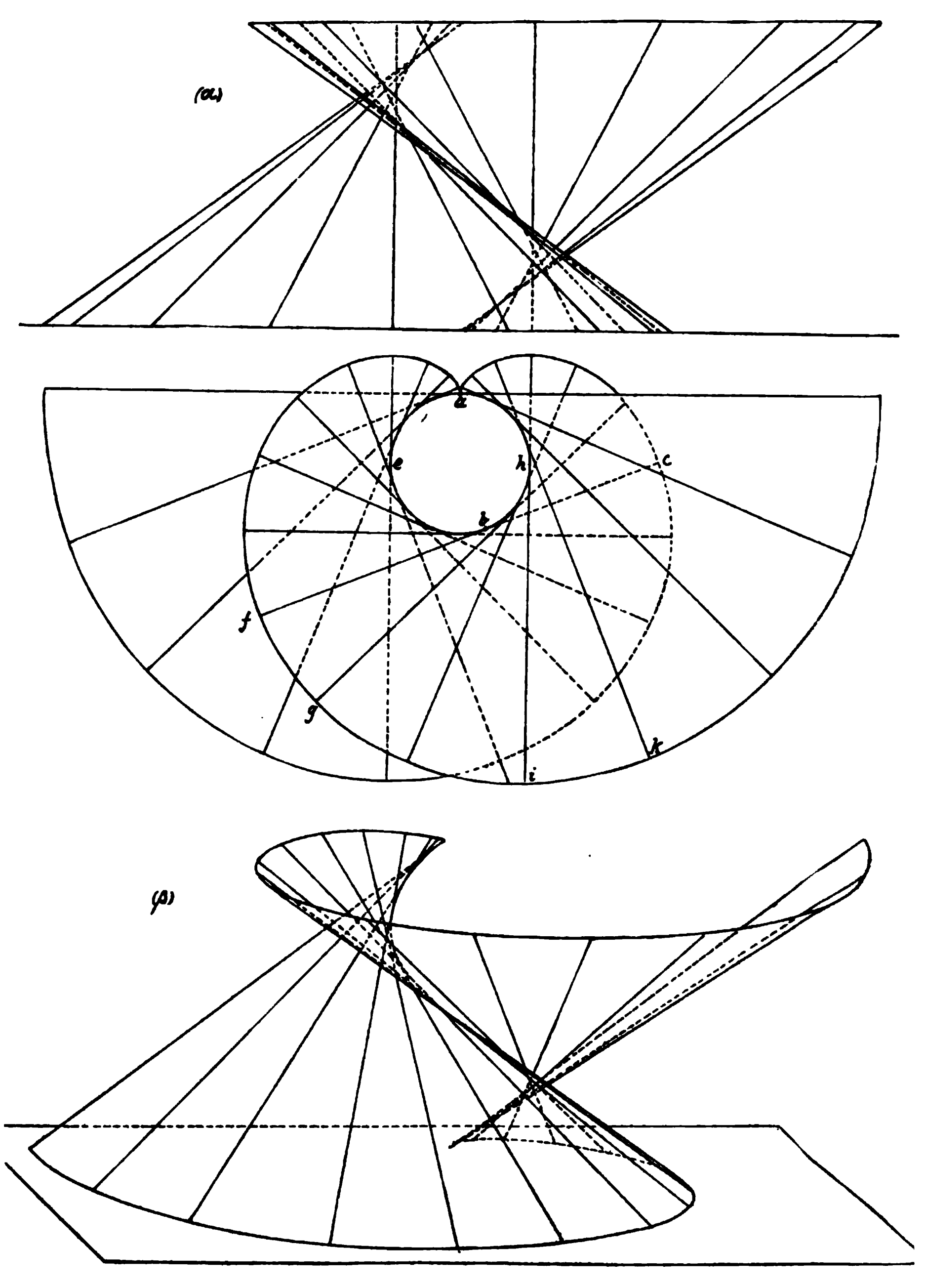


Fig. 164 (α und β).

während Tangente des Kreises, und der Endpunkt des Fadens durchläuft die Durchschnittskurve. Werden die erzeugenden Tangenten über die Berührungspunkte hinaus bis zu einer zu P_1 parallelen Ebene verlängert, welche durch den oberen Endpunkt des ersten Ganges der Schraubenlinie geht, so schneidet die Schraubenfläche diese Ebene in einer zweiten Kreisevolvente von derselben Gestalt. In Fig. 164(β) ist die Schraubenfläche in schiefer Projektion dargestellt.

Aus der Entstehungsweise der Fläche ist leicht zu sehen, dass zwei Stücke der Schraubenfläche, welche zwischen je zwei Tangenten liegen, deren Berührungspunkte gleich weit voneinander entfernt sind (wie die in der ersten Projektion von Fig. 164(α) mit bfg und hik bezeichneten Teile), zur Deckung gebracht werden können.

Die Fläche ist abwickelbar, d. h. sie kann zu einer ebenen Fläche ausgebreitet werden.

Man bestimme für einen beliebigen Punkt der Schraubenfläche die Spuren der Berührungsebene.

Die Schraubenröhrenfläche.

19) Bewegt sich der Mittelpunkt eines Kreises auf einer Schraubenlinie, während die Ebene des Kreises fortwährend senkrecht zu derselben (d. h. senkrecht zu der im Mittelpunkte des beweglichen Kreises an die Schraubenlinie gelegten Tangente) bleibt, so durchläuft der Kreisumfang die Oberfläche eines schraubenförmig gewundenen Rohrs. Dieselbe ist auch die Umhüllungsfläche für alle Kugeln, welche denselben Halbmesser wie der bewegliche Kreis haben, und deren Mittelpunkte auf der Schraubenlinie liegen. Nach dieser letzten Angabe sind die Projektionen des gewundenen Rohres in Fig. 165 gezeichnet. (Man vgl. diese Darstellung mit derjenigen der Ringfläche in Fig. 137).

Der Umriss der zweiten Projektion zeigt bei den Punkten a und b Spitzen, ähnlich wie diejenigen, welche bei der Projektion der Ringfläche vorkommen. Alle Punkte des Umfanges des beweglichen Kreises beschreiben Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe. Man konstruiere hiernach für einen beliebigen Punkt der Oberfläche die Berührungsebene. Ferner bestimme man Punkte des Umrisses der zweiten Projektion durch Berührungsebenen, welche senkrecht zu P_2 stehen.

Aufgabe. Den Durchschnitt einer zu P_1 parallelen Ebene ($\alpha\beta$) mit der Röhrenfläche zu ermitteln.

Aufl. Da der bewegliche Kreis in allen Lagen dieselbe Neigung zu P_1 hat, so wird seine erste Projektion eine Ellipse sein, deren Achsen

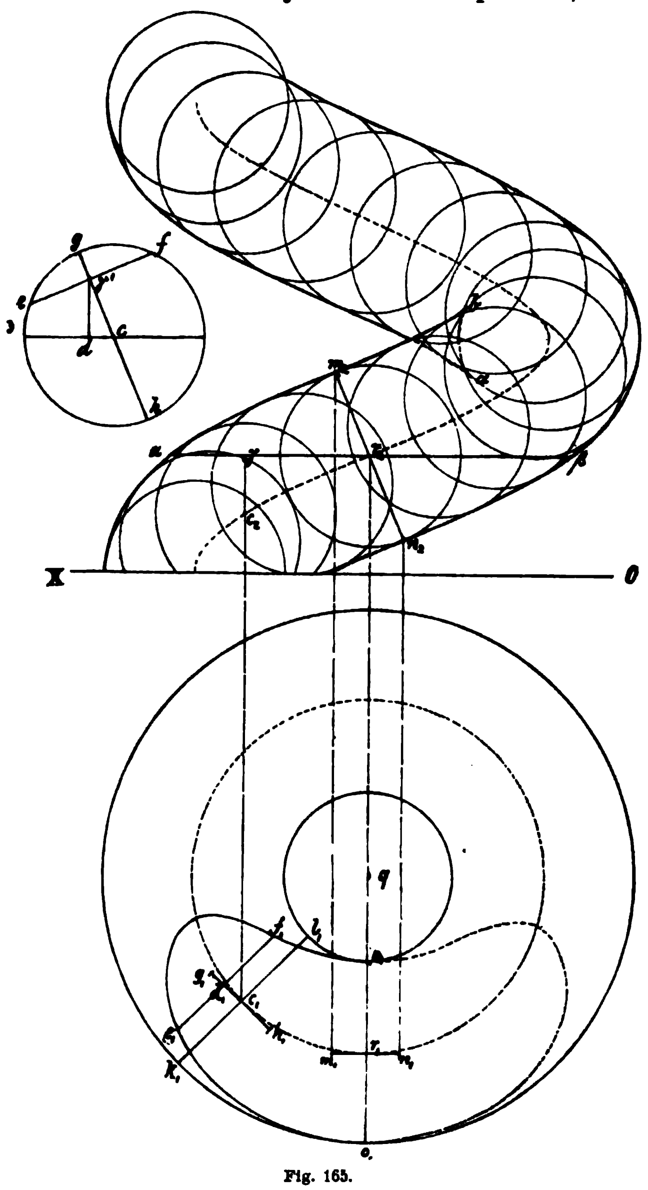


Fig. 165.

sich während der Bewegung nicht ändern. $o_1 p_1$ und $m_1 n_1$ seien diese Achsen, wenn der Kreis senkrecht zu P_2 steht, wobei $o_1 p_1$ senkrecht zu

OX nach dem Mittelpunkte q gerichtet, und gleich dem Durchmesser des beweglichen Kreises ist; $m_1 n_1$ wird leicht aus der als gerade Linie erscheinenden zweiten Projektion $m_2 n_2$ des Kreises gefunden. Die Schnittebene $\alpha\beta$ gehe durch den Mittelpunkt (r_1, r_2) dieser Lage des Kreises, dann sind o_1 und p_1 zwei Punkte der gesuchten Kurve. Sind nun $g_1 h_1$ und $k_1 l_1$ die Achsen dieser Ellipse für eine andere Lage des beweglichen Kreises, so liegt der Mittelpunkt (c_1, c_2) nicht mehr in der Schnittebene $\alpha\beta$, sondern um $c_2\gamma$ tiefer als dieselbe. Man zeichne nun in der Nebenfigur den Durchmesser gh gleich und parallel zu $m_2 n_2$ und bestimme γ' auf demselben so, dass der Höhenunterschied $d\gamma'$ der Punkte γ' und c gleich $c_2\gamma$ ist. Ferner denke man sich den Kreis um den Durchmesser gh so weit gedreht, bis derselbe parallel zu P_2 wird, und ziehe nun ef durch γ' senkrecht zu gh; dann ist ef die Länge der Sehne, in welcher $\alpha\beta$ den Kreis bei dieser Lage schneidet. Diese Sehne erscheint in der ersten Projektion in wahrer Länge. Man trage auf $c_1 g_1$ die Strecke $c_1 d_1 = cd$ ab, ziehe durch d_1 eine Parallele zu $k_1 l_1$ und trage auf dieser die Längen $d_1 e_1 = d_1 f_1 = e\gamma' = f\gamma'$ ab; dann sind e_1 und f_1 zwei Punkte der gesuchten Durchschnittskurve, welche in der ersten Projektion in wahrer Gestalt erscheint.

Es ist leicht einzusehen, dass alle zu P_1 parallelen Schnitte der Schraubenfläche kongruent sind.

Anhang.

Vermischte Aufgaben und Sätze.

1) Auf einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene denjenigen Punkt zu bestimmen, welcher von drei durch ihre Projektionen gegebenen Punkte gleiche Abstände hat.

2) Die Projektionen eines Punktes zu finden, welcher von drei gegebenen Ebenen gegebene Abstände hat. Wie viele Punkte genügen der Lösung der Aufgabe?

3) Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, welche einer gegebenen Geraden parallel ist und senkrecht zu einer gegebenen Ebene steht.

4) Den Abstand eines Punktes von der Ebene eines durch seine Projektionen gegebenen Dreiecks zu finden. (Man soll die Spuren der Ebene nicht benutzen.)

5) Drei windschiefe Geraden G_1, G_2 und G_3, und ein Punkt A sind gegeben. Man soll ein gleichschenkliges Dreieck bestimmen, dessen Spitze auf G_1, die Endpunkte der Grundlinie auf G_2 und G_3 liegen, und ausserdem soll die Grundlinie durch A gehen.

6) Eine Ebene E ist durch ihre Spuren gegeben. Eine dreiseitige Pyramide, welche durch ihre 6 Kanten bestimmt ist, soll mit einer Seitenfläche auf E gestellt werden. Man soll die Projektionen der Pyramide zeichnen.

7) Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, welche von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände hat.

Wie viele Ebenen sind möglich?

8) Durch einen Punkt A eine Ebene zu legen, welche von drei gegebenen Punkten gleiche Abstände hat.

Wie viele Ebenen genügen der Aufgabe?

9) Ein in P_1 liegendes Dreieck $a_1 b_1 c_1$ (Fig. 166) ist gegeben. Man soll die Projektionen einer dreiseitigen Pyramide zeichnen, welche $a_1 b_1 c_1$

zur Grundfläche hat und deren übrige Kanten senkrecht aufeinander stehen.

Aufl. Da $a_1 b_1$, $a_1 c_1$ und $b_1 c_1$ die ersten Spuren der Seitenflächen sind, und die drei in der Spitze zusammenstossenden Kanten auch senkrecht zu je einer Seitenfläche stehen, so muss nach III, 19: $c_1 s_1 \perp a_1 b_1$, $b_1 s_1 \perp a_1 c_1$ und $a_1 s_1 \perp b_1 c_1$ stehen, wenn $a_1 s_1$, $b_1 s_1$, $c_1 s_1$ die gesuchten Projektionen der drei noch fehlenden Kanten sind. Diese Projektionen fallen demnach in die drei Höhenperpendikel des Dreiecks $a_1 b_1 c_1$; ihr Schnittpunkt s_1 ist die Projektion der Spitze. Verlängern wir eine der Projektionen, z. B. $c_1 s_1$ bis d_1, so stellt $c_1 s_1 d_1$ die Projektion eines rechtwinkligen Dreiecks dar. Drehen wir dasselbe um $c_1 d_1$, bis es in P_1 fällt, so gelangt die Spitze nach dem Punkte S, welcher auf dem über $c_1 d_1$ als Durchmesser gezeichneten Kreise liegt ($s_1 S \perp c_1 d_1$). Hierdurch erhalten wir in $s_1 S$ die Höhe der Pyramide, wodurch sich nun auch leicht die zweite Projektion derselben ergiebt.

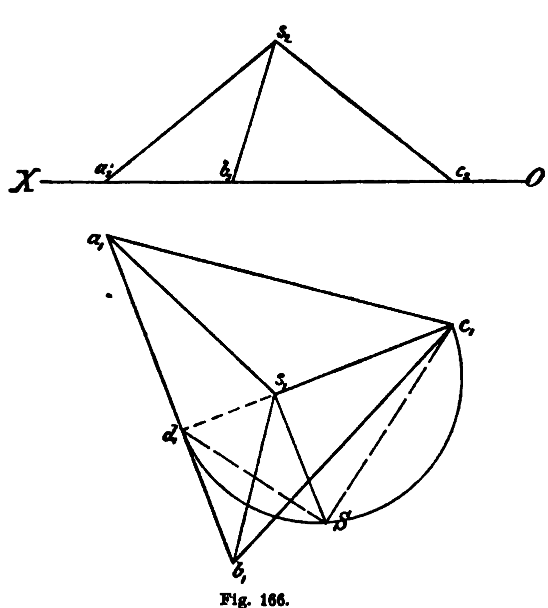


Fig. 166.

10) Den Mittelpunkt und den Halbmesser einer Kugelfläche zu bestimmen, welche durch die Eckpunkte einer gegebenen dreiseitigen Pyramide geht.

11) Die Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedums zu konstruieren, wenn die Diagonalen der Seitenflächen gegeben sind.

12) Die regelmässigen Körper.

Regelmässige Körper heissen diejenigen, welche von kongruenten regelmässigen Vielecken begrenzt sind. Alle Kanten eines regelmässigen Körpers sind gleich lang, alle Kantenwinkel und Flächenwinkel unter sich gleich gross, alle Ecken kongruent.

Bekanntlich beschränkt sich die Anzahl der möglichen regelmässigen Körper auf fünf. Es hängt dies von der Möglichkeit ab, körperliche

Ecken zu bilden, deren Kantenwinkel den Winkeln eines regelmässigen Vielecks gleich sind, ohne dass ihre Summe 4 R überschreitet.

Es können in einem Eckpunkte zusammenstossen:

3 gleichseitige Dreiecke,	dann beträgt die Summe der Kantenwinkel	180°,
4 „ „	„ „ „ „ „ „	240°,
5 „ „	„ „ „ „ „ „	300°,
3 Quadrate,	„ „ „ „ „ „	270°,
3 regelm. Fünfecke,	„ „ „ „ „ „	324°.

Andere Möglichkeiten sind nicht vorhanden.

13) Das Tetraeder (Fig. 167). Dieser Körper wird von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Legt man eines der Dreiecke $a_1 b_1 c_1$ in die erste Projektionsebene P_1 und errichtet in der letzteren über jeder Seite ein ebenso grosses Dreieck, so erhält man das Netz des Körpers, dessen äusserer Umriss, wie man leicht erkennt, wieder ein gleichseitiges Dreieck $s' s'' s'''$ ist.

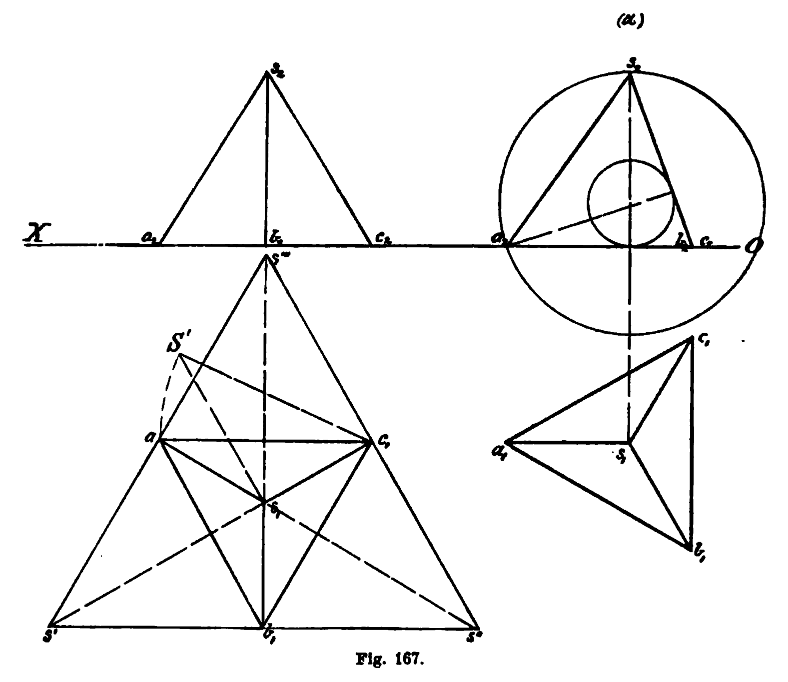


Fig. 167.

Drehen wir die Dreiecke bez. um $a_1 b_1$, $a_1 c_1$, $b_1 c_1$, so beschreiben die Spitzen s', s'', s''' Kreisbögen, deren Projektionen die zu $a_1 b_1$, $a_1 c_1$, $b_1 c_1$ senkrechten Geraden $s' s_1$, $s'' s_1$, $s''' s_1$ sind, welche sich in s_1 treffen. Dieser Punkt ist demnach die Projektion der Spitze. Die Höhe dieses Punktes

über P_1 ergiebt sich durch Umklappen einer Kante. Wir ziehen $s_1 S' \perp s_1 c_1$ und zeichnen um c_1 als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $a_1 c_1$ einen Kreisbogen, welcher $s_1 S'$ in S' trifft; dann ist $s_1 S'$ gleich der gesuchten Höhe. Hieraus findet man nun leicht die zweite Projektion des Körpers.

Stellen wir den Grundriss des Tetraeders so, dass eine Kante z. B. $b_1 c_1$ senkrecht zur Achse OX steht, Fig. 167 α, so erhalten wir im Aufriss die wahre Grösse eines Flächenwinkels, nämlich $\angle a_2 b_2 s_2$.

Aufgaben.

14) Das Tetraeder mittelst einer Ebene so zu schneiden, dass die Schnittfigur ein Quadrat wird.

15) Die Radien r und R der ein- und umbeschriebenen Kugel zu finden.

Leicht mit Hülfe von Fig. 167 α. Man findet $R = \frac{3}{4}$, $r = \frac{1}{4}$ der Höhe.

16) Der Würfel (Hexaeder) Fig. 168. In jeder Ecke stossen 3 Quadrate zusammen. Stellt man den Würfel mit einer Seitenfläche auf P_1, so dass eine andere zugleich parallel zu P_2 wird, so bestehen die

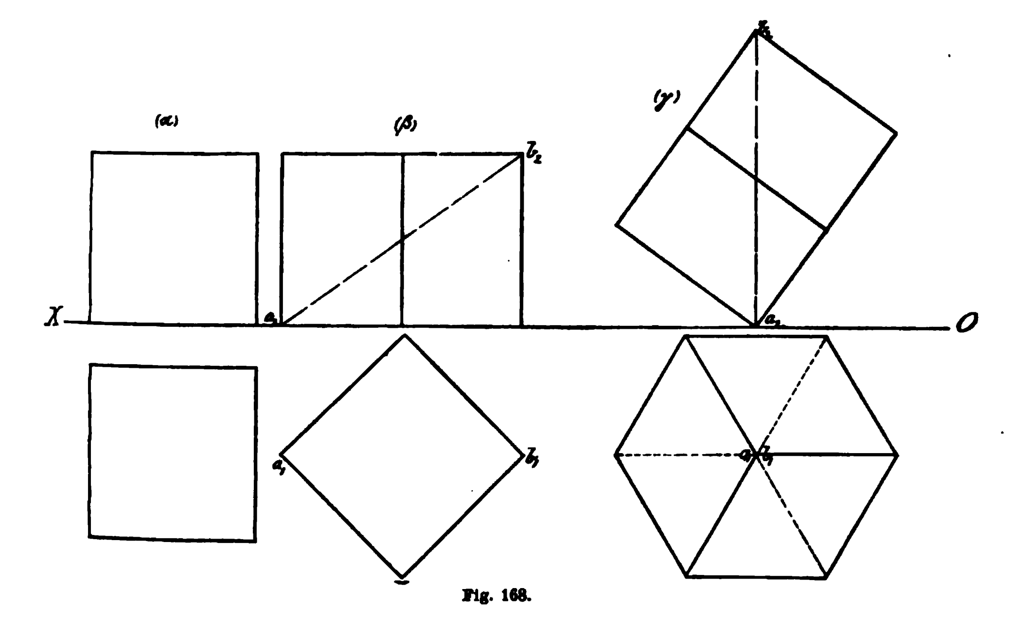


Fig. 168.

beiden Projektionen des Würfels aus zwei Quadraten, Fig. 168 (α). Drehen wir den Grundriss um 45°, so erhalten wir die beiden Projektionen, Fig. 168 (β). Aus der zweiten Projektion kann man die wahre Länge der Diagonale des Würfels erkennen. Bringen wir die zweite Projektion

des Würfels in die in Fig. 168(γ) angegebene Lage, bei welcher die Diagonale $a_2 b_2$ senkrecht zur Achse OX steht, so erscheint der Umriss der ersten Projektion als regelmässiges Sechseck. Warum?

17) Eine Ebene anzugeben, welche einen Würfel in einem regelmässigen Sechseck schneidet.

18) Die Projektionen eines Würfels zu zeichnen, dessen Diagonale gegeben ist.

Leicht mit Hülfe von Fig. 168(β) zu lösen.

19) Das Oktaeder. Bei diesem stossen in jedem Eckpunkt vier gleichseitige Dreiecke zusammen. Der Körper besteht aus zwei Pyramiden, welche eine gemeinsame quadratische Grundfläche haben. In Fig. 169(α)

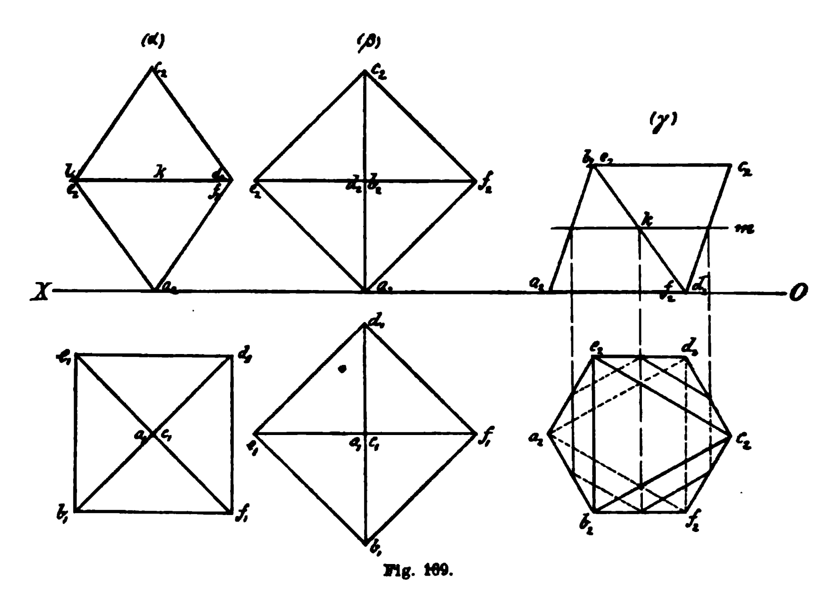


Fig. 169.

ist der Körper so dargestellt, dass eine Achse senkrecht zu P_1, die beiden anderen Achsen mit P_2 je Winkel von 45° bilden. In Fig. 169(β) steht eine Achse senkrecht zu P_1, eine andere senkrecht zu P_2. Grundriss und Aufriss werden in diesem Falle ganz gleich. Jede dieser Projektionen wird durch ein Quadrat mit seinen beiden Diagonalen dargestellt. Drehen wir den Aufriss von (α) so weit, bis derselbe mit $a_2 d_2$ in die Achse OX fällt, so nimmt der Grundriss die Gestalt Fig. 169(γ) an. Eine zu P_1 parallele Ebene m, welche durch die Mitte der Kante $b_2 d_2$ geht, schneidet in diesem Falle das Oktaeder in einem regelmässigen Sechseck.

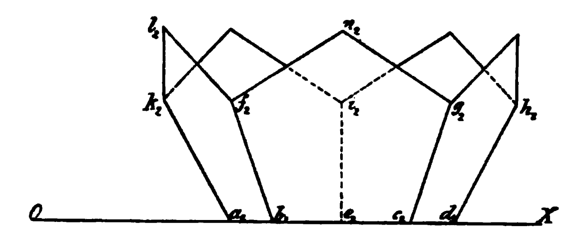
Die Radien r und R der ein- und umbeschriebenen Kugel findet man

aus Fig. 169(α). — r ist der Abstand der Mitte k von $c_2 d_2$, und R ist $= \frac{1}{2} a_2 c_2$.

Warum ist der Umriss des Grundrisses bei (γ) ein regelmässiges Sechseck?

20) Die Mitten der Seiten eines regelmässigen Tetraeders sind die Ecken eines Oktaeders. Warum?

21) Das **Dodekaeder** wird von 12 regelmässigen Fünfecken begrenzt. In jedem Endpunkte stossen drei Fünfecke zusammen.



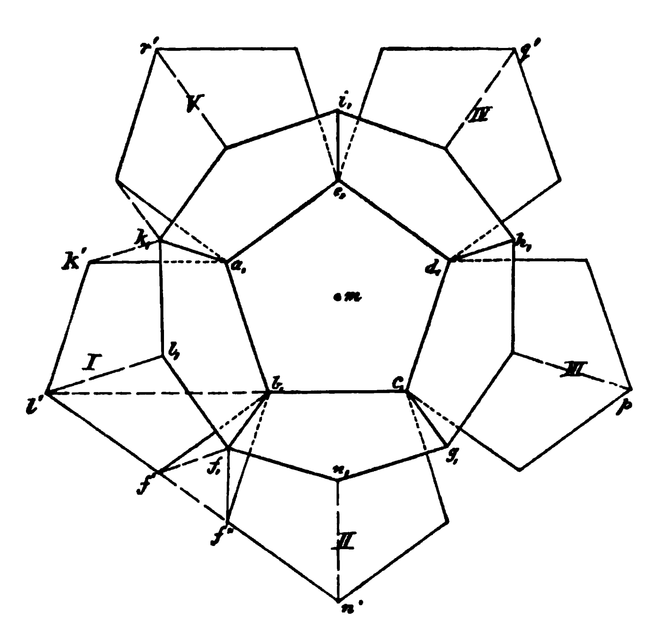
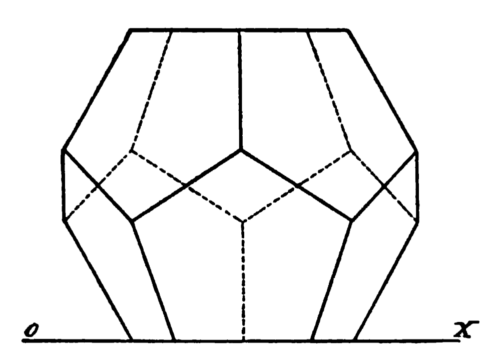


Fig. 170.

Wir legen ein Fünfeck $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ in die erste Projektionsebene und zeichnen in derselben Ebene über den Seiten die gleichen durch I, II, V bezeichneten Fünfecke. Die letzteren können wir aufklappen, bis je zwei in einem Eckpunkte des Fünfecks $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ aneinanderstossende Kanten zusammenfallen. Drehen wir I um $a_1 b_1$ und II um $b_1 c_1$, so

beschreiben die Punkte f' und f'' Kreisbögen, deren Projektionen senkrecht zu $a_1 b_1$ bez. $b_1 c_1$ stehende Geraden sind. Ihr Schnittpunkt f_1 ist deshalb die Projektion des Punktes, in welchem f' und f'' nach der Aufklappung der Fünfecke zusammenfallen. In gleicher Weise finden wir die entsprechenden Punkte g_1, h_1, i_1 und k_1, welche auch, wie man leicht sieht, auf einem um den Mittelpunkt m des ersten Fünfecks beschriebenen Kreise liegen. Die Projektionen der übrigen Ecken der Fünfecke können nun auch leicht bestimmt werden. Sie liegen auf den von m zu den Seiten des ersten Fünfecks gefällten Senkrechten. Am einfachsten findet man eine solche Ecke durch folgende Betrachtung. Ziehen wir die Gerade $b_1 l'$, dann ist $b_1 l' \parallel a_1 k'$ und $\angle a_1 b_1 c_1 = \angle b_1 a_1 k'$. Folglich ist auch $b_1 c_1 \parallel a_1 k'$. Hiernach bilden $b_1 c_1$ und $b_1 l'$ eine Gerade. Ferner ergiebt sich leicht, dass $l'f'$ und $f'n'$ in einer Geraden liegen, da beide parallel zu $d_1 e_1$ sind, und dass l', n', p', q', r' wieder die Ecken eines regelmässigen Fünfecks sind. Wird demnach das Fünfeck II um $b_1 c_1$ gedreht, so bleibt l' als Punkt der Geraden $b_1 c_1$ an der Stelle, und $l'n'$ gelangt nach der Drehung nach $l'n_1$, in welcher nun auch $f_1 n_1$ liegt.



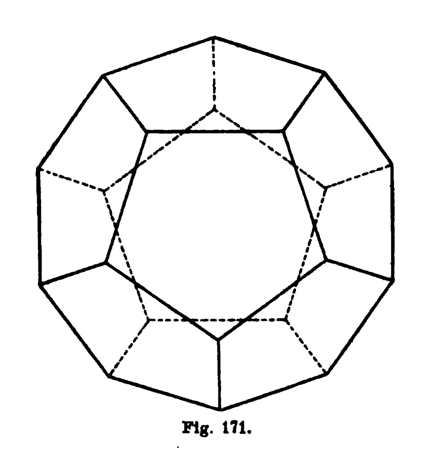


Fig. 171.

Sind alle Ecken der aufgeklappten Fünfecke bestimmt, so ist die Projektion der halben Oberfläche des Dodekaeders gefunden. Die zweite Projektion ergiebt sich leicht durch Ermittelung der Höhen der Eckpunkte über P_1.

Die Projektion der zweiten Hälfte der Oberfläche kann nun in einfachster Weise hinzugefügt werden. S. Fig. 171.

Aus dem Aufriss des Dodekaeders ergiebt sich der Halbmesser der einbeschriebenen Kugel. Derselbe ist gleich der halben Höhe der zweiten Projektion.

Dreht man den Grundriss so, dass eine Seite des unteren Fünfecks, z. B. $a_1 b_1$, senkrecht zu OX wird, Fig. 172, dann stellt die Gerade $a_2 l_2$ die zweite Projektion einer Seitenfläche vor, und folglich stellt $\angle l_2 a_2 d_2$ die wahre Grösse eines Flächenwinkels des Dodekaeders dar. Der Halbmesser der umschriebenen Kugel ist durch die Strecke $m_2 d_2$ oder auch $m_2 l_2 = m_2 h_2 = m_2 q_2$ bestimmt.

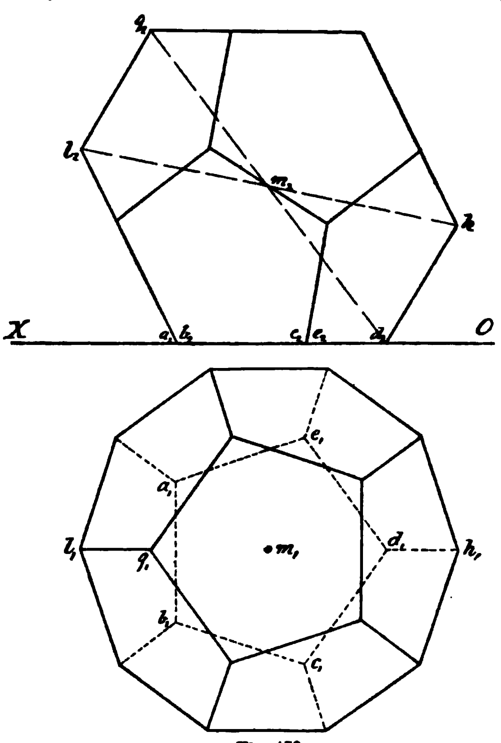


Fig. 172.

22) Das **Ikosaeder** wird von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von welchen je fünf in einem Eckpunkte zusammenstossen. Diese fünf Dreiecke bilden die Mantelfläche einer fünfseitigen Pyramide, welche leicht zu konstruieren ist. Sind $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 n_1$ und $a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 n_2$ die beiden Projektionen einer solchen Pyramide, welche in Fig. 173 mit der Spitze auf P_1 gestellt ist, so liegt dieser eine gleiche Pyramide, deren Projektionen $f_1 g_1 h_1 i_1 k_1 l_1$ und $f_2 g_2 h_2 i_2 k_2 l_2$ sind, gegenüber. Im Grundriss fallen die Projektionen der Spitzen, nämlich l_1 und n_1 zusammen, und die Projektionen der Eckpunkte der Grundflächen bilden die Ecken eines regelmässigen Zehnecks. Zwischen beiden Pyramiden liegt ein Prismatoid, welches ausser von jenen Grundflächen noch von zehn gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. Der Grundriss ist hiernach leicht herzustellen. Die Höhe des Prismatoids ergiebt sich leicht. Sie ist gleich der einen Kathete $h_1 h'$ eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypothenuse $b_1 h' = a_1 b_1$, d. h. gleich der wahren Länge einer Kante des Ikosaeders, und

dessen andere Kathete gleich $b_1 h_1$ ist. Ist diese Höhe bestimmt, so ist auch der Aufriss leicht herzustellen.

Stellt man den Grundriss so auf, dass eine Kante, z. B. $a_1 b_1$, des Fünfecks $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ senkrecht zur Achse OX steht, so erhält man den in Fig. 174 dargestellten Aufriss.

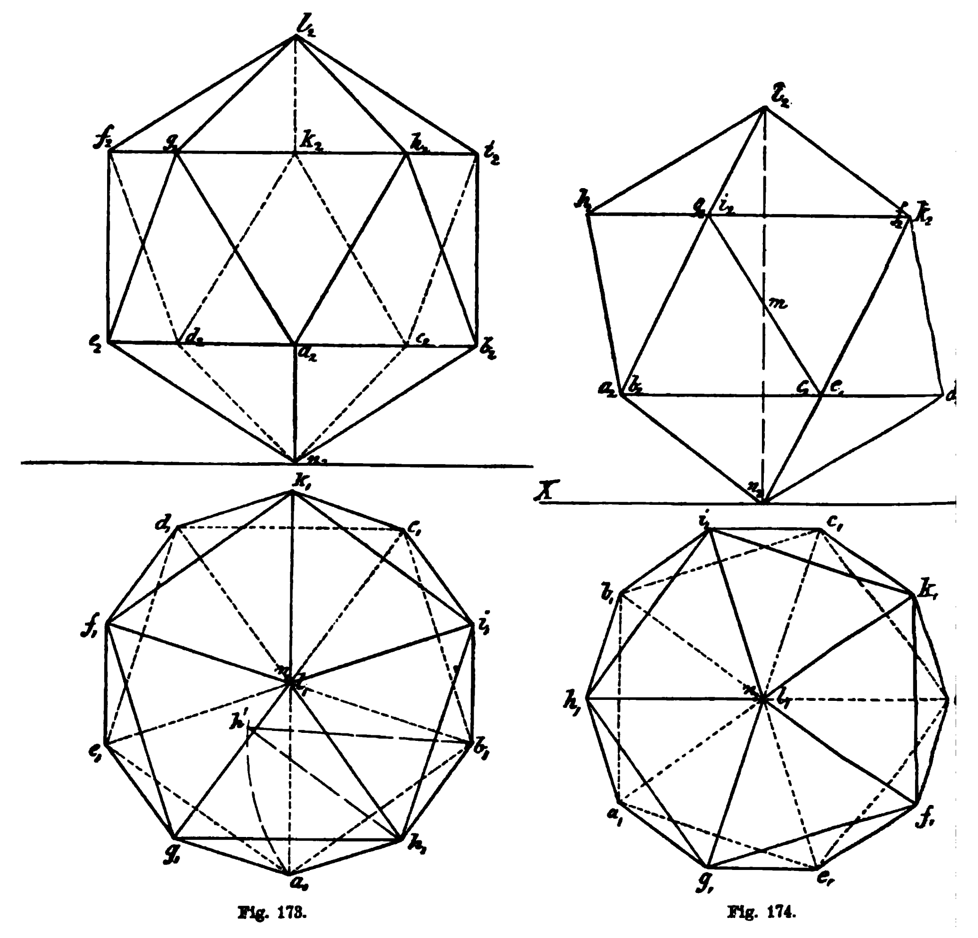


Fig. 173. Fig. 174.

Da die Geraden $a_2 h_2$ und $a_2 n_2$ die Projektionen zweier Seitenflächen darstellen, welche senkrecht zu P_2 stehen, so ist $\angle h_2 a_2 n_2$ einem Flächenwinkel des Ikosaeders gleich. Ist m der Mittelpunkt der Achse $l_2 n_2$, so ist $m l_2$ gleich dem Halbmesser der umbeschriebenen Kugel, und der senkrechte Abstand des Punktes m von $a_2 h_2$ gleich dem Halbmesser der einbeschriebenen Kugel.

23) In Fig. 175—179 sind die fünf regelmässigen Körper der grösseren Anschaulichkeit wegen in schiefen Projektionen dargestellt; dieselben sind aus den in den Fig. 167, 168α, 169, 171, 173 angegebenen Stellungen in bekannter Weise übertragen.

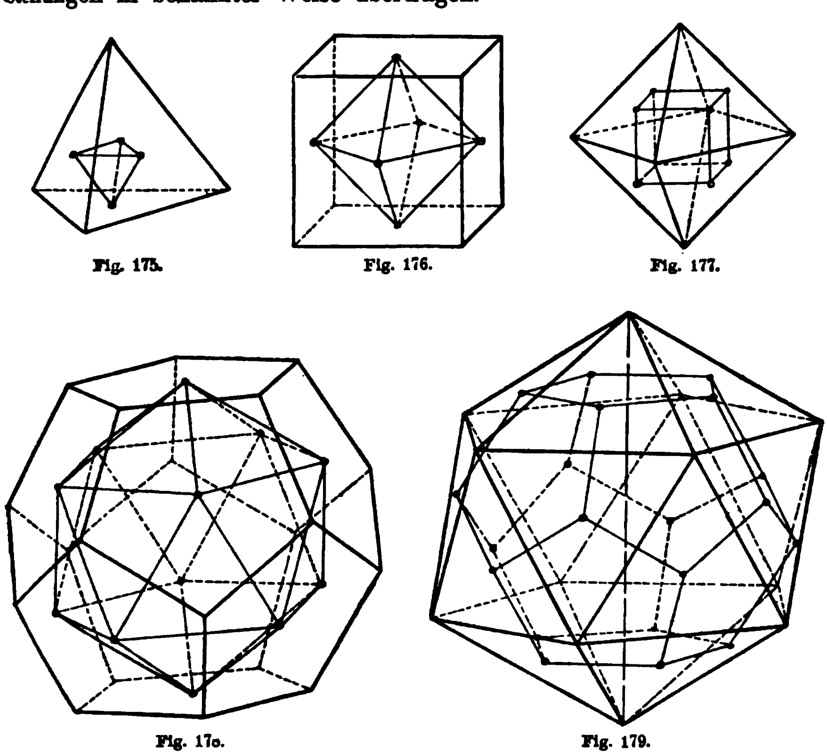


Fig. 175. Fig. 176. Fig. 177.

Fig. 17o. Fig. 179.

Verbindet man bei jedem der fünf regelmässigen Körper die Mittelpunkte je zweier aneinanderstossenden Seitenflächen durch gerade Linien, so bilden die letzteren wiederum die Kanten regelmässiger Körper (s. Fig. 175—179) und zwar sind:

die Mitten der Seitenflächen eines Tetraeders	die Ecken eines Tetraeders,
„ „ „ „ „ Würfels	„ „ „ Oktaeders,
„ „ „ „ „ Oktaeders	„ „ „ Würfels,
„ „ „ „ „ Dodekaeders	„ „ „ Ikosaeders,
„ „ „ „ „ Ikosaeders	„ „ „ Dodekaeders.

Der leicht zu führende Beweis kann dem Studierenden überlassen werden.

24) Drei Tangenten einer Ellipse und ein Brennpunkt derselben sind gegeben; man soll den andern Brennpunkt und die grosse Achse bestimmen.

Mit Hülfe von IV, 25 oder 26 zu lösen.

25) Dieselbe Aufgabe für die Hyperbel zu lösen.

Leicht nach IV, 34.

26) An zwei Ellipsen, welche durch grosse Achse und Brennpunkte gegeben sind, die gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen, wenn die gegebenen Ellipsen einen Brennpunkt gemeinschaftlich haben.

Mit Hülfe von IV, 26 zu lösen.

27) Den Ort eines Punktes M zu zeichnen, welcher von einem gegebenen Punkte und einem gegebenen Kreise gleiche Abstände hat.

Man findet eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem der gegebene Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt.

28) Den Ort des Mittelpunktes eines Kreises zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt.

Man findet eine Parabel.

29) Eine Parabel zu zeichnen, wenn zwei Punkte derselben und der Brennpunkt gegeben sind.

Es sind zwei Parabeln möglich.

30) Die Durchschnittspunkte einer Geraden g mit einer durch Brennpunkt und Leitlinie gegebenen Parabel zu bestimmen. Fig. 180.

Anl. zur Auflösung. Ist LL′ die Leitlinie, F der Brennpunkt, so besteht die Aufgabe darin, auf g einen Punkt M zu bestimmen, dessen Abstand von LL′ gleich seinem Abstand von F ist. Oder: Auf einer Geraden g den Mittelpunkt M eines Kreises zu bestimmen, welcher durch einen gegebenen Punkt F geht und eine gegebene Gerade LL′ berührt. Fällt man von F aus ein Lot auf g und verlängert dasselbe um sich selbst, so gelangt man zu einem zweiten Punkt G des gesuchten Kreises. Man gelangt dadurch zu der bekannten Aufgabe: Den Mittelpunkt M eines Kreises zu finden, welcher durch die beiden Punkte F und G geht und die Gerade LL′ berührt. Hiernach lassen sich die beiden möglichen Schnittpunkte nun leicht bestimmen.

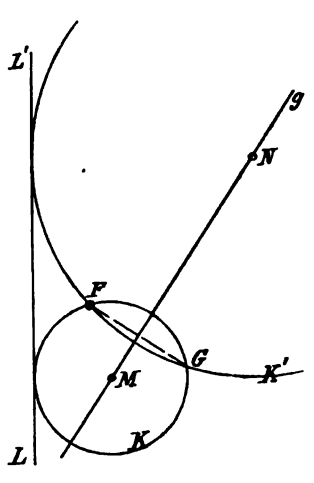


Fig. 180.

Eine ähnliche Betrachtung führt nun auch zur Lösung der folgenden Aufgabe:

31) Die Durchschnittspunkte einer Geraden g mit einer durch die beiden Brennpunkte und die Hauptachse gegebenen Hyperbel zu bestimmen.

32) Es sind drei Punkte (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) gegeben. Man soll durch dieselben die Mantelfläche eines geraden Kegels legen, dessen Achse senkrecht zu P_1 steht. Der Grundkreis und die Projektionen der Spitze sind zu bestimmen.

Wie viele Lösungen sind möglich?

33) Drei Punkte A, B und C einer in P_1 liegenden Geraden g sind gegeben. Man soll die Projektionen eines vierten Punktes M bestimmen, wenn die Neigungswinkel der Geraden AM, BM und CM gegen P_1 bekannt sind.

Aufl. mit Hülfe der Durchschnitte von drei geraden Kegelflächen.

Wie viele Lagen des Punktes sind möglich?

34) Es sind drei in P_1 liegende Punkte A, B und C gegeben. Man soll die Projektionen eines vierten Punktes M bestimmen, wenn die Winkel AMB, AMC und BMC gegeben sind.

35) Den Mittelpunkt einer Kugel von gegebenem Halbmesser zu bestimmen, welche drei gegebene Kugeln berührt.

Wie viele Kugeln sind möglich?

36) Drei auf P_1 stehende gerade Kegel mit kreisförmigen Grundflächen sind gegeben. Den Mittelpunkt einer Kugel von gegebenem Halbmesser zu finden, welche die drei Kegel berührt.

37) Den Abstand zweier durch ihre Projektionen gegebenen windschiefen Geraden a und b zu bestimmen. (Andere Aufl. der Aufgabe III, 27.)

Anl. zur Aufl. Man lege durch a eine Ebene E parallel zu b. Um b lege man eine Cylinderfläche, welche die Ebene E berührt. Der Halbmesser der Cylinderfläche ist dem gesuchten Abstand gleich.

38) Der Ort eines Punktes M, welcher von einem gegebenen Punkte F und einer Ebene E gleiche Abstände hat, ist ein Umdrehungsparaboloid, dessen Achse durch F geht und senkrecht zu E steht. Fig. 181.

Ist nämlich LL′ die Leitlinie, und F der Brennpunkt einer Parabel, M ein Punkt der letzteren, so ist nach IV, 27 der Abstand des Punktes M von LL′, nämlich $MN = MF$.

Drehen wir die ganze Figur um die Achse AB der Parabel, so beschreibt die letztere ein Umdrehungsparaboloid, und LL′ eine Ebene E, woraus die Richtigkeit des Satzes unmittelbar hervorgeht.

39) Der Ort eines Punktes M im Raume, welcher von einer Geraden LL′ und einem gegebenen Punkte F gleiche Abstände hat, ist eine parabolische Cylinderfläche. Fig. 182.

Ist wieder LL′ die Leitlinie, und F der Brennpunkt der Parabel DEG, und ziehen wir durch einen Punkt N der letztern die Gerade

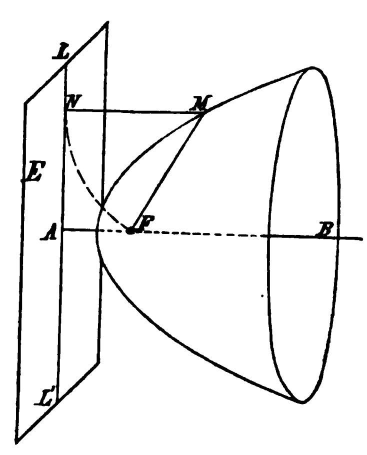


Fig. 181.

Fig. 182.

HK senkrecht zur Ebene der Parabel, ferner die Gerade FN, endlich PN ⊥ LL′, so ist PN = FN. Verbinden wir nun einen beliebigen Punkt M der Geraden HK mit P und mit F, und drehen das Dreieck FMN um MN, so kann dasselbe in die Lage MNP gebracht werden. Hieraus folgt, dass MF = PM ist. Alle Geraden, wie HK, liegen aber auf einer parabolischen Cylinderfläche.

40) Auf einer gegebenen Geraden g einen Punkt zu bestimmen, welcher von einem gegebenen Punkte A und einer anderen gegebenen Geraden g′ gleiche Abstände hat. Fig. 183.

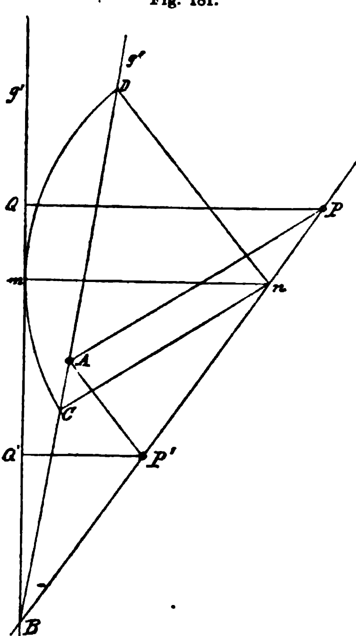


Fig. 183.

Aufl. Durch den Schnittpunkt B von g und g′ und durch A ziehe man die Gerade g″; man ziehe nun eine beliebige Senkrechte mn zu g′ und zeichne um n als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Halbmesser mn, welcher g″ in C und D schneidet. Zieht man nun AP parallel zu nC und AP′ parallel zu Dn, dann sind P und

P′ zwei Punkte, welche von A und von g′ gleiche Abstände haben. Es ist nämlich △ BCn ∾ △ ABP und △ Bmn ∾ △ BPQ (wenn PQ senkrecht zu g′ steht), folglich:

$$PQ : mn = BP : Bn$$
$$AP : Cn = BP : Bn$$

Da nun mn = Cn ist, so stimmen die beiden Proportionen in drei gleichstehenden Gliedern überein, folglich sind auch die vierten Glieder einander gleich, d. h. PQ = AP. Auf gleiche Weise folgt: Q′P′ = AP′.

(Andere Lösung der Aufgabe 30.)

41) **Durch zwei Punkte einen Kreis zu legen, welcher eine gegebene Gerade berührt.** — Leicht mit Hülfe der vorigen Lösung zu finden.

42) Auf einer durch ihre Projektionen $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ gegebenen

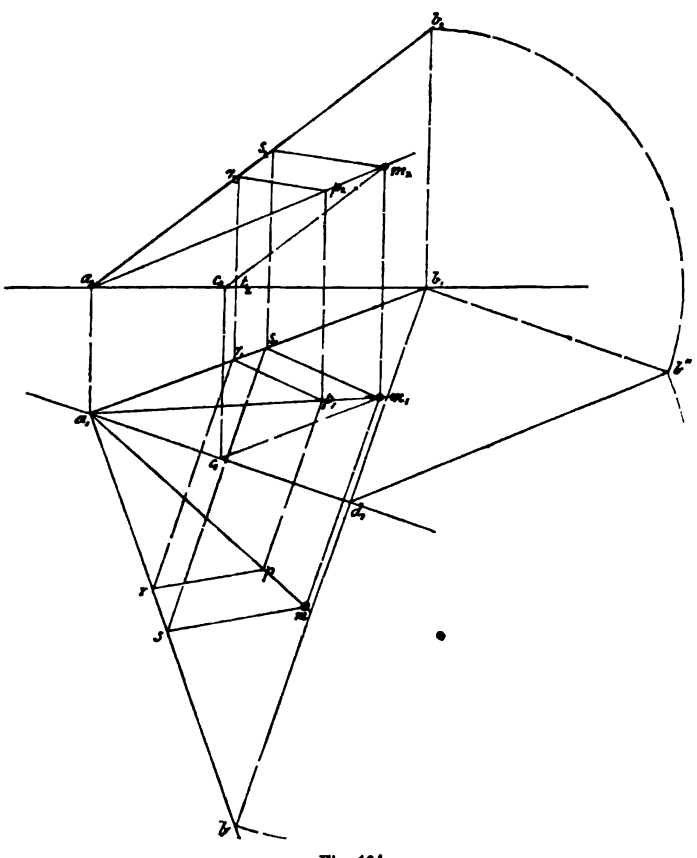


Fig. 184.

Geraden einen Punkt zu bestimmen, welcher von einem gegebenen Punkte $(m_1 m_2)$ und von der ersten Projektionsebene gleiche Abstände hat.

Aufl. Es sei $a_1 d_1$ die erste Spur der durch die gegebene Gerade $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ und durch den Punkt $(m_1 m_2)$ gelegten Ebene. (III, 7 u. 8.) Durch Niederklappung dieser Ebene in die erste Projektionsebene gelangt die gegebene Gerade nach $a_1 b$, und der gegebene Punkt nach m. — Wir ziehen nun die Gerade $a_1 m$, deren Projektionen nach der Zurückdrehung jener Ebene in die ursprüngliche Lage $a_1 m_1$ und $a_2 m_2$ sind. r_1 und r_2 seien die Projektionen eines beliebigen Punktes der Geraden $(a_1 b_1, a_2 b_2)$, dessen Abstand $r_2 t_2$ von der ersten Projektionsebene aus dem Aufriss zu entnehmen ist. — In der Umklappung kommt $(r_1 r_2)$ nach r; wir bestimmen nun auf $a_1 m$ einen Punkt p so, dass $rp = r_2 t_2$ ist. Durch Zurückdrehen der Ebene kommt p in die Lage $(p_1 p_2)$, und rp nach $(r_1 p_1, r_2 p_2)$, folglich sind nun $r_1 p_1$ und $r_2 p_2$ die Projektionen einer Strecke, deren wirkliche Länge $rp = r_2 t_2$ ist. — Ziehen wir durch $(m_1 m_2)$ die Gerade $(s_1 m_1, s_2 m_2)$ parallel zu $(r_1 p_1, r_2 p_2)$, so sind s_1 und s_2 die Projektionen des gesuchten Punktes.

Der ähnlich, wie in der vorigen Aufgabe leicht zu führende Beweis, kann dem Studierenden überlassen werden. Man bestimme auch den zweiten noch möglichen Punkt.

43) Den Mittelpunkt einer Kugelfläche zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt $(a_1 a_2)$ geht und die drei Projektionsebenen berührt. (Leicht mit Hülfe von 42.)

44) Durch einen gegebenen Punkt a eine Gerade so zu ziehen, dass ein gegebener Kreis K eine Sehne von gegebener Länge l auf derselben abschneidet.

Aufl. Man lege l beliebig in den Kreis K als Sehne, zeichne um den Mittelpunkt einen zu K konzentrischen Kreis k, welcher l berührt. Zieht man von a Tangenten an den letzteren, so wird auf jeder durch den Kreis K die Strecke l abgeschnitten.

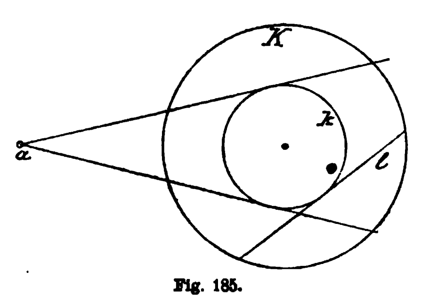


Fig. 185.

45) Durch einen Punkt $(a_1 a_2)$ eine Ebene zu legen, welche eine gegebene Kugel K in einem Kreise vom gegebenen Halbmesser r schneidet. Wie viel Lösungen sind möglich?

46) Durch eine gegebene Gerade g eine Ebene zu legen, welche

eine gegebene Kugel K in einem Kreise von gegebenem Halbmesser r schneidet. Wie viele Ebenen giebt es?

47) Durch einen Punkt $(a_1 a_2)$ eine Ebene zu legen, welche zwei gegebene Kugeln K_1 und K_2 in zwei gleich grossen Kreisen von gegebenem Halbmesser r schneidet.

48) Durch den Punkt $(a_1 a_2)$ eine Ebene senkrecht zur zweiten Projektionsebene so zu legen, dass sie zwei gegebene Kugeln in gleich grossen Kreisen schneidet.

Anleitung zur Auflösung. Die Lösung führt zu der planimetrischen Aufgabe: Durch den Punkt A eine Gerade zu ziehen, auf welcher von

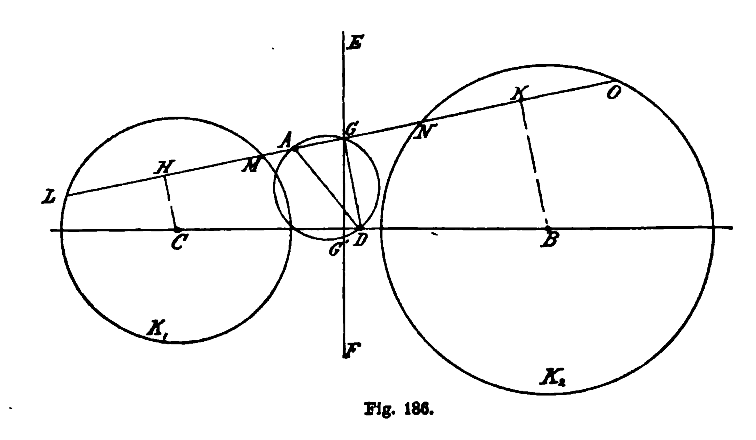


Fig. 186.

zwei gegebenen Kreisen K_1 und K_2 gleiche Sehnen abgeschnitten werden. Aufl. Es sei EF die Chordale der beiden Kreise, D die Mitte ihrer Zentrale BC. Zeichne über AD als Durchmesser einen Kreis, welcher die Chordale in G und G′ schneidet. Die Gerade AG wird verlängert, dann sind die innerhalb der beiden Kreise liegenden Strecken LM und NO gleich gross.

Beweis. Man fälle von C und B Lote auf LO und ziehe DG, dann steht DG auch senkrecht zu LO. Da $CD = BD$, so ist nun auch $GH = GK$. — Setzt man $LH = MH = s_1$ und $NK = KO = s_2$, $GH = GK = e$, so ist: $GN \cdot GO = GL \cdot GM$ oder $(e + s_1)(e - s_1) = (e + s_2)(e - s_2)$, d. h. $e^2 - s_1^2 = e^2 - s_2^2$, folglich $s_1 = s_2$. Wann ist eine Lösung nicht möglich?

49) Eine Ebene anzugeben, welche die drei Kugeln K_1, K_2 und K_3 in Kreisen schneidet, deren Halbmesser bez. r_1, r_2 und r_3 sind. Wie viele Ebenen sind möglich?

50) Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche zwei gegebene Kugeln K_1 und K_2 in Kreisen schneidet, deren Halbmesser bez. r_1 und r_2 sind. Wie viele Ebenen giebt es?

51) Parallel zu einer gegebenen Geraden sollen zwei gegebene Kugeln K_1 und K_2 von einer Ebene in zwei Kreisen geschnitten werden, deren Halbmesser bez. r_1 und r_2 sind. — In welchen Fällen ist die Lösung möglich. Wie viele Ebenen kann es geben?

52) Durch einen gegebenen Punkt $(a_1 a_2)$ eine Ebene zu legen, welche einer gegebenen Geraden g parallel ist und von einem anderen gegebenen Punkte $(b_1 b_2)$ den Abstand m hat.

Sind mehrere Ebenen möglich?

53) Durch 3 Punkte A, B und C eine Kugelfläche zu legen, welche eine gegebene Gerade g berührt. Fig. 187.

Anl. z. Aufl. Durch AB und C lege man die Ebene Q. Bestimme den Mittelpunkt D des durch AB und C gehenden Kreises K und ziehe

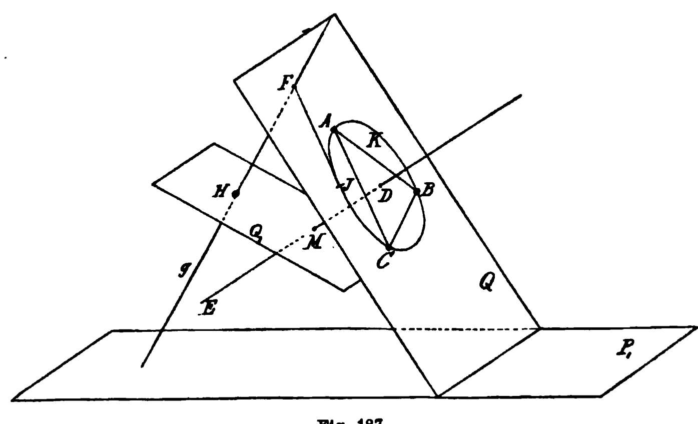


Fig. 187.

DE senkrecht zu Q. Auf DE liegt der Mittelpunkt der gesuchten Kugelfläche. Die Gerade g schneide Q in F. Ziehe von F die Tangente FJ an K und mache FH = FJ, dann berührt die gesuchte Kugelfläche die Gerade g in dem Punkte H. Legen wir nun durch H die Ebene Q_1 senkrecht zu g, so schneidet sie DE in dem gesuchten Mittelpunkte M.

Nach diesen Angaben versuche man die graphische Darstellung der Auflösung.

54) Durch drei gegebene Punkte eine Kugelfläche zu legen, welche eine gegebene Ebene berührt.

55) Durch 3 Punkte eine Kugelfläche zu legen, welche die erste Projektionsebene in einem Kreise von gegebenem Halbmesser schneidet.

Anl. z. Aufl. Es sei wieder EF, Fig. 188, die Gerade, welche durch den Mittelpunkt D des durch die drei gegebenen Punkte AB und C gelegten Kreises K geht und senkrecht zu dessen Ebene Q steht. EG sei die erste Projektion dieser Geraden. Der Mittelpunkt M der gesuchten Kugelfläche liegt auf EF, und seine erste Projektion m auf EG. m ist dann der Mittelpunkt des Kreises, in welchem die Kugel die erste Projektionsebene schneidet. Ist G der Punkt, in welchem EG die erste Spur s der Ebene Q trifft, und ist GH eine Tangente des Kreises K, so muss die Länge der Tangente Gn, welche von G an den Kreis K′ gezogen wird, gleich GH sein. In dem rechtwinkligen Dreieck mGn sind demnach die beiden Katheten mn und Gn bekannt. Aus diesen ergiebt sich die Hypothenuse Gm, wodurch die Lage des Punktes m, und damit auch M bestimmt ist.

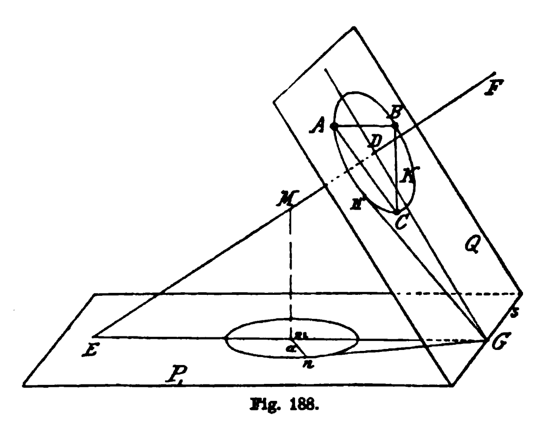


Fig. 188.

Näherungsweise Lösungen.

56) Alle Aufgaben der Geometrie führen schliesslich immer auf die Ermittelung der Lage eines oder mehrerer Punkte. Ein Punkt wird aber bestimmt als Durchschnitt zweier Geraden, oder zweier Kreise oder einer Geraden mit einem Kreise, in welchen Fällen man bei graphischer Ausführung der Lösung die mechanischen Hülfsmittel Zirkel und Lineal benutzt. Bekanntlich sind auf diese Weise alle Aufgaben ersten und zweiten Grades lösbar, und man pflegt diese Lösungen als vollkommene oder korrekte zu betrachten. Wenn die Aufgabe jedoch den zweiten Grad übersteigt, so reichen Zirkel und Lineal nicht mehr aus, man ist dann genötigt, zur Bestimmung der Lage eines Punktes noch eine oder zwei punktweise zu konstruierende Kurven zu Hülfe zu nehmen, aut

welchen der gesuchte Punkt liegen muss. Da nun der letztere nicht gerade einer der konstruierten Punkte sein wird, so liegt er auf einem solchen Teile der Hülfskurve, welcher zwischen zwei ermittelten Punkten aus freier Hand gezogen wird. Man kann demnach die sich daraus ergebende Lage des gesuchten Punktes nur als eine näherungsweise ansehen, welche aber, von der Hand eines geübten Zeichners ausgeführt, durchaus brauchbar ist.

Wir erläutern dies durch ein Beispiel aus der ebenen Geometrie.

57) Auf dem Umfang des Kreises K denjenigen Punkt zu bestimmen, für welchen die Summe seiner Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A und B am kleinsten oder am grössten ist.

Die folgende Überlegung führt zur Lösung der Aufgabe.

Wenn E (Fig. 189) eine Ellipse mit den Brennpunkten A und B ist, welche den Kreis K berührt, so hat der Berührungspunkt M die verlangte Eigenschaft. Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus IV, 24. Es ist jetzt nur noch die Bestimmung der Lage des Berührungspunktes M anzugeben.

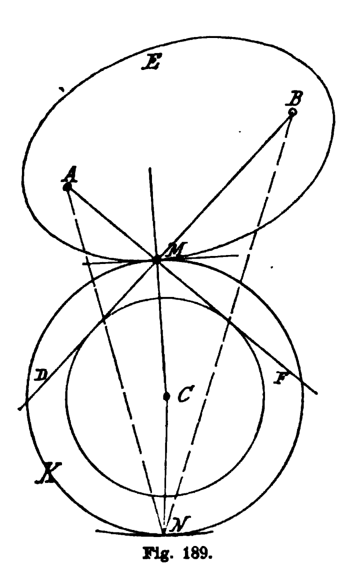


Fig. 189.

Der Kreis K und die Ellipse E haben in M eine gemeinschaftliche Tangente, welche nach IV, 25 die beiden Scheitelwinkel AMD und BMF halbiert. Folglich werden die Winkel AMB und DMF durch die Senkrechte (Normale) zur Tangente in M, d. h. durch den Halbmesser CM halbiert; deshalb hat der Mittelpunkt C von AF und BD gleiche Abstände. Man kann hiernach AF und BD als Tangenten eines zu K konzentrischen Kreises ansehen. Hiernach liegt M auf dem geometrischen Ort der Schnittpunkte der Tangenten, welche von A und B aus an Kreise, deren Mittelpunkt C ist, gezogen werden können. In Fig. 190 ist der Ort dieser Punkte vollständig dargestellt. Die Kurve hat eine Schleife; sie geht durch die beiden gegebenen Punkte A und B und durch den Mittelpunkt C. Sie erstreckt sich mit zwei Zweigen ins Unendliche und besitzt, wie eine einfache Überlegung ergiebt, eine Asymptote CZ, welche durch C geht und AB in Z halbiert. — In unserem Falle schneidet diese Kurve den Kreis K in den vier Punkten M, N, O und Q. — Der gestellten Auf-

gabe genügen aber nur die Punkte M und N. Für M ist die Summe AM + BM am kleinsten, für N aber ist die Summe am grössten.

Man sieht, dass es zur eigentlichen Bestimmung der Punkte M und N nicht der Zeichnung der ganzen Kurve, sondern nur einiger ihrer

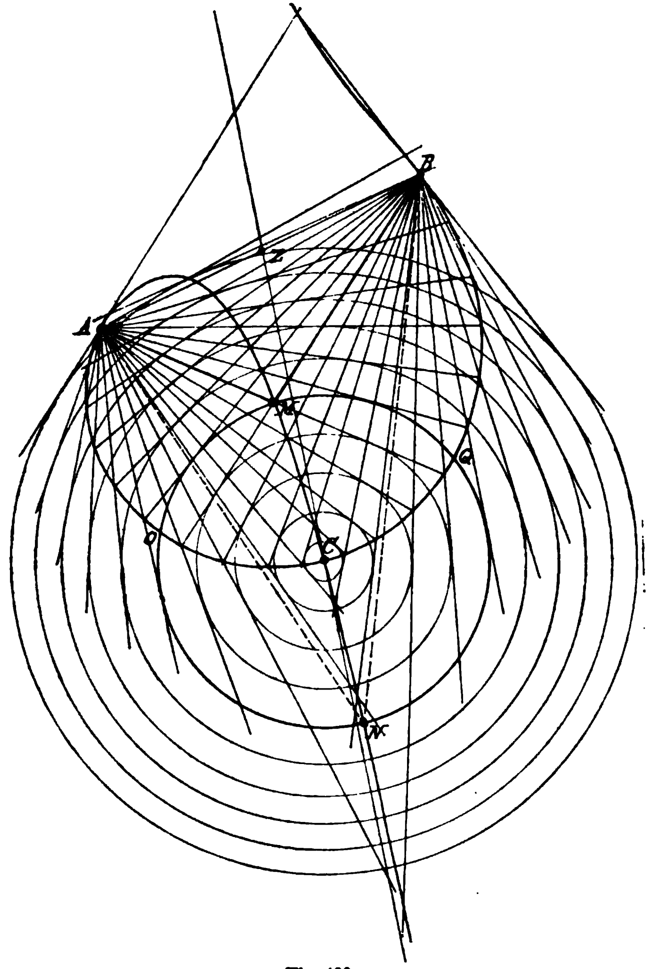


Fig. 190.

Punkte in der Nähe von M und N bedarf, wodurch die Konstruktion dann sehr einfach wird.

Haben A und B gleiche Abstände von C, so zerfällt die Kurve in eine durch C gehende Gerade und den durch A, B und C gehenden Kreis. Warum?

Untersuche die Fälle, wenn die durch A und B gehende Gerade den Kreis K schneidet.

58) Auf der Geraden g den Punkt M so zu bestimmen, dass die nach drei gegebenen Punkten A, B und C gezogenen Geraden die gleichen Winkel AMB und BMC (Fig. 191) miteinander bilden.

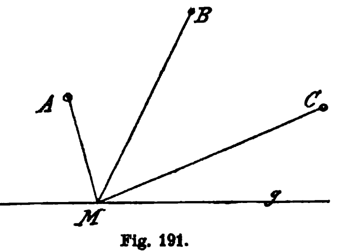


Fig. 191.

59) Durch drei gegebene Punkte $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$ eine Kugelfläche zu legen, welche einen geraden, auf P_1 stehenden Kreiscylinder $(K_1 K_2)$ berührt. Fig. 192.

α) Die drei gegebenen Punkte liegen in P_1. Aufl. Man bestimme den Mittelpunkt m_1 des durch a_1, b_1 und c_1 gehenden Kreises. Errichten wir in m_1 eine Senkrechte zu P_1, so liegt auf dieser der Mittelpunkt der gesuchten Kugel; folglich fällt die erste Projektion des letzteren mit m_1 zusammen. Da ferner die erste Projektion des Umrisses der Kugel ein

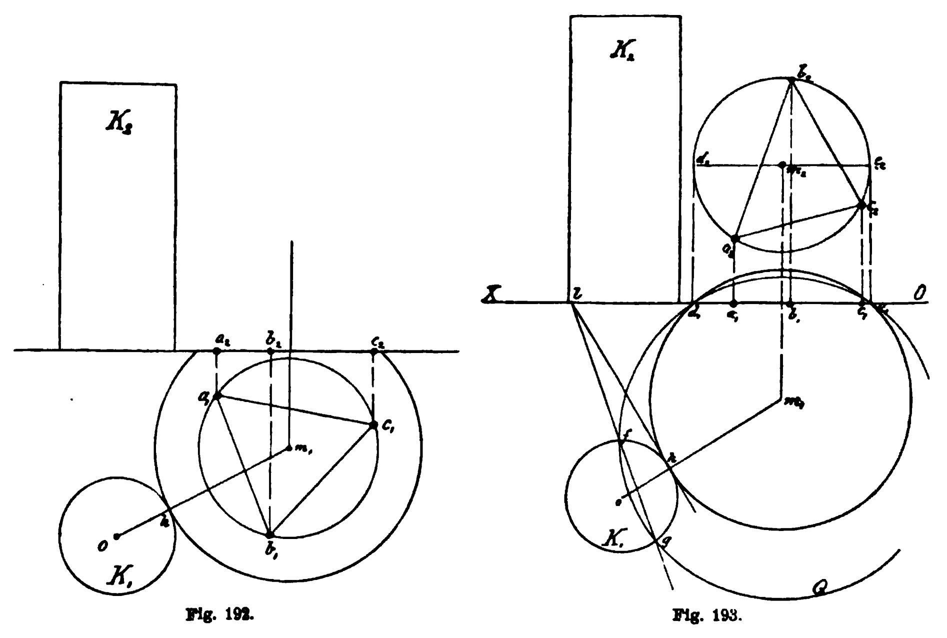


Fig. 192. Fig. 193.

grösster Kreis ist, welcher die erste Projektion der Cylinderfläche, d. h. den Grundkreis K_1 berührt, so ziehen wir $m_1 o$; dann ist $m_1 h$ der Halbmesser der gesuchten Kugel. — Hieraus ergiebt sich die erste Projektion. Die leichte Ermittelung der zweiten Projektion kann dem Studierenden überlassen werden.

β) Die Punkte $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$ liegen in der zweiten Projektionsebene. Fig. 193. Der Mittelpunkt der Kugel liegt auf der im Mittelpunkt m_2 des durch die gegebenen Punkte gehenden Kreises zu P_2 errichteten Senkrechten $(m_1 n_1, m_2 n_2)$. m_2 ist deshalb die zweite Projektion des gesuchten Mittelpunktes. Die erste Projektion $d_1 e_1$ des zur Achse OX parallelen Durchmessers $d_2 e_2$ fällt in OX. Durch d_1 und e_1 geht nun derjenige grösste Kreis, welcher den Umriss der ersten Projektion der Kugel darstellt. Die Aufgabe ist somit zurückgeführt auf die folgende: Durch die beiden Punkte d_1 und e_1 einen Kreis zu legen, welcher den Kreis K_1 berührt. Man zeichnet demnach einen Kreis Q, welcher durch d_1 und e_1 geht und K_1 schneidet. Durch die Schnittpunkte f und g geht die Chordale der beiden Kreise und trifft die Achse OX in l. Zieht man von l die Tangente lh an den Kreis K_1, so ist der Berührungspunkt h auch die Projektion des Punktes, in welchem die gesuchte Kugel den Cylinder berührt. Zieht man oh, so trifft diese $m_1 n_1$ in dem Mittelpunkt m_1 der gesuchten Kugel. Die zweite Projektion ergiebt sich leicht.

Anm. Es giebt noch eine zweite Kugel, welche den gegebenen Cylinder berührt, aber auch zugleich schneidet.

γ) Die 3 Punkte $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$ haben eine beliebige Lage. Aufl. Man kann unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass die Ebene, welche durch die 3 Punkte geht, senkrecht zur zweiten Projektionsebene steht, weil man ja stets P_2 so legen kann. Fig. 194.

Aufl. Wir konstruieren wieder die Gerade $(f_1 g_1, f_2 g_2)$, welche durch den Mittelpunkt des durch die 3 gegebenen Punkte gelegten Kreises geht und senkrecht zur Ebene des letzteren steht. Auf dieser muss der Mittelpunkt der gesuchten Kugel liegen. Sind dessen Projektionen m_1 und m_2, so würde der Halbmesser der Kugel gleich dem Abstand $m_1 n_1$ des Punktes m_1 von dem Kreise K_1 sein. $m_1 n_1$ erscheint aber im Grundriss in wahrer Länge. — Zeichnet man die zweite Projektion des durch die 3 gegebenen Punkte gehenden Kreises, so ist diese eine zu $f_2 g_2$ senkrechte Gerade $d_2 e_2$, deren Länge gleich dem Durchmesser des Kreises ist. Die zweite Projektion des Umrisses der Kugel ist ein grösster Kreis, welcher durch d_2 und e_2 geht; die wahre Länge des Halbmessers würde gleich $m_2 d_2$ sein, weil dessen erste Projektion parallel zur Achse ist. Zur Bestimmung der Lage der Projektionen m_1 und m_2 bemerken wir, dass in dem Linienzug $o m_1 m_2 d_2$ die Strecke $m_2 d_2 = m_1 n_1$ sein muss, und nun benutzen wir eine näherungsweise Lösung, indem wir den Ort der Punkte suchen, welche auf Senkrechten zu $f_1 g_1$ liegen und von d_2 einen Abstand haben,

welcher gleich der Entfernung des Fusspunktes der betreffenden Senkrechten auf $f_1 g_1$ von dem Umfang des Kreises K_1 ist. Ziehen wir z. B.

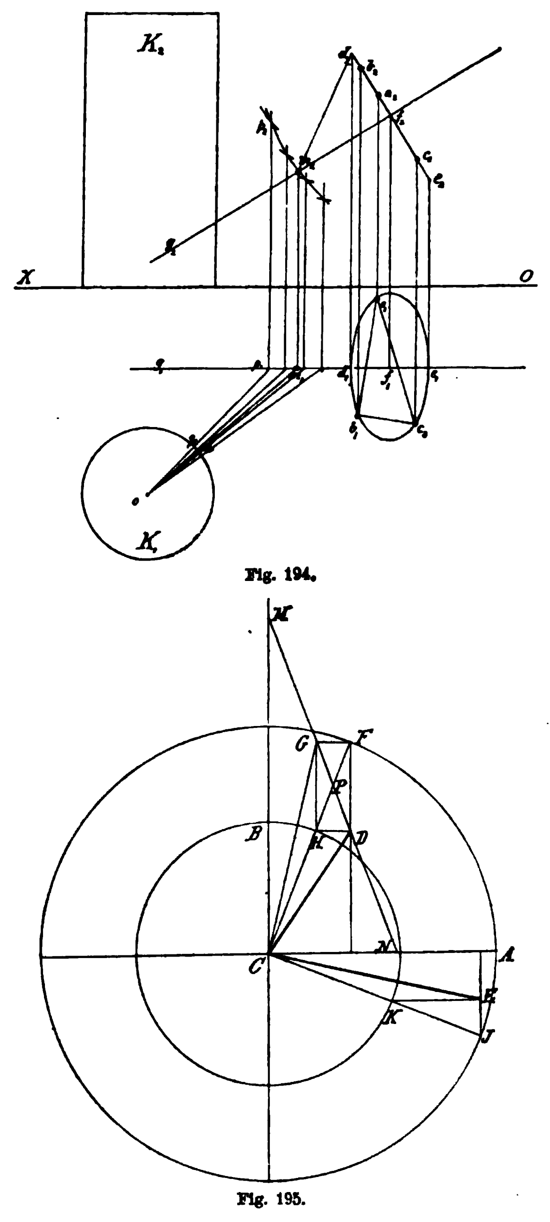


Fig. 194.

Fig. 195.

op_1 beliebig, $p_1 p_2 \perp OX$ und schneiden von d_2 aus mit einem Halb-

messer d_2p_2, welcher gleich p_1q_1 ist, die Senkrechte p_1p_2 in p_2, so ist p_2 ein Punkt jenes Ortes. Durch die Bestimmung einiger Punkte dieses Ortes wird man die Kurve mit hinreichender Genauigkeit zeichnen können. Ihr Durchschnitt m_2 mit f_2g_2 ist die zweite Projektion des Mittelpunktes der gesuchten Kugel. Die weitere Ausführung ist leicht.

(Zu IV, 20.)

60) Aus zwei konjugierten Durchmessern einer Ellipse die Hauptachsen zu finden. Fig. 195.

Aufl. Es seien CD und CE zwei konjugierte Halbmesser, $CA = a$ und $CB = b$ die halben Achsen der Ellipse. Sind nun CF und CJ die beiden aufeinander senkrecht stehenden Halbmesser des Hauptkreises, denen in der Ellipse die konjugierten Halbmesser CD und CE entsprechen, und sind die Endpunkte D und E nach IV, 5 (Fig. 57) konstruiert, so ist: $\triangle DFH \cong \triangle EJK$. Ergänzt man das rechtwinklige Dreieck DFH zu dem Rechteck DFGH, so ist: $GH = KE$, $CH = CK$ und $\angle CHG = \angle CKE$ (weil $\angle GHF = \angle JKE$), folglich ist $\triangle CGH \cong \triangle CEK$, mithin auch: $CG = CE$ und $\angle GCE = \angle HCK = R$. Verlängert man die Diagonale DG, bis sie die Hauptachsen in M und N schneidet,

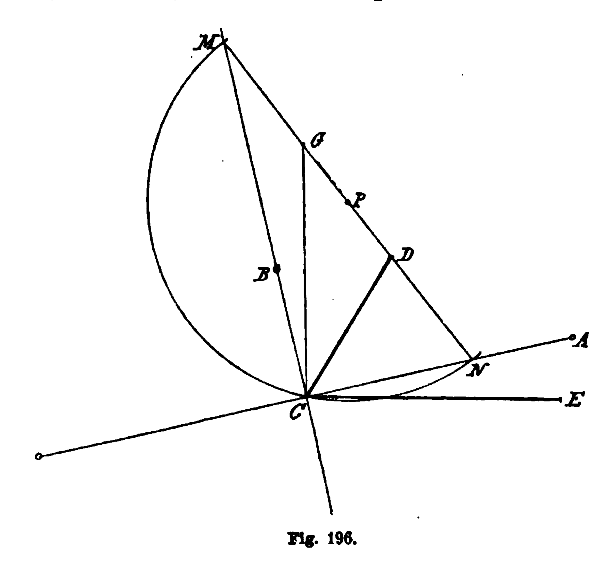


Fig. 196.

so ist: $\triangle CPM \sim \triangle HPG$ und $\triangle CPN \sim \triangle HPD$. Es sind aber HPG und HPD gleichschenklige Dreiecke, folglich ist auch: $PM = CP = PN$. Man sieht nun leicht, dass $MG = CH = b$ und $NG = CF = a$ ist. Hieraus ergiebt sich die Rytz'sche Konstruktion (Fig. 196):

Ziehe $CG \perp CE$ und mache $CG = CE$, halbiere DG in P und zeichne um P als Mittelpunkt einen Kreis, welcher durch C geht. Dieser schneidet die verlängerte Gerade DG in M und N. Dann geben die Geraden CN und CM die Richtungen der beiden Hauptachsen an. — Die Längen der halben Achsen sind $CA = GN$ und $CB = GM$.

Die Rytz'sche Konstruktion ist gut anwendbar, wenn die Punkte D und G nicht zu nahe bei einander liegen.

Die folgende Konstruktion ist deshalb noch vorzuziehen.

Sind wieder CD und CE (Fig. 197) die gegebenen konjugierten Halbmesser, CF und CJ die entsprechenden senkrecht aufeinander stehenden Halbmesser des Hauptkreises, CA und CB die Hauptachsen,

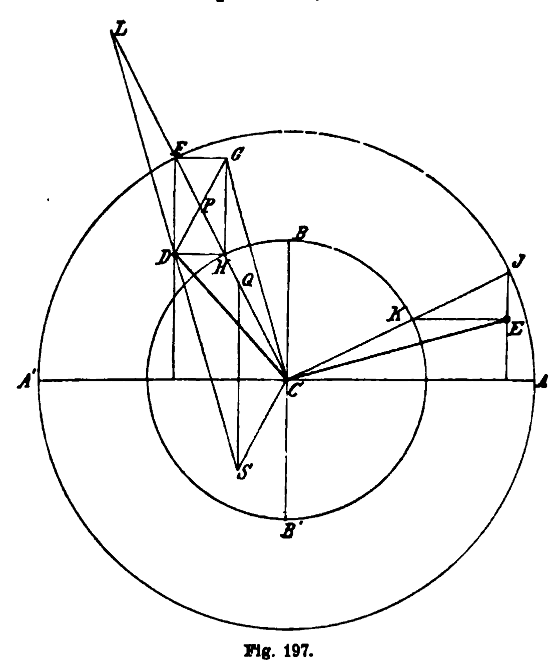


Fig. 197.

dann ist wieder $\triangle CGH \cong \triangle CKE$. Wird CF um $FL = CH$ verlängert, so ist $\triangle DFL \cong \triangle CGH \cong \triangle CKE$. Demnach steht $DL \perp CE$, und es ist $DL = CE$. Trage FH nach CQ und ziehe QS parallel DF, CS parallel DG, so ist $\triangle CQS$ gleichschenklig, denn es ist $\triangle DPF$ ähnlich. Da CA' senkrecht zu QS steht, so ist CA' die Halbierungslinie des Winkels LCS. Ferner ist $FQ = CH = LF$, also $LQ = 2\,LF$ und $QS = 2\,DF$, folglich liegt S auf der Verlängerung von LD, und es ist $DS = DL\ (= CE)$.

Hieraus ergiebt sich folgende Konstruktion, Fig. 198:

Ziehe durch den Endpunkt D des Halbmessers CD die Gerade LS $\perp$ CE und mache DL = DS = CE, ziehe dann CS. Die Halbierungslinie AA′ des Winkels LCS ist die grosse Achse; die kleine Achse BC steht senkrecht zu AA′. — Um die Mitte P der Geraden CL zeichne

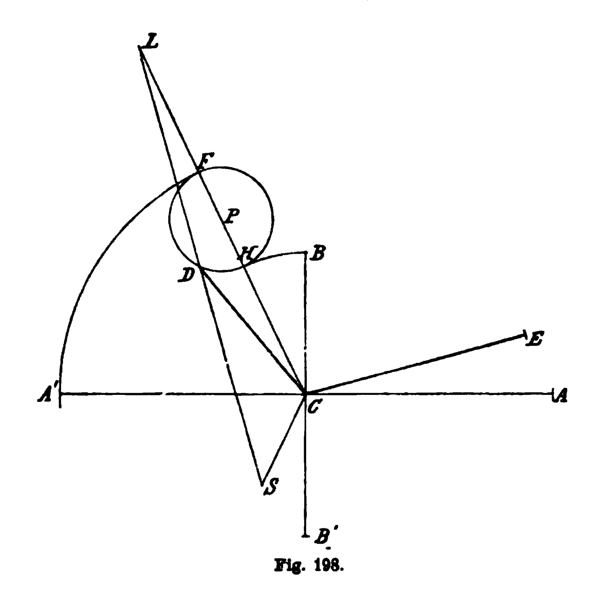


Fig. 198.

man einen Kreis, welcher durch D geht. Der Kreis schneidet CL in F und H, dann ist die halbe grosse Achse der Ellipse gleich der Strecke CF, die halbe kleine Achse gleich FL. (S. Darstellende Geometrie von Chr. Wiener. Bd. I.)

61) Das Parallelogramm cdef ist die gerade Projektion der einen Seitenfläche eines Würfels. — Man soll die Projektion des Würfels vollständig angeben.

62) Ein gerader Kegel, welcher mit der Grundfläche auf P_1 steht, wird von einer zu P_2 parallelen Ebene E in einer Hyperbel geschnitten. Fig. 199. — Ist der Kreis k_1 die erste Projektion eines der Grundfläche parallelen Schnittes der Kegelfläche, so entsprechen demselben im Aufriss die beiden zur Achse OX parallelen Geraden p_2q_2 oder $p_2'q_2'$ als zweite Projektionen. Auf diesen liegen senkrecht über m_1 und n_1 die Punkte m_2 bez. m_2' und n_2 bez. n_2' als Punkte des Schnittes im Aufriss. Die beiden Projektionen der äussersten Seitenlinien des Kegelmantels, nämlich die Geraden cd und ef erscheinen als die Asymptoten

der Hyperbel. Denn aus der Konstruktion ergiebt sich leicht, dass die Strecke $n_2 q_2 = n_2' q_2' = n q_1$ mit grösserer Entfernung des kreisförmigen Schnittes der Kegelfläche von der Spitze fortwährend abnimmt, aber erst in unendlicher Entfernung von derselben zu Null wird.

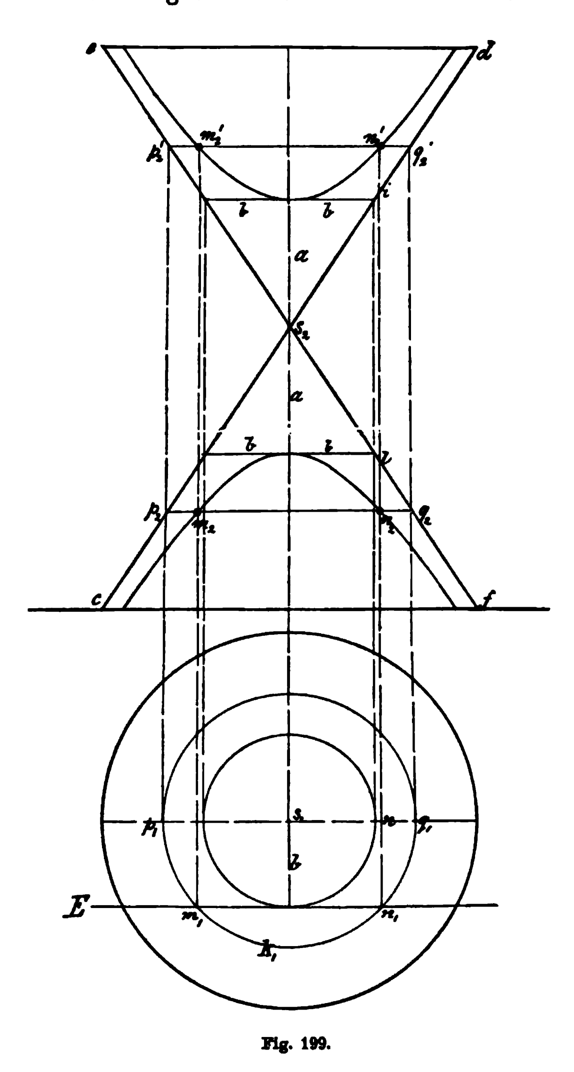


Fig. 199.

Bezeichnen wir die Entfernung der Ebene E von der Achse des Kegels mit b (s. Grundriss), die halbe Achse der Hyperbel mit a, so verhält sich:

$$b : a = n_2{}'q_2{}' : n_2{}'i$$

und $$b : a = n_2{}'p_2{}' : n_2{}'l.$$

Durch Multiplikation folgt hieraus:

$$b^2 : a^2 = n_2{}'q_2{}' \cdot n_2{}'p_2{}' : n_2{}'i \cdot n_2{}'l \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Es ist aber $n_2{}'p_2{}' = np_1$ und $n_2{}'q_2{}' = nq_1$,

folglich $n_2{}'p_2{}' \cdot n_2{}'q_2{}' = np_2 \cdot nq_2 = nn_1^2 = b^2$;

d. h. in der Proportion (1) ist das erste Glied gleich dem dritten Glied. Folglich ist auch:

$$n_2{}'i \cdot n_2{}'l = a^2$$

oder auch, weil $n_2{}'l = n_2 i$ ist:

$$n_2{}'i \cdot n_2 i = a^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Hieraus folgt für den Satz VIII, 6 ein kürzerer Beweis. Aus Fig. 155 erkennt man sofort die Richtigkeit der Gleichung:

$$m_2 g_2 \cdot m_2 h_2 = r^2$$

woraus hervorgeht, dass die zweite Projektion des Umrisses der dargestellten Umdrehungsfläche eine Hyperbel ist.

Druck von Grimme & Trömel in Leipzig.

Berichtigung.

Die Druckbogen tragen irrtümlich die Bezeichnung 4. Auflage anstatt 5. Auflage.

Lehrbuch

der

Darstellenden Geometrie

von

J. SCHLOTKE

Direktor a. D. der Gewerbeschule in Hamburg

II. Teil

Schatten- und Beleuchtungslehre

Mit 79 Figuren

Dritte Auflage

Dresden

Verlag von Gerhard Kühtmann

1902

Einleitung.

Die Projektionen eines Gegenstandes sind Abbildungen desselben, deren Herstellungsweise im ersten Teile dieses Werkes ausführlich dargestellt ist. Um die Anschaulichkeit der Abbildungen zu erhöhen, sind noch die vorkommenden Schatten hinzuzufügen, und muss ausserdem auch die Helligkeit der einzelnen Flächen berücksichtigt werden. Deshalb zerfällt dieser Teil der angewandten Darstellenden Geometrie in die Schattenlehre und die Beleuchtungslehre.

1) Entstehung der Schatten. Ein Körper K werde von einer Lichtquelle L Fig. 1 (α) aus beleuchtet. Die Strahlen pflanzen sich bekanntlich in gerader Linie fort; es werden deshalb diejenigen Strahlen, welche die Oberfläche des Körpers treffen, die letztere erleuchten, während andere

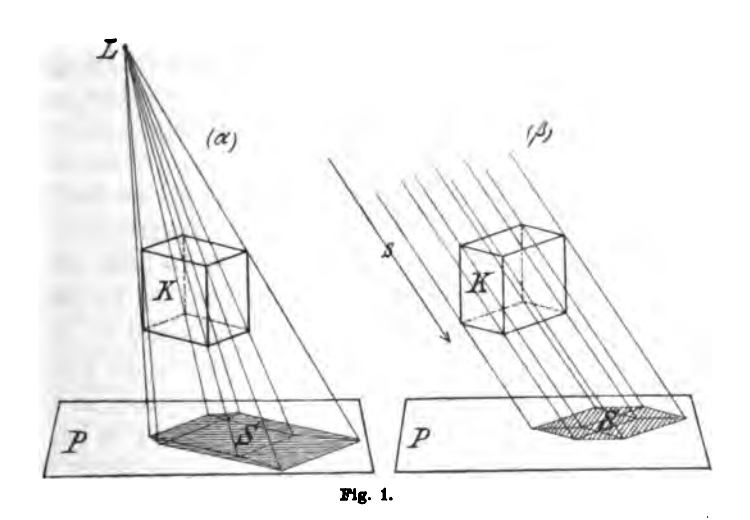


Fig. 1.

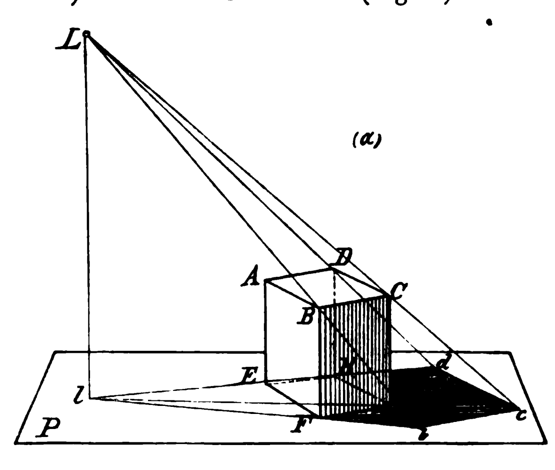
Strahlen entweder den Körper nur streifen (bei krummen Oberflächen berühren) oder ihn überhaupt nicht treffen. Befindet sich, von der Lichtquelle aus gesehen, eine Ebene P hinter dem Körper, so wird die letztere nicht erreicht von denjenigen Strahlen, welche vorher auf den Körper fallen. Infolgedessen wird ein Teil der Ebene P unbeleuchtet bleiben, d. h. dunkler

erscheinen als der von den Lichtstrahlen getroffene Teil. Der nicht beleuchtete Teil der Ebene P heisst nun der Schlagschatten, welchen der Körper auf P wirft. Die Umrisse desselben ergeben sich durch die Schnittpunkte aller derjenigen Lichtstrahlen mit P, welche die Oberfläche des Körpers streifen, ohne in letzteren einzudringen.

Ist die Lichtquelle unendlich fern, Fig. 1 (β), so sind die Strahlen als parallel anzusehen, was z. B. beim Sonnenlicht nahe zutreffend ist. Diese Beleuchtung wird bei technischen und perspektivischen Zeichnungen vorzugsweise berücksichtigt. Alles oben Gesagte ist auch für diesen Fall gültig und es ist leicht aus Fig. 1 ersichtlich:

Der Schatten, welchen ein Körper K auf eine Ebene P wirft, ist bei endlicher Entfernung der Lichtquelle L eine Centralprojektion, und bei unendlicher Entfernung derselben eine Parallelprojektion des Körpers auf P.

2) Es sei ABCDEFGH (Fig. 2) ein rechtwinkliges Parallelepipedum, welches mit der Grundfläche EFGH auf der Ebene P steht. L sei die Lichtquelle und l die Projektion des Punktes L auf P. Man ziehe von L aus durch den Eckpunkt C einen Strahl, dann ist lG die Projektion des Strahles auf P. Nun schneidet LC die Projektion lG in c und dieser Punkt ist der Schatten des Eckpunktes C. Auf gleiche Weise findet man die Schatten der Punkte B und D in b und d. Alle Strahlen, welche die Kante BC streifen, liegen in einer Ebene, welche P in bc, dem Schatten der Kante BC, schneidet. Ebenso findet man cd als Schatten von CD und bF und dH als Schatten der zu P senkrechten Kanten BF bez. DH.



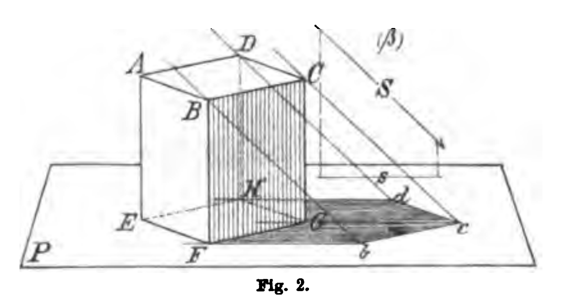


Fig. 2.

In β) ist die Schattenkonstruktion für denselben Fall bei Annahme paralleler Strahlen dargestellt. S sei ein beliebiger Strahl und s seine

Projektion auf P. Um den Schatten des Punktes C zu finden, zieht man den Strahl Cc parallel zu S und die Projektion Gc des Strahles parallel zu s. Cc schneidet seine Projektion in c, und dieser Punkt ist der Schatten von C. In gleicher Weise bestimmt man die Schatten der übrigen Eckpunkte, wodurch sich dann auch die Schatten der einzelnen Kanten ergeben.

In (α) treffen die Schatten bF und dH der beiden zu P senkrechten Kanten BF und DH in der Projektion l der Lichtquelle zusammen; in (β) liegt L und folglich auch l unendlich fern, deshalb sind in diesem Falle die Schatten der Kanten BF und DH parallel.

Aus dieser Darstellung ergiebt sich die Entstehungsweise der Schlagschatten in einfachster Weise. Man erkennt auch leicht diejenigen Seitenflächen des Körpers, welche von den Lichtstrahlen nicht getroffen werden und deshalb, wie man zu sagen pflegt, im Eigenschatten liegen; es sind diese in Fig. 2 (α) und (β) die Rechtecke BCGF und CDHG, von welchen die letztere nicht sichtbar ist. Der Umriss des Schlagschattens rührt stets von den Grenzlinien zwischen den erleuchteten und nicht erleuchteten Flächen her. Diese Linien sind aber BC, CD, BF und DH. Konstruiert man die Schatten der übrigen Kanten, z. B. von AB und AD, so zeigt sich, dass dieselben innerhalb der Grenzen des Schlagschattens liegen, oder auch in die Grundfläche des Körpers fallen.

Wir fügen noch einige einfache Gesetze über die Schatten gerader Linien hinzu, welche in den Anwendungen von Nutzen sind.

3) Ist eine Gerade G parallel zu einer Ebene P, so ist der Schatten derselben auf P parallel zu G.

Die durch G gehende Ebene aller Lichtstrahlen schneidet nämlich P in einer Geraden, welche parallel zu G ist.

4) Steht eine Gerade G senkrecht zu einer Ebene P, so fällt der Schatten derselben auf P mit der Projektion des durch den Endpunkt von G gehenden Strahles zusammen.

Die durch G gehende Ebene der Lichtstrahlen steht senkrecht zu P, folglich schneidet sie P in der Projektion eines Strahles.

Beide Gesetze sind gültig für eine endliche oder unendliche Entfernung der Lichtquelle.

I. Abschnitt.

Konstruktion der Schlagschatten in den durch Parallelprojektionen dargestellten Abbildungen bei der Annahme paralleler Lichtstrahlen.

Schatten eines Punktes.

1) Man soll den Schatten eines durch seine Projektionen a_1 und a_2 gegebenen Punktes A, welchen derselbe auf eine der Projektionsebenen wirft, bestimmen. (Fig. 3 u. 4.)

Aufl. Die Lage eines Strahles S ist bestimmt, wenn die beiden Projektionen s_1 und s_2 desselben gegeben sind. Alle anderen Strahlen sind zu S und folglich ihre Projektionen zu s_1 bez. s_2 parallel. Es ist allgemein

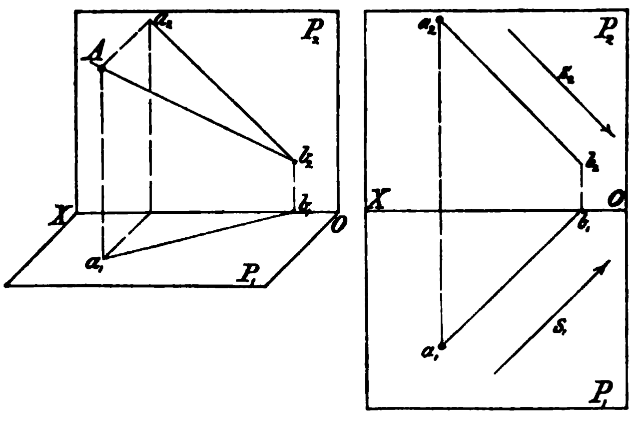


Fig. 3.

gebräuchlich, die Richtung der Strahlen in der Regel so zu wählen, dass die Projektionen s_1 und s_2 die Achse OX unter Winkeln von 45° treffen.

Dass man von dieser Annahme in solchen Fällen, wo die Schatten ungünstig ausfallen, oder gar die Deutlichkeit der Zeichnung beeinträchtigen, auch beliebig abweichen kann, ist selbstverständlich. Der Schatten des Punktes A ist nun der Durchschnitt des durch A gehenden Strahles mit einer der Projektionsebenen. Man zieht durch (a_1, a_2) den Strahl $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ parallel zu (s_1, s_2). In Fig. 3 trifft derselbe die zweite Projektionsebene P_2, bevor er die erste P_1 erreicht; folglich ist b_2 der Schatten, welchen der ge-

gebene Punkt auf P_2 wirft. In Fig. 4 fällt der Schatten des Punktes (a_1 a_2) in b_1 auf die erste Projektionsebene.

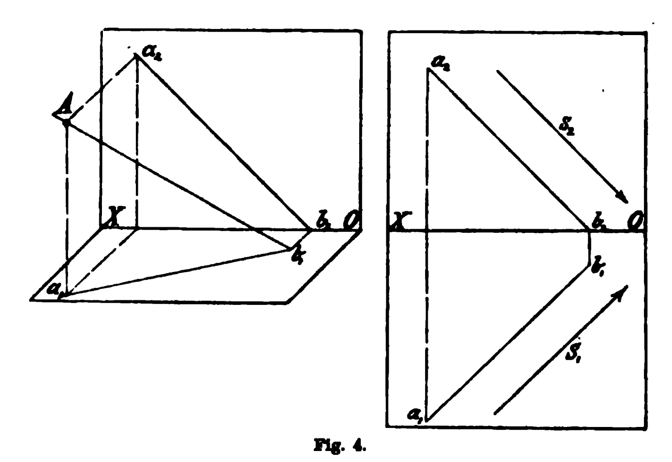


Fig. 4.

Die Ermittelung des Schattens, welchen ein Punkt A auf P_1 oder P_2 wirft, besteht demnach in der Aufsuchung der Spuren des durch zwei Projektionen gegebenen Strahles.

Schatten gerader Linien.

2) Die Gerade AB (a_1 b_1, a_2 b_2) stehe senkrecht zu P_1. Man soll den Schatten bestimmen, welchen dieselbe auf P_1 und P_2 wirft. (Fig. 5.)

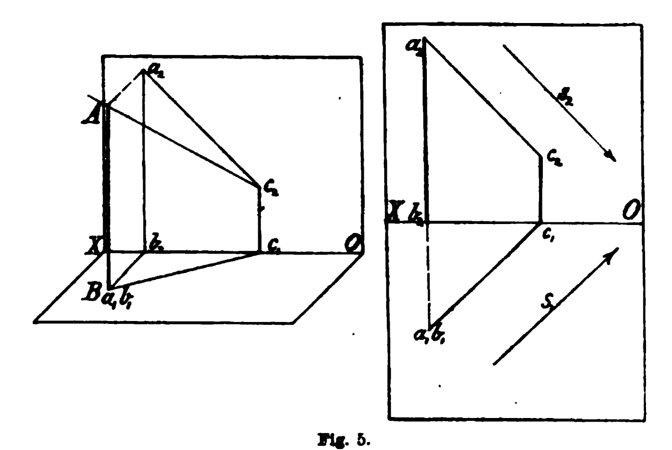


Fig. 5.

Aufl. Man ziehe durch ($a_1 a_2$) den Strahl (a_1 c_1, a_2 c_2) parallel zu (s_1 s_2). Dieser Strahl schneidet P_2 in dem senkrecht über c_1 liegenden Punkte c_2. Nach Einl. 4 fällt der Schatten der gegebenen Geraden auf P_1 mit der Projektion b_1 c_1 zusammen und von c_1 geht derselbe nach c_2 auf

P_2 über. Nach Einl. 3 muss dieser Teil des Schattens parallel zu AB, d. h. senkrecht zu OX sein. (Man vergl. auch die Darstellung in schiefer Projektion).

Die Gerade AB ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) habe eine beliebige Lage (Fig. 6). Es sei a_1 die erste, b_2 die zweite Spur der gegebenen Geraden. Durch einen beliebigen Punkt M ($m_1 m_2$) der letzteren ziehe man den Strahl ($m_1 n_1$, $m_2 n_2$).

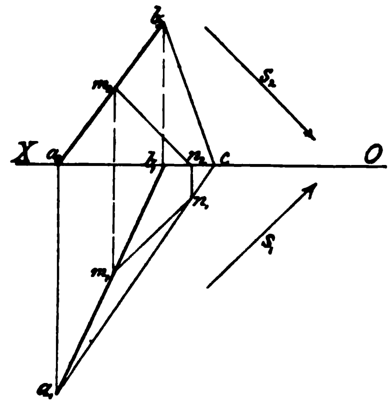


Fig. 6.

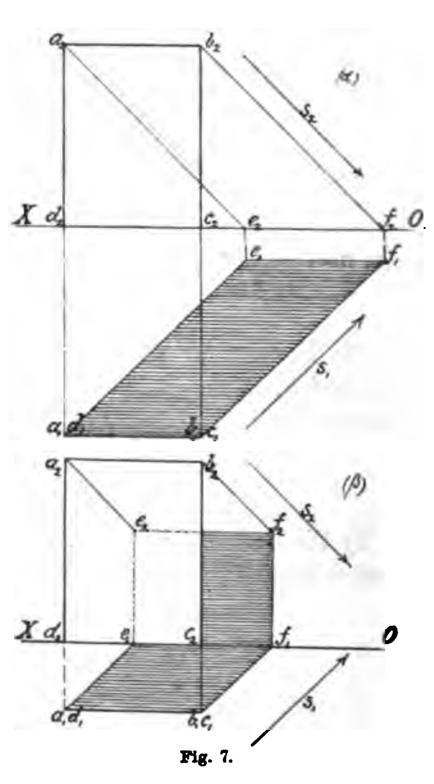


Fig. 7.

Die erste Spur desselben, nämlich der senkrecht unter n_2 liegende Punkt n_1, ist zugleich der Schatten des Punktes M. Der Schatten der Geraden AB, welcher auf P_1 fällt, geht nun von a_1 durch n_1 bis zum Durchschnitt c mit der Achse OX. Die Gerade von c nach der zweiten Spur b_2 stellt endlich den auf P_2 fallenden Schatten dar.

Man erkennt aus Fig. 6 leicht die Lösung der Aufgabe: Durch die Gerade ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) eine Ebene zu legen, welche der Geraden (s_1, s_2) parallel ist. Die Spuren dieser Ebene sind zugleich die Schatten der gegebenen Geraden auf P_1 und P_2.

3) Schatten, welchen eine rechteckige Fläche auf die Projektionsebenen wirft. Fig. 7 (α) u. (β).

Das Rechteck ($a_1 b_1 c_1 d_1$, $a_2 b_2 c_2 d_2$), Fig. 7 (α) sei parallel zu P_2 und stehe mit einer Seite ($c_1 d_1$, $c_2 d_2$) auf P_1. Die Projektion des Rechtecks auf P_1 fällt alsdann mit dieser Seite zusammen. Man ziehe die Strahlen ($a_1 e_1$, $a_2 e_2$) und ($b_1 f_1$, $b_2 f_2$); dieselben treffen P_1 in e_1 und f_1. Nach Einl. 3 ist $e_1 f_1$ als Schatten von ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) parallel zu der letzteren, und die Schatten der zu P_1 senkrechten Seiten des Rechtecks fallen nach Einl. 4

mit den Projektionen $d_1 e_1$ und $c_1 f_1$ der Lichtstrahlen zusammen. Demnach ist der Schatten des gegebenen Rechtecks das Parallelogramm $c_1 d_1 e_1 f$.

Steht das Rechteck näher an P_2, so fällt ein Teil des Schattens auch auf die zweite Projektionsebene. Dieser Fall ist in Fig. 7 (β) dargestellt.

Zur Übung mögen folgende Beispiele dienen:

4) Fig. 8 (α) stellt ein Rechteck vor, aus welchem vier andere Rechtecke herausgeschnitten sind (Fensterrahmen). Der ebenso wie in Fig. 7 (α)

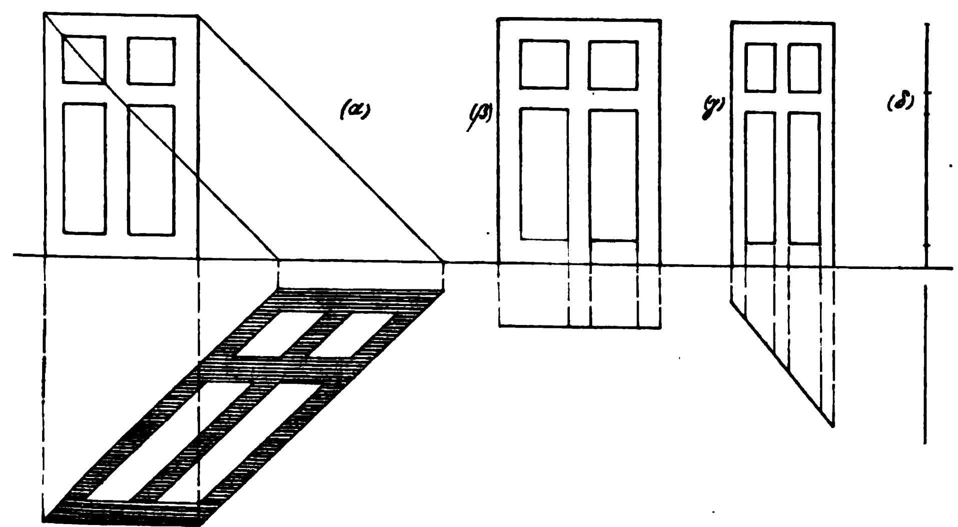


Fig. 8.

zu bestimmende Schatten ist in Fig. 8 (α) angegeben. Man konstruiere den Schatten, welchen diese Figur in den Stellungen (β), (γ) und (δ) auf P_1 und P_2 wirft.

Ebenso für die in Fig. 9—12 dargestellten Flächen die Schatten zu konstruieren, welche dieselben auf die Projektionsebenen werfen.

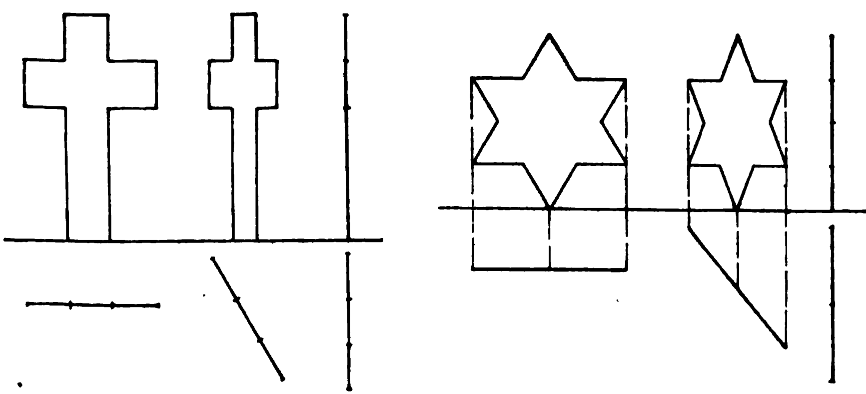


Fig. 9. Fig. 10.

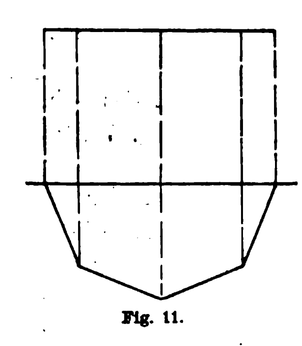


Fig. 11.

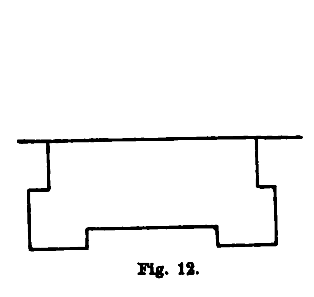


Fig. 12.

Schatten des Kreises.

5) Der gegebene Kreis stehe parallel zu P_2 (Fig. 13), so dass seine erste Projektion $a_1 b_1$ als gerade Linie erscheint. Der Schatten eines beliebigen Punktes (m_1, m_2) des Umfanges wird auf bekannte Weise gefunden. Man ziehe den Strahl ($m_1 n_1$, $m_2 n_2$) und bestimme durch die zur Achse OX senkrechte Gerade $n_2 n_1$ die erste Spur n_1 desselben. n_1 ist dann der gesuchte Schatten. Durch Bestimmung der Schatten einer hinreichenden Zahl von Punkten ergiebt sich endlich der Schatten des Kreises. Da derselbe eine schiefe Projektion des letzteren ist, so folgt nach (IV, 19, I. Teil) hieraus, dass der Schatten eine Ellipse sein muss.

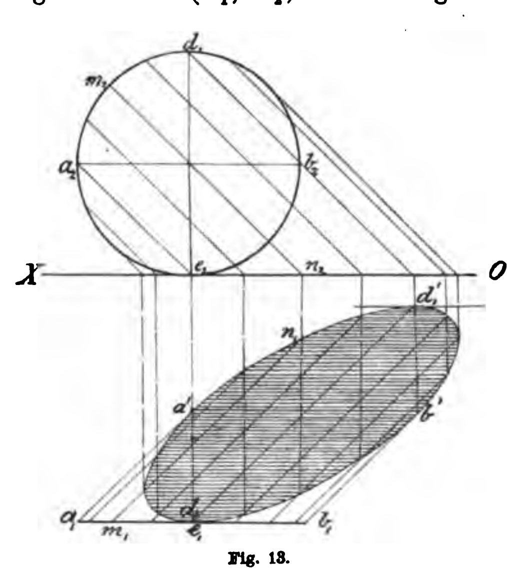


Fig. 13.

Ist $d_1'e_1$ der Schatten des zu P_1 senkrechten Durchmessers ($d_1 e_1$, $d_2 e_2$) und $a'b'$ der Schatten des Durchmessers ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$), welcher parallel zu P_1 ist, so sind nach (IV, 18, I. Teil) $d_1'e_1$ und $a'b'$ konjugierte Durchmesser der Ellipse. Die Tangenten in d_1' und e_1 sind parallel zu $a'b'$ und diejenigen in a' und b' parallel zu $d_1'e_1$. Für welche Punkte des Schattens stehen die Tangenten senkrecht zur Achse OX?

Aufgabe für Geübtere. Unter der Voraussetzung, dass beide Projektionen des Lichtstrahls unter 45° gegen die Achse OX geneigt sind, ist folgende Bestimmung der grossen und kleinen Achse des elliptischen Schattens nachzuweisen: Der Mittelpunkt der zweiten Projektion des Kreises heisse: c_2. Man trage von e_2 aus auf OX die Hälfte des

Halbmessers des Kreises nach rechts durch die Strecke $e_2 f_2$ ab; ziehe von f_2 durch c_2 eine Gerade, welche verlängert den Kreis nochmals in einem Punkt g_2 trifft. Die Halbierungslinien der Winkel $b_2 c_2 g_2$ und $a_2 c_2 g_2$ sind die beiden zu einander senkrecht stehenden Durchmesser des Kreises, deren Schatten die gesuchten Hauptachsen ergeben.

Liegt der Kreis näher an P_2, so fällt ein Teil des Schattens auch auf diese Ebene (Fig. 14). Als Projektion des Kreises auf eine dem letzteren

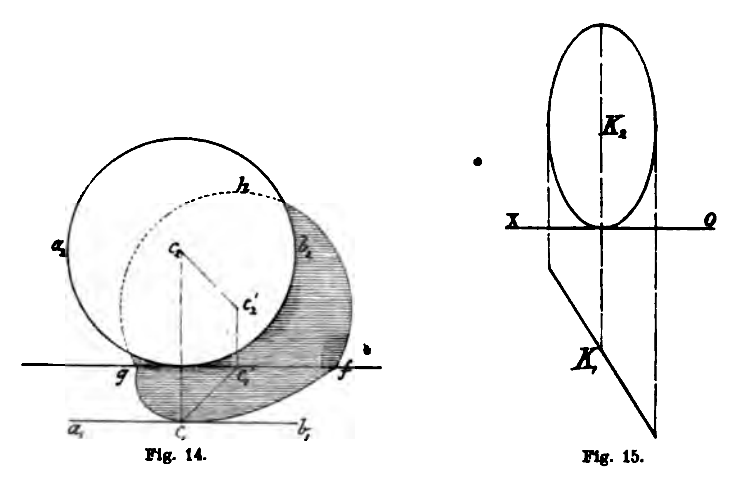


Fig. 14. Fig. 15.

parallele Ebene ist der Schatten alsdann wieder ein Kreis von derselben Grösse. Man konstruiert deshalb den Schatten c_2' des Mittelpunktes; der-

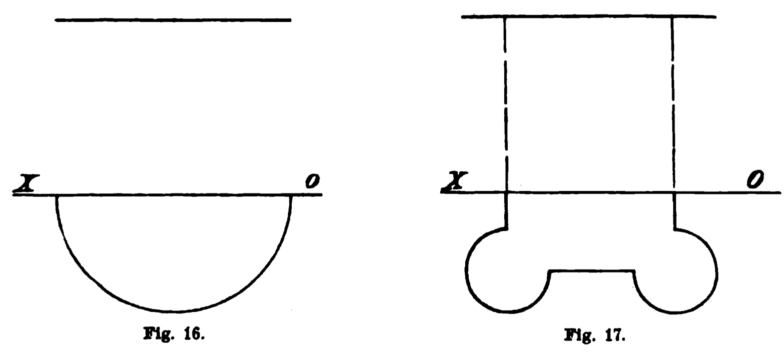


Fig. 16. Fig. 17.

selbe ist die zweite Spur des durch den Mittelpunkt (c_1, c_2) gehenden Strahles ($c_1 c_1'$, $c_2 c_2'$). Um c_2' zeichnet man mit dem Halbmesser $a_2 c_2$ den Schatten als Kreis fhg bis zur Achse OX, und bestimmt den auf P_1 fallenden Teil des Schattens wie in Fig. 13.

Den Schatten des Kreises (K_1, K_2) zu konstruieren, wenn derselbe die in Fig. 15 angegebene Lage hat. Man bestimme auch diejenigen Punkte des Kreisumfanges, welche ihre Schatten auf die Achse OX werfen. Ferner sollen für die in den Fig. 16 und 17 durch ihre Projektionen gegebenen Flächen die Schatten bestimmt werden, welche auf P_2 fallen.

Schatten von Geraden und ebenen Flächen aufeinander.

6) Den Schatten zu finden, welchen das zu P_1 senkrecht stehende Dreieck ($a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$), Fig. 18, auf die durch ihre Spuren gegebene Ebene TQR und auf P_1 wirft.

Die erste Spur g_1 des Strahles $b_1 g_1$, $b_2 g_2$), welcher durch (b_1, b_2) geht, ist der auf P_1 liegende Schatten der Spitze des Dreiecks, und der Schatten des letzteren auf P_1 ist demnach das Dreieck $a_1 c_1 g_1$. Von diesem Schatten ist aber nur das Viereck $a_1 e_1 f_1 c_1$ wirklich vorhanden, denn von e_1 und f_1 aus geht der Schatten auf die Ebene TQR über. Man bestimmt nun den Durchschnitt des Strahles ($b_1 g_1$, $b_2 g_2$) mit TQR, was nach III, 18, I. Teil) auszuführen ist. Durch den Strahl legt man die Ebene $b_1 m_1 m_2$ seekrecht zu P_1. Die erste Spur derselben fällt mit der Projektion $b_1 m_1$ des Strahles zusammen und die zweite Spur $m_1 m_2$ steht senkrecht zur Achse OX. Diese Ebene

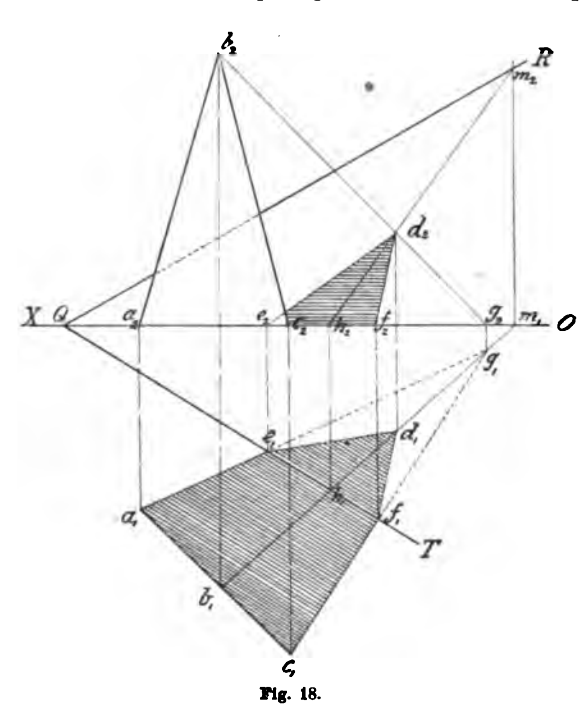


Fig. 18.

schneidet TQR in der Geraden ($h_1 m_1$, $h_2 m_2$), welche von jenem Strahl in dem Punkte (d_1, d_2), dem Schatten der Spitze (b_1, b_2), getroffen wird. Zieht man nun noch die Geraden $d_1 e_1$ und $d_1 f_1$, projiciert e_1 und f_1 nach e_2 und f_2 auf OX, und verbindet e_2 mit d_2, f_2 mit d_2, so ist der Schatten, welcher auf die Ebene TQR fällt, gefunden.

Es ist einleuchtend, dass die beiden Dreiecke $d_1 e_1 f_1$ und $d_2 e_2 f_2$ die Projektionen des wirklichen Schattens sind, welcher auf TQR liegt.

7) Den Schatten, welchen das Dreieck ($a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$) auf das Parallelogramm ($d_1 e_1 f_1 g_1$, $d_2 e_2 f_2 g_2$) und denjenigen, welchen beide auf die Projektionsebenen werfen, zu finden (Fig. 19).

Aufl. Der Schatten, welchen das gegebene Parallelogramm auf die Projektionsebenen wirft, findet sich durch die Spuren derjenigen Strahlen,

welche durch die Ecken des Parallelogramms gehen. Ebenso wird der Schatten des Dreiecks gefunden.

Um den Schatten zu ermitteln, welchen das Dreieck auf das Parallelogramm wirft, ziehe man durch die Spitze (b_1, b_2) den Strahl ($b_1 s_1$, $b_2 s_2$) und bestimme den Durchschnitt desselben mit der Ebene des Parallelogramms. Man legt also durch den Strahl eine Ebene, etwa senkrecht zu P_1; dieselbe schneidet das Parallelogramm in einer Geraden, deren erste Projektion $m_1 n_1$ mit der ersten Projektion des Strahles zusammenfällt. Die

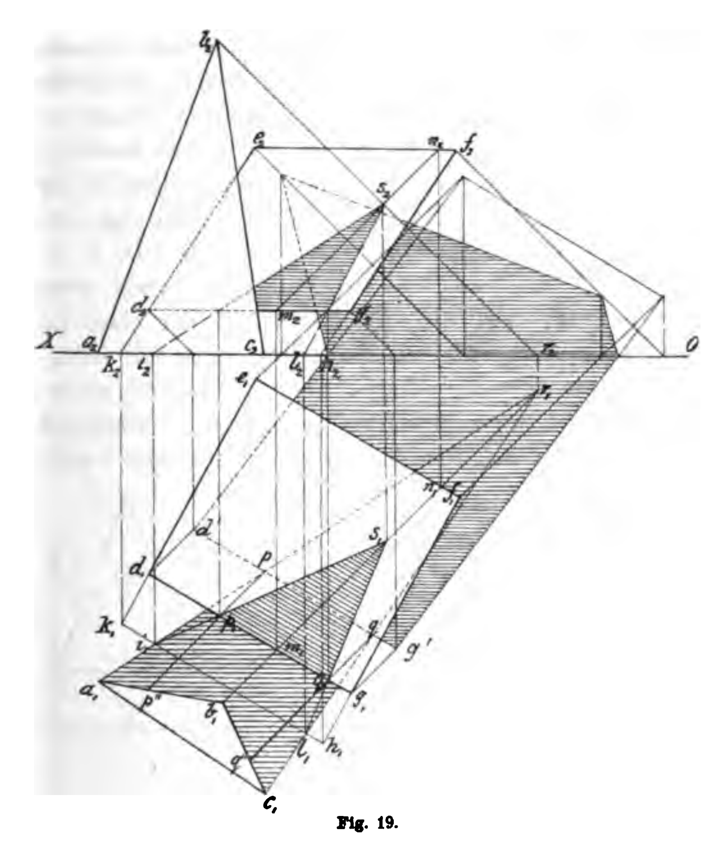


Fig. 19.

zweite Projektion $m_2 n_2$ dieser Durchschnittslinie wird nun von $b_2 s_2$ in s_2 getroffen, folglich ist s_2 die eine Projektion des Schattens der Spitze ($b_1 b_2$). Die andere Projektion s_1 ergiebt sich durch die zur Achse OX senkrechte Gerade $s_2 s_1$.

Erweitert man die Ebene des Parallelogramms bis zu ihrer ersten Spur $k_1 h_1$, so treffen die auf P_1 liegenden Grenzlinien $a_1 r_1$ und $c_1 r_1$ des von dem Dreiecke herrührenden Schattens dieselbe in den Punkten i_1 und l_1. Von den letzteren gehen die Schattengrenzen nach s_1; welche jedoch nur

soweit wirklich vorhanden sind, als dieselben innerhalb des Parallelogramms liegen. Projiciert man noch i_1 und l_1 nach i_2 und l_2 auf OX, so findet man durch die Geraden $i_2 s_2$ und $l_2 s_2$ die zweite Projektion dieses Schattens.

8) Zurückprojicieren des Durchschnittes zweier Schatten auf die schattenwerfenden Linien (Fig. 20).

Es seien AB und CD zwei gerade oder krumme Linien, ab bez. cd die Schatten, welche dieselben auf eine Ebene P werfen. Die letzteren sind schiefe Projektionen von AB und CD, wenn man die Lichtstrahlen als projicierende Geraden ansieht. Wenn deshalb die beiden Schatten sich in einem Punkte m treffen, so ist der letztere sowohl die Projektion eines Punktes M der Linie AB, wie auch diejenige eines Punktes M′ der Linie CD, d. h. der durch m gehende Strahl schneidet beide Linien in M und M′. Um denjenigen Punkt M der einen Linie AB zu finden, dessen Schatten gerade auf die andere Linie CD fällt, muss man demnach den Schnittpunkt der Schatten ab und cd durch einen Lichtstrahl auf AB und CD gleichsam zurückprojicieren. Dieses Verfahren kann häufig mit grossem Vorteil bei Schattenkonstruktionen verwendet werden.

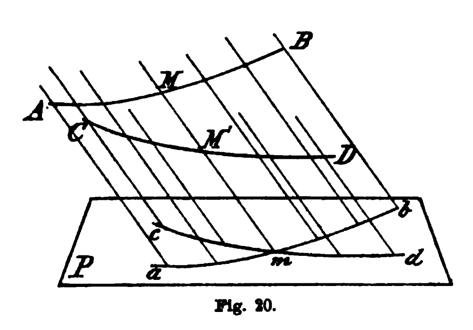


Fig. 20.

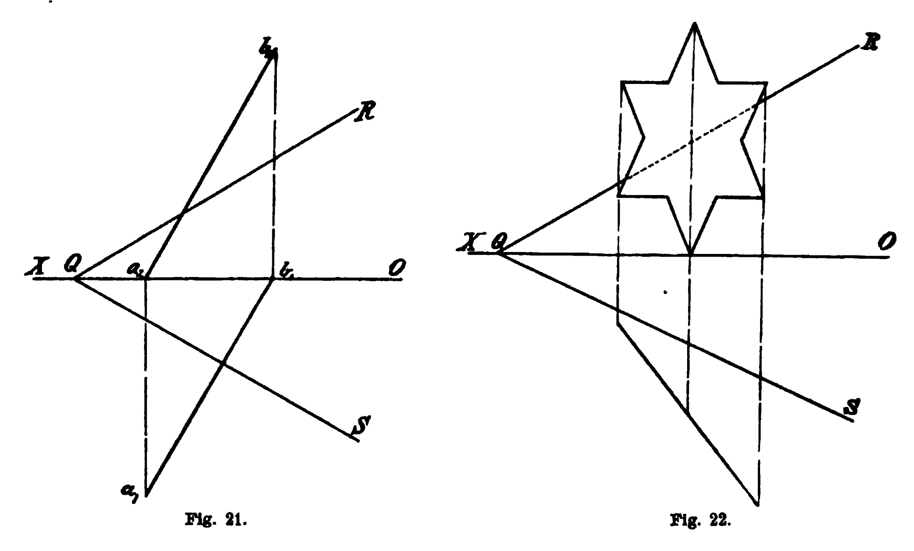


Fig. 21. Fig. 22.

So schneidet z. B. in Fig. 19 der Schatten $d'g'$ die beiden Schatten $a_1 r_1$ und $c_1 r_1$ in p und q. Es ist aber $d'g'$ der Schatten von $d_1 g_1$ und $a_1 r_1$ und $c_1 r_1$ sind die Schatten von $a_1 b_1$ und $b_1 c_1$. Werden deshalb die

Punkte p und q durch Strahlen auf die schattenwerfenden Linien zurückprojiciert, so treffen diese Strahlen $d_1 g_1$ in den Punkten p_1 und q_1, und $a_1 b_1$ sowie $b_1 c_1$ in den Punkten p'' und q''. Es sind aber p_1 und q_1 nach dem oben angegebenen Hülfssatze die Schatten der Punkte p'' und q''.

9) Man soll den Schatten konstruieren, welchen die Gerade $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ auf die durch ihre Spuren SQR gegebene Ebene und auf die Projektionsebenen wirft (Fig. 21).

10) Ebenso für die Figuren 22, 23 und 24 die Schattenkonstruktionen auszuführen.

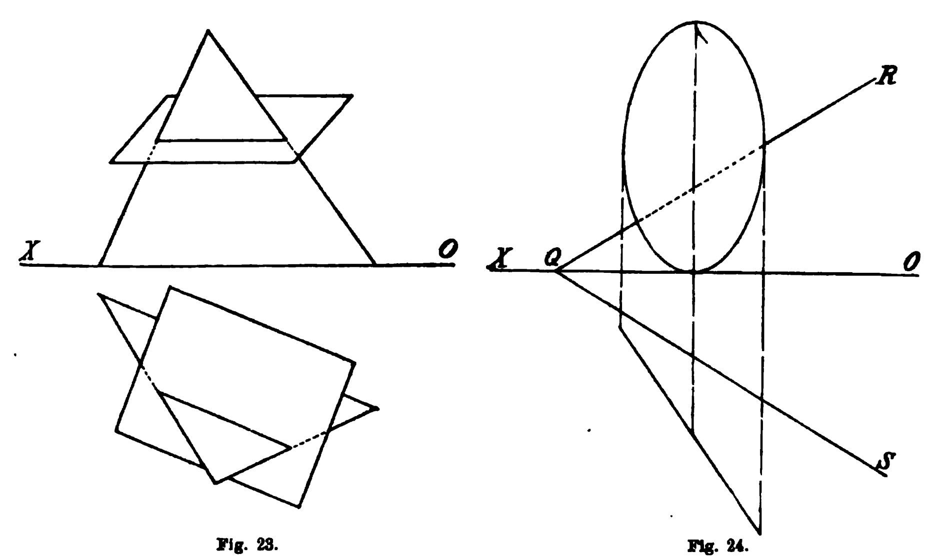


Fig. 23. Fig. 24.

In Fig. 22 ist der Schatten zu bestimmen, welchen der sechsseitige Stern auf die durch ihre Spuren gegebene Ebene SQR und auf die Projektionsebenen wirft. In Fig. 24, wo statt des Sterns ein zu P_1 senkrecht stehender Kreis gegeben ist, ist die gleiche Aufgabe zu lösen. In Fig. 23 ist ein Parallelogramm und ein dasselbe durchschneidendes Dreieck gegeben. Es sind demnach die Schatten zu finden, welche beide Flächen aufeinander und auf die Projektionsebenen werfen. Man kann in diesem Falle wieder mit Vorteil den Satz 8 benutzen.

Schlagschatten und Eigenschatten bei Körpern.

11) Schatten eines rechtwinkligen Parallelepipedums (Fig. 25). Es seien K_1 und K_2 die Projektionen eines rechtwinkligen, mit der Grundfläche $e_1 f_1 g_1 h_1$ auf P_1 stehenden Parallelepipedums. Man ziehe durch die Ecken der oberen Grundfläche die Strahlen $(b_1 b_1', b_2 b_2')$, $(c_1 c_1', c_2 c_2')$ und $(d_1 d_1', d_2 d_2')$ und bestimme die Spuren derselben. In Fig. 25 treffen die

Strahlen zunächst die zweite Projektionsebene in den Punkten b_2', c_2', d_2'. Es bilden deshalb die Geraden $b_2'c_2'$ und $c_2'd_2'$ die oberen Grenzen des Schlagschattens auf P_2. Die Schatten der Kanten (b_1f_1, b_2f_2) und (d_1h_1, d_2h_2), welche senkrecht zu P_1 stehen, fallen nach Einl. 4 mit den Projektionen b_1b_1' und d_1d_1' der Strahlen zusammen, und gehen von den Punkten, in welchen dieselben die Achse OX treffen, senkrecht zu der letzteren bis zu b_2' bez. d_2' aufwärts. Hiernach ist der Schatten, welcher im Aufriss teilweise durch K_2 verdeckt erscheint, gefunden. Man erkennt auch leicht, dass die Seitenflächen ($b_1c_1f_1g_1$, $b_2c_2f_2g_2$) und ($c_1d_1h_1g_1$, $c_2d_2h_2g_2$), von denen nur die erstere im Aufriss sichtbar ist, von den Strahlen nicht getroffen werden, und deshalb im Eigenschatten liegen.

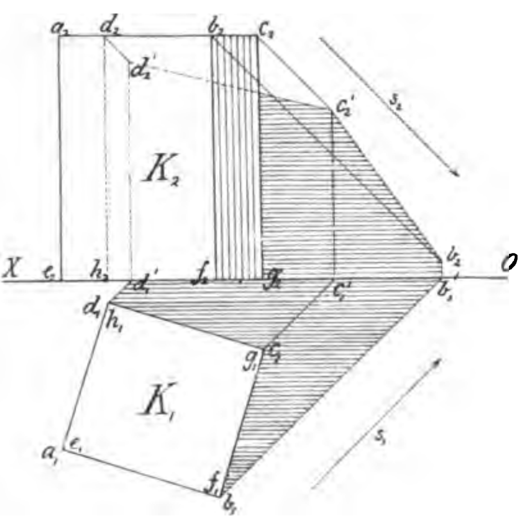


Fig. 25.

12) Schlagschatten einer Pyramide (Fig. 26).

Die quadratische Pyramide (K_1, K_2) stehe auf P_1. Man ziehe durch die Spitze (e_1, e_2) den Strahl (e_1f_1, e_2f_2) und bestimme die beiden Spuren desselben. Die erste Spur f_1, welche in Fig. 26 auf dem hinteren Teile der ersten Projektionsebene liegt, ist der Schatten der Spitze auf P_1. Verbindet man nun diesen Punkt mit den äussersten Ecken der Grundfläche, so ist d_1f_1 der Schatten der Seitenkante (d_1e_1, d_2e_2) und b_1f_1 der Schatten von (b_1e_1, b_2e_2). Die Schatten der beiden anderen Seitenkanten würden zwischen diesen beiden Schatten

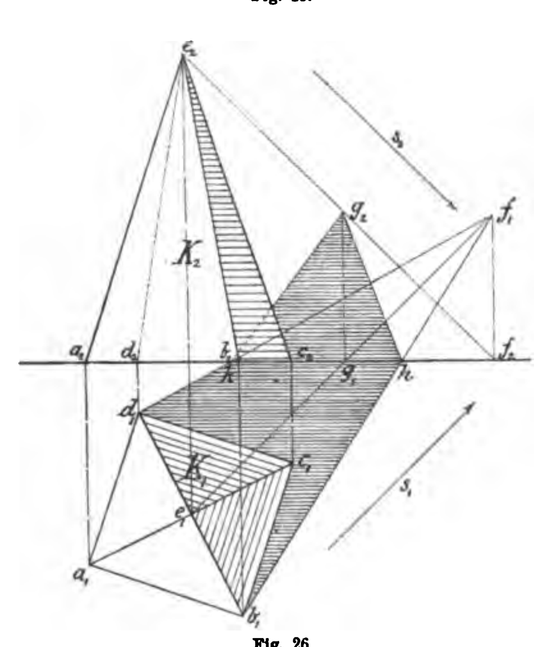


Fig. 26.

liegen und kommen deshalb nicht in Betracht. Der von $d_1 f_1$ und $b_1 f_1$ begrenzte auf P_1 liegende Schatten existiert aber nur bis zur Achse OX, und die Grenzlinien desselben gehen von den Schnittpunkten k und h nach der zweiten Spur g_2 des Strahles, welcher durch die Spitze gelegt wurde. Diese Spur ist dann der Schatten der Spitze auf P_2.

Die Seitenflächen $(c_1 d_1 e_1, c_2 d_2 e_2)$ und $(b_1 c_1 e_1, b_2 c_2 e_2)$ werden von den Strahlen nicht getroffen. Die letzteren streifen nur die beiden schattenwerfenden Kanten $(b_1 e_1, b_2 e_2)$ und $(d_1 e_1, d_2 e_2)$. Jene Seitenflächen, welche im Grundriss beide sichtbar sind, liegen demnach im Eigenschatten.

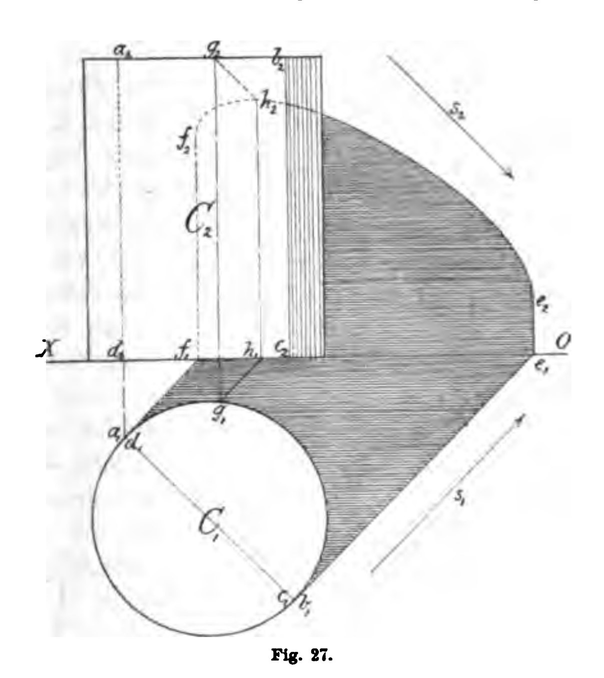


Fig. 27.

13) Schlagschatten eines Cylinders (Fig. 27). Steht der Cylinder (C_1, C_2) auf P_1, so wird sein Schatten begrenzt von den beiden Tangenten $d_1 f_1$ und $b_1 e_1$, welche parallel zu dem Strahle (s_1, s_2) an die Grundfläche gelegt werden können. Beide Tangenten sind die ersten Spuren zweier zu $(s_1 s_2)$ parallelen Berührungsebenen, welche den Cylinder in den Seitenlinien $(a_1 d_1, a_2 d_2)$, $(b_1 c_1, b_2 c_2)$ berühren. Die beiden letzteren begrenzen deshalb denjenigen Teil der Mantelfläche, welcher im Eigenschatten liegt. Der Schatten eines beliebigen Punktes $(g_1 g_2)$ auf dem Umfange der oberen Grundfläche liegt in der Spur des Strahles $(g_1 h_1, g_2 h_2)$. In Fig. 27 ist dieses der Punkt h_2. Der Schatten des Kreises ist eine Ellipse (als schiefe Projektion des Kreises); dieselbe wird von den auf P_2 fallenden Schattengrenzen der Seitenlinien, nämlich den zur Achse OX Senkrechten $f_1 f_2$ und

$e_1 e_2$ berührt. Der höchste Punkt des Schattens, in welchem die Tangente parallel zu OX ist, rührt von dem aus der ersten Projektion des Cylinders zu entnehmenden Punkte her, welcher P_2 am nächsten liegt.

14) Schlagschatten eines Kegels (Fig. 28).

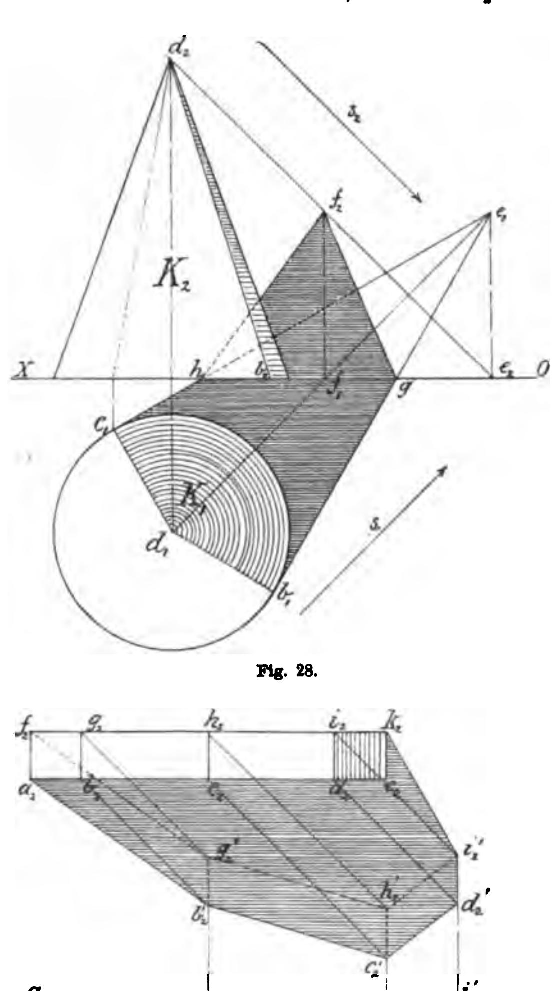


Fig. 28.

Fig. 29.

Der Kegel (K_1, K_2), dessen Grundfläche ein Kreis ist, stehe mit der letzteren auf P_1. Die Bestimmung des Schlagschattens ist dann wie in Fig. 26 auszuführen. Sind e_1 und f_2 erste und zweite Spur desjenigen Strahles, welcher durch die Spitze des Kegels geht, so zieht man von e_1 die beiden Tangenten $b_1 e_1$ und $c_1 e_1$ an den Grundkreis. Diese Tangenten bilden die Begrenzung des Schattens, welcher auf P_1 fällt, und sie sind selbst die Schatten derjenigen Seitenlinien, welche von den Berührungspunkten b_1 und c_1 nach der Spitze (d_1, d_2) des Kegels gehen. Von den letzteren wird der Teil der Mantelfläche begrenzt, welcher im Eigenschatten liegt.

Der auf P_2 fallende Teil des Schlagschattens wird von $g f_2$ und $h f_2$ eingeschlossen. Für welche Richtung der Strahlen können die beiden Eigenschattengrenzen $b_1 d_1$ und $c_1 d_1$ in der ersten Projektion eine Gerade bilden und welche Gestalt erhält der Schlagschatten in diesem Falle?

15) Den Schatten einer an P_2 stossenden Platte zu finden, deren Grundfläche ein halbes regelmässiges Achteck bildet (Balkon). Fig. 29.

Man kann die Schatten beider Grundflächen und aller Seitenkanten auf P_2 ermitteln, indem man die zweiten Spuren der Lichtstrahlen bestimmt, welche durch alle Ecken des Körpers gehen, wie in Fig. 29 angegeben ist. Der gesuchte Schlagschatten wird alsdann von denjenigen Linien begrenzt, welche den äussersten Umriss bilden. Von der oberen Grundfläche kommt, wie man sieht, nur der Schatten $k_2 i_2'$, welcher von der Kante $(k_1 i_1, k_2 i_2)$ herrührt, und von den zur Achse OX senkrechten Seitenkanten nur derjenige $d_2' i_2'$ von $(d_1 i_1, d_2 i_2)$ in Betracht. Ferner sieht man, dass die in der zweiten Projektion sichtbare Seitenfläche $d_2 c_2 k_2 i_2$ im Eigenschatten liegt.

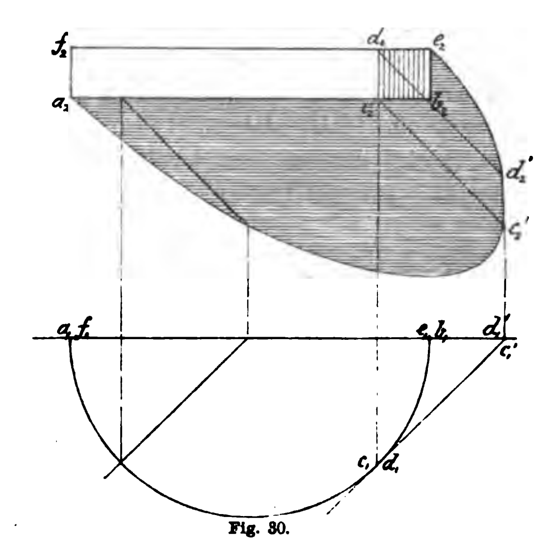


Fig. 30.

16) Dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn in dem vorigen Falle die Grundflächen der Platte Halbkreise sind (Fig. 30).

Man bestimme, wie in der vorigen Aufgabe, die Schatten beider Grundflächen. Dieselben sind zwei halbe kongruente Ellipsen. An beide ziehe man die zur Achse OX senkrechte Tangente $c_2' d_2'$, dann ist $a_2 c_2' d_2' e_2'$ der Umriss des Schlagschattens. Die Gerade $c_2' d_2'$ liegt in der zweiten Spur derjenigen Berührungsebene, welche man parallel zu den Lichtstrahlen an die Cylinderfläche legen kann. Sie ist der Schatten der Seitenlinie $(c_1 d_1, c_2 d_2)$, in welchem jene Ebene die Cylinderfläche berührt. Der in der zweiten Projektion sichtbare Teil $b_2 c_2 d_2 e_2$ der Cylinderfläche liegt demnach im Eigenschatten.

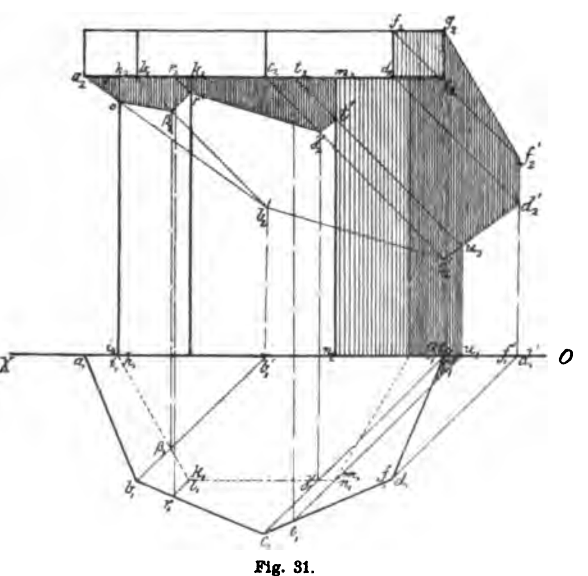


Fig. 31.

17) Man soll die Schattenkonstruktion bei einer wie in Fig. 29 angegebenen Platte ausführen, wenn dieselbe auf einem an P_2 stehenden geraden Prisma liegt, dessen Grundfläche ein halbes regelmässiges Sechseck ist (Fig. 31).

Der Schatten der Platte, welcher auf P_2 fällt, ist wie in Fig. 29 zu bestimmen. Von diesem fällt jedoch der Teil wieder fort, welcher durch das unter der Platte stehende Prisma verdeckt wird. Von links anfangend erstreckt sich der Schatten der Platte auf P_2 zunächst von a_2 bis nach o. Es ist aber $a_2 o$ ein Teil des Schattens der Kante $(a_1 b_1, a_2 b_2)$, welche auch noch Schatten auf die Seitenfläche $(h_1 i_1 l_1 k_1, h_2 i_2 l_2 k_2)$ wirft. Der Schatten des Punktes (b_1, b_2) fällt nach (β_1, β_2), folglich geht in der zweiten Projektion die Grenze des Schlagschattens von o nach β_2. In dem letzteren Punkte ändert die Schlagschattengrenze abermals ihre Richtung, weil nun der Schatten der Kante $(b_1 c_1, b_2 c_2)$ auftritt. Man ziehe in der ersten Projektion den Strahl $r_1 k_1$ so, dass derselbe die Ecke k_1 trifft, dann ist (r_1, r_2) derjenige Punkt der Kante $(b_1 c_1, b_2 c_2)$, welcher seinen Schatten auf die Kante $(k_1 l_1, k_2 l_2)$ wirft. Jener Strahl trifft diese Kante in dem Punkte r' der zweiten Projektion, also geht die Schattengrenze weiter von β_2 nach r'. Auf diese Weise ist der ganze nur in der zweiten Projektion sichtbare Schatten zu konstruieren. Man sieht noch, dass die rechts liegende Seitenfläche des Prismas im Eigenschatten ist. Daher wirft auch die Kante $(m_1 n_1, m_2 n_2)$ noch den Schatten $n_1 u_1$ und $u_1 u_2$ auf die beiden Projektionsebenen.

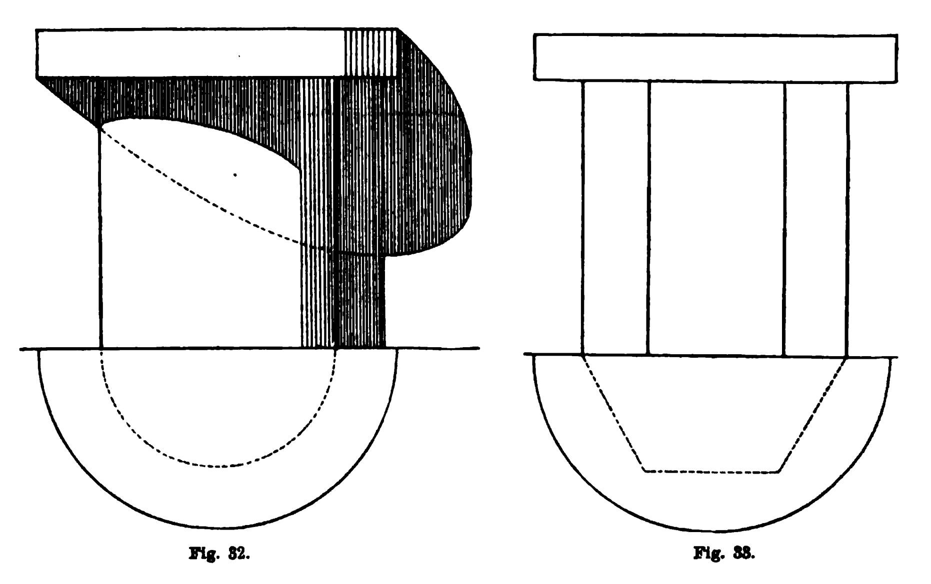


Fig. 32. Fig. 33.

$n_1 u_1$ ist parallel zu der ersten Projektion der Strahlen und wird teilweise verdeckt durch die Platte; $u_1 u_2$ steht senkrecht zu OX. Es ist noch zu

bemerken, dass der Punkt t′, in welchem der Schatten der Platte die Kante m_2n_2 erreicht, auch nach (8) durch Zurückprojicieren des Punktes u_2 gefunden werden kann.

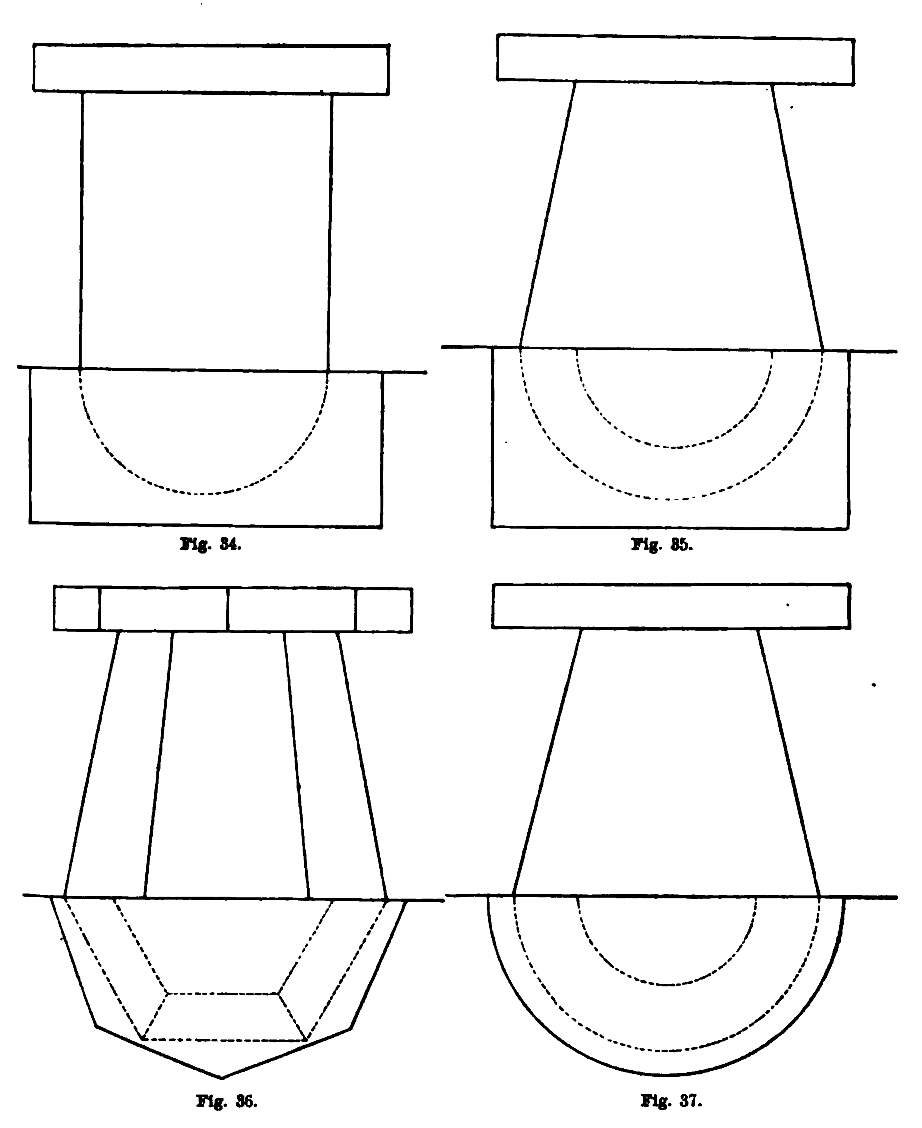


Fig. 34. Fig. 35.

Fig. 36. Fig. 37.

18) Die in den Figuren 32—37 dargestellten Körper mögen als Beispiele für ähnliche Schattenkonstruktionen dienen.

In Fig. 32 ist z. B. der Schatten der halbkreisförmigen Platte, welcher auf P_2 fällt, wie in (16) zu konstruieren. Hierauf bestimmt man den Schatten, welchen der untere Rand der Platte auf den darunter stehenden

Cylinder wirft. Dieser Schatten endet an der Eigenschattengrenze des Cylinders u. s. f.

19) Schattenkonstruktion bei einem Hohlcylinder (Fig. 38).

Der Schlagschatten, welchen der durch seine Projektionen dargestellte Hohlcylinder auf P_1 und P_2 wirft, ist nach dem vorhergehenden leicht zu bestimmen. Der auf P_2 fallende Schatten des oberen halbkreisförmigen Randes ist ein Teil einer Ellipse, welche links von der zur Achse senkrechten Schlagschattengrenze der Cylinderfläche (in Fig. 38 nicht sichtbar) berührt

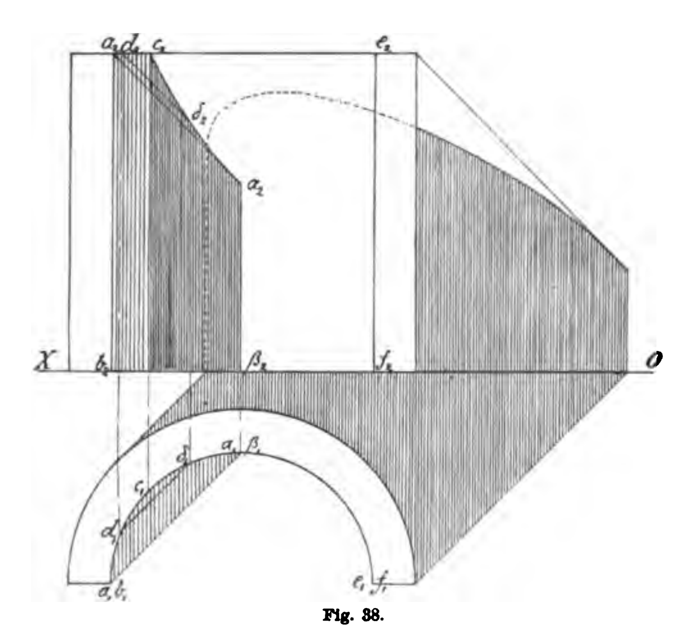


Fig. 38.

wird. Der Schatten, welcher auf die innere Cylinderfläche fällt, rührt teils von der Kante $(a_1 b_1,\ a_2 b_2)$, teils von dem Bogen $(a_1 c_1,\ a_2 c_2)$ her. Der durch $(a_1 a_2)$ gehende Strahl $(a_1 \alpha_1,\ a_2 \alpha_2)$ schneidet in dem Punkte $(\alpha_1 \alpha_2)$ die innere Cylinderfläche; die Seitenlinie $(\alpha_1 \beta_1,\ \alpha_2 \beta_2)$ ist dann der Schatten von $(a_1 b_1,\ a_2 b_2)$, von welchem die Strecke $b_1 \beta_1$ auf P_1 fällt. Ist $(d_1 d_2)$ ein beliebiger Punkt des inneren Kreises, so schneidet der Strahl $(d_1 \delta_1,\ d_2 \delta_2)$ die innere Cylinderfläche in $(\delta_1 \delta_2)$, dem Schatten des Punktes $(d_1 d_2)$. Der Schatten $\alpha_2 \delta_2 c_2$ endet in demjenigen Punkte c_2, welcher senkrecht über dem Punkte c_1 der ersten Projektion des Halbkreises $a_1 \delta_1 f_1$ liegt, in welchem der Strahl den letzteren berührt.

20) Schlagschatten bei einem Hohlkegel (Fig. 39).

Der Kegel stehe mit der Spitze $(a_1 a_2)$ auf P_1. Es wird angenommen, dass in der ersten Projektion die innere Mantelfläche sichtbar ist. Da der Grundkreis parallel zu P_1 ist, so ist sein Schatten auf dieser Ebene ein

gleicher Kreis, dessen Mittelpunkt die erste Spur γ_1 des durch den Mittelpunkt $(c_1 c_2)$ gehenden Strahles ist. An diesen Kreis zieht man von a_1 aus die Tangenten $a_1 d_1$ und $a_1 e_1$, welche den auf P_1 fallenden Schatten begrenzen. In Fig. 39 geht nun ein Teil des Schlagschattens auf P_2 über. Dieser wird bestimmt durch Ermittelung der zweiten Spuren solcher Strahlen, welche den schattenwerfenden Rand der Grundfläche streifen. Es ist nun

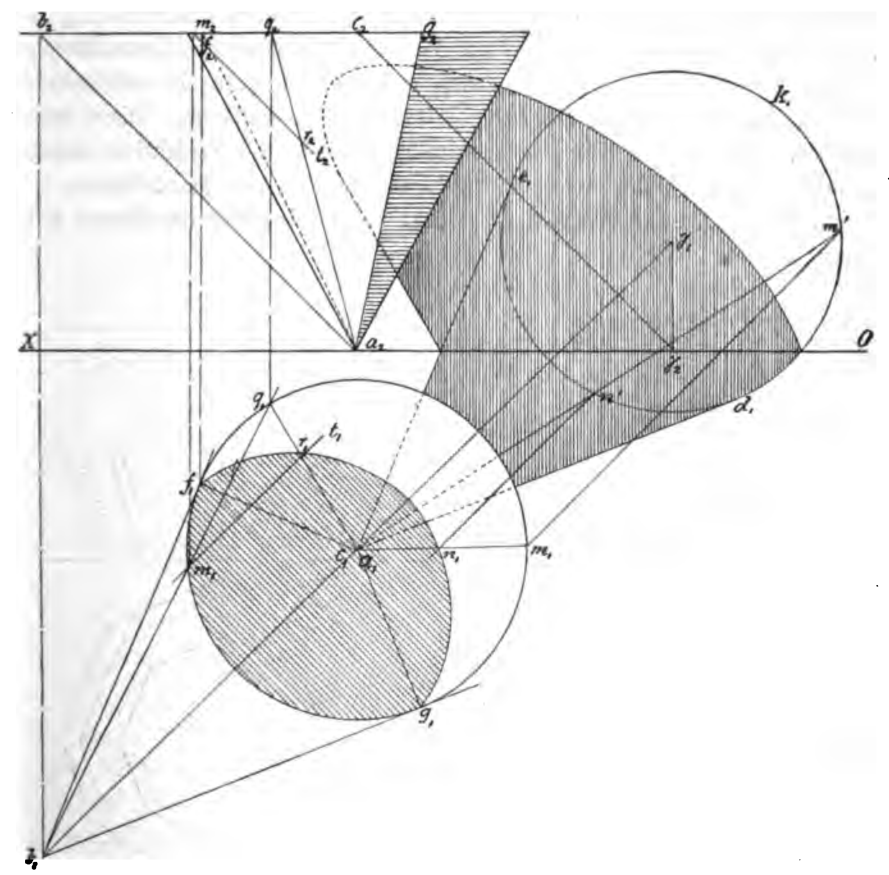


Fig. 39.

noch derjenige Schatten zu bestimmen, welcher auf die Innenseite der Mantelfläche fällt.

1. Lösung. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt $(m_1 m_2)$ den Strahl $m_1 t_1$, $m_2 t_2$), und durch die Spitze des Kegels die Gerade $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ parallel zu demselben. Die letztere Gerade trifft die erweiterte Grundfläche des Kegels in dem Punkte (b_1, b_2). Die Ebene, welche durch diese beiden Geraden gelegt werden kann, schneidet die Grundfläche in der durch m_1 und b_1

gehenden Sekante $b_1 q_1$, und weil sie durch die Spitze des Kegels geht, so schneidet sie die Mantelfläche in den beiden Geraden $(a_1 m_1, a_2 m_2)$ und $(a_1 q_1, a_2 q_2)$. Da nun der Strahl $(m_1 t_1, m_2 t_2)$ und die Seitenlinie $(a_1 q_1, a_2 q_2)$ in dieser Ebene liegen, so treffen sich dieselben in dem Punkte (r_1, r_2), und der letztere ist der von $(m_1 m_2)$ auf die innere Mantelfläche fallende Schatten. Hiernach konstruiert man so viele Punkte, als zur Bestimmung der Schattengrenze $f_1 r_1 g_1$, deren zweite Projektion übrigens als nicht sichtbar weggelassen werden kann, nötig sind. Die beiden Endpunkte f_1 und g_1 fallen mit den Berührungspunkten der von b_1 aus an den Grundkreis gelegten Tangenten zusammen. In $(a_1 f_1, a_2 f_2)$ und $a_1 g_1, a_2 g_2)$ berühren die durch $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ gelegten Berührungsebenen die Kegelfläche. Diese beiden Geraden, von welchen nur die letztere in der zweiten Projektion sichtbar ist, bilden demnach die Grenzen des Eigenschattens der Mantelfläche.

2. Lösung. Die Kurve $f_1 r_1 g_1$ kann auch mit Hülfe des Satzes 8 bestimmt werden.

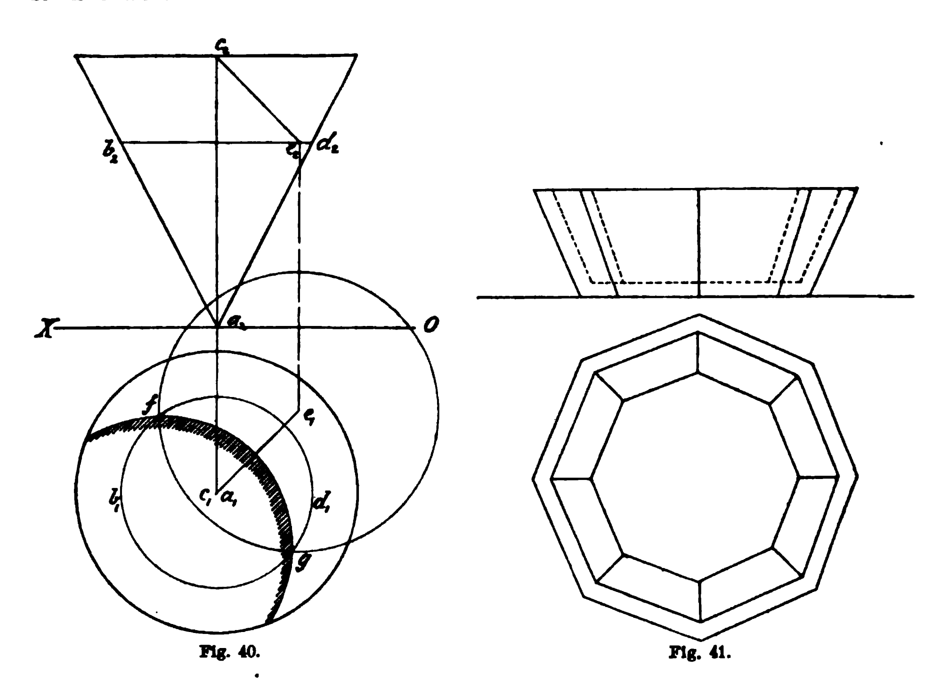


Fig. 40. Fig. 41.

Man zeichne wie im vorigen den Schatten $a_1 e_1 k_1 d_1 a_1$, welchen der Kegel auf P_1 wirft. Ist m' der Schatten eines Punktes m_1 des Grundkreises und $a_1 m'$ also der Schatten der Seitenlinie $a_1 m_1$, so schneidet der Schatten $a_1 m'$ denjenigen des Kreises in einem Punkte n'. Projiciert man nun n' mittelst eines Strahles zurück nach n_1 auf $a_1 m_1$, so ist n_1 ein Punkt der gesuchten Kurve.

3. **Lösung** (Fig. 40).

Es sei der Kreis (b_1d_1, b_2d_2) ein Schnitt des Kegels, welcher parallel zur Grundfläche desselben ist. Nun bestimme man den Schatten, welchen die Grundfläche auf die Ebene dieses Kreises wirft. Man zieht also durch den Mittelpunkt (c_1, c_2) den Strahl (c_1e_1, c_2e_2), welcher die Ebene des Schnittes in dem Punkte (e_1, e_2) trifft. Um diesen Punkt als Mittelpunkt zeichnet man einen der Grundfläche des Kegels gleichen Kreis, dann ist der letztere der Schatten des Grundkreises auf der Ebene (b_1c_1, b_2c_2). Derselbe trifft nun den Kreis b_1d_1 in den beiden Punkten f und g, welche der gesuchten Kurve angehören.

21) Für die in den Figuren 41—43 dargestellten Körper die Schlagschatten und Eigenschatten zu finden.

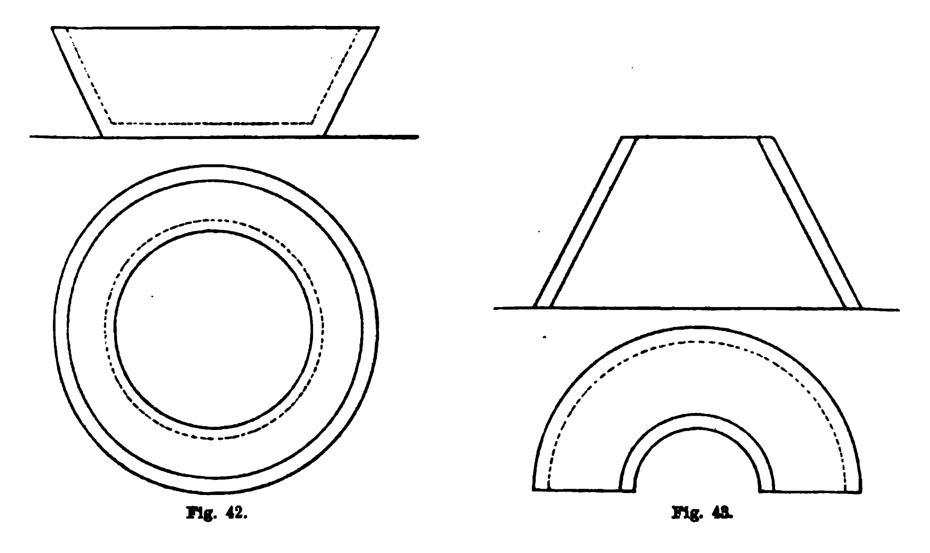


Fig. 42. Fig. 43.

22) Die Schattenkonstruktion bei den in Fig. 44 dargestellten Körpern auszuführen. K_1 und K_2 sind die Projektionen einer auf P_1 stehenden Pyramide mit quadratischer Grundfläche; (Q_1, Q_2) diejenigen eines ebenfalls auf P_1 liegenden geraden Prismas, dessen Grundfläche ein halbes regelmässiges Achteck ist. Man bestimme zunächst wie in (12) den Schatten $b_1e_1'd_1$, welchen die Pyramide auf P_1 wirft. Ebenso den Schatten des Prismas auf P_1; der letztere wird durch die ersten Spuren der Lichtstrahlen gefunden, welche durch die Ecken des Körpers gezogen werden können. Der von f_1g_1 herrührende Schatten $f_1'g_1'$ bildet in Fig. 45 eine der Begrenzungslinien des Schlagschattens auf P_1, deshalb ist die Seitenfläche $f_1g_1r_1o_1$ im Eigenschatten.

Der Schatten, welchen die Pyramide auf das Prisma wirft, kann in

ähnlicher Weise wie in (6) konstruiert werden. Man bestimme den Durchschnitt des durch $(e_1 e_2)$ gehenden Strahles mit der nötigenfalls zu erweiternden Seitenfläche $(k_1 l_1 n_1 m_1, k_5 l_2 n_2 m_2)$. Es ist demnach durch den Strahl eine Ebene zu legen, welche z. B. senkrecht zu P_1 steht. Dieselbe schneidet jene Seitenfläche in der Geraden $(\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2)$ und diese wird von dem Strahl in (γ_1, γ_2) getroffen. Der letztere Punkt ist hiernach der Schatten der Spitze (e_1, e_2). Zieht man noch die Geraden $(\delta_1 \gamma_1, \delta_2 \gamma_2)$, $\xi_1 \gamma_1, \xi_2 \gamma_2)$, so

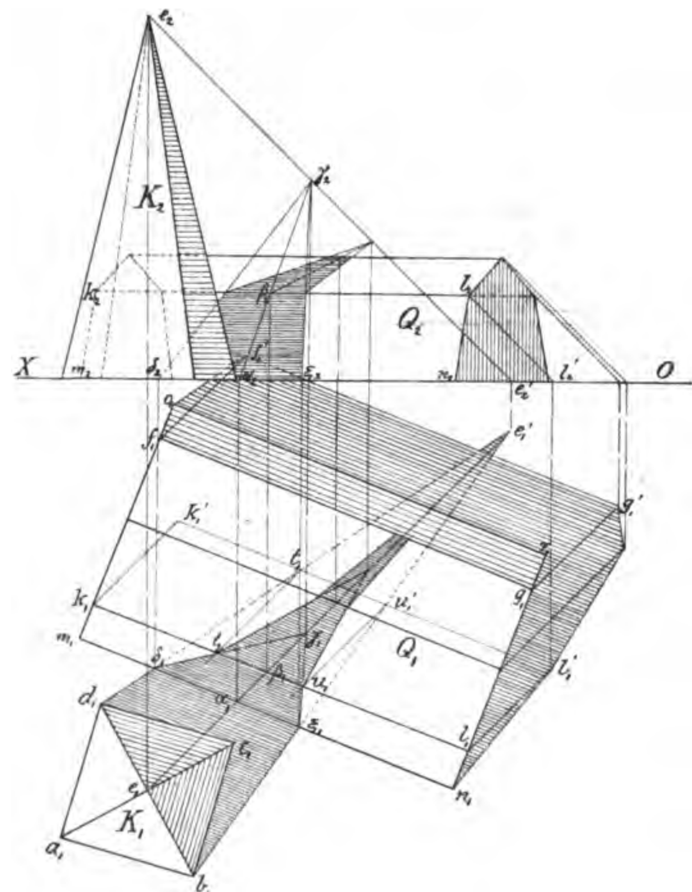


Fig. 44.

ist derjenige Teil des Dreiecks $(\gamma_1 \delta_1 \xi_1, \gamma_2 \delta_2 \xi_2)$, welcher auf der Fläche $(k_1 l_1 n_1 m_1, k_2 l_2 n_2 m_2)$ liegt, der auf letztere fallende Schatten der Pyramide. In gleicher Weise sind die Schatten zu bestimmen, welche auf die anderen Seitenflächen des Prismas fallen.

Durch Zurückprojicieren ist dieser Schatten ebenfalls leicht zu bestimmen. Der Schatten, welchen die Kante $(k_1 l_1, k_2 l_2)$ auf P_1 wirft, ist die zu dieser Kante parallele Gerade $k_1' l_1'$. Die letztere schneidet die Grenzlinien $d_1 e_1'$

und $b_1 e_1'$ des auf P_1 fallenden Schattens der Pyramide in den Punkten t_1' und u_1'. Zieht man von diesen Punkten aus die ersten Projektionen $t_1' t_1$ und $u_1' u_1$ zweier Strahlen, so treffen diese $k_1 l_1$ in den Punkten t_1 und u_1, welche nach (8) auf den Begrenzungslinien des Schattens der Pyramide liegen müssen.

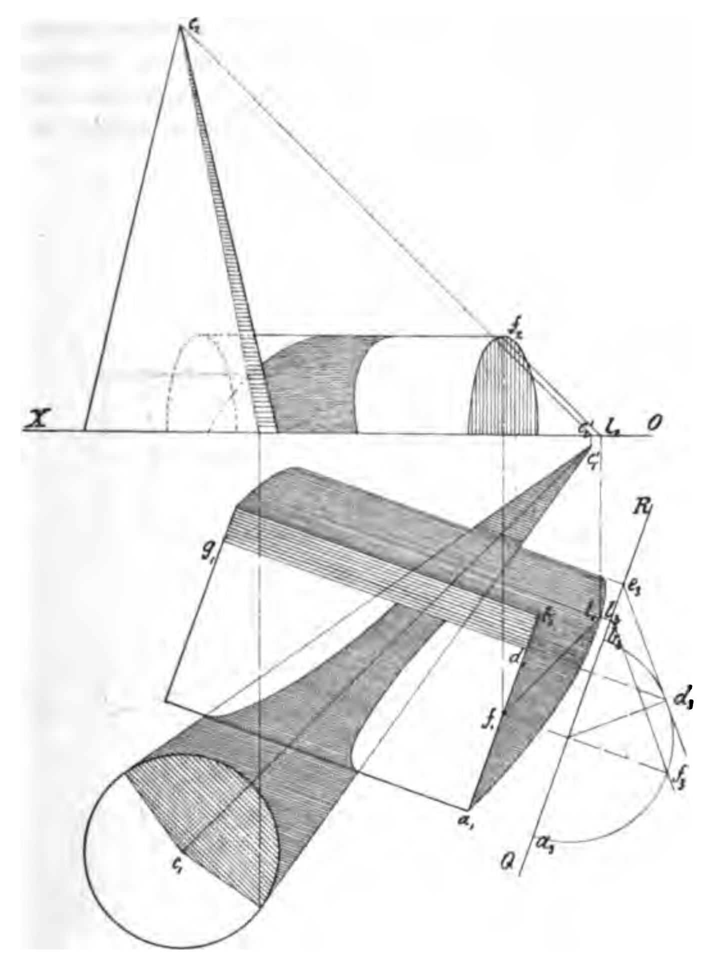


Fig. 45.

23) Das letztere Verfahren wendet man mit Vorteil bei der ähnlichen Aufgabe (Fig. 45) an, wo statt Pyramide und Prisma ein Kegel und ein auf P_1 liegender Halbcylinder gegeben sind.

Die Konstruktion bedarf keiner weiteren Erläuterung. Es mag hier nur noch die Bestimmung der Eigenschattengrenze des Cylinders näher angegeben werden.

Man stelle eine neue Projektionsebene QR auf, welche senkrecht zu P_1 und senkrecht zu den Seitenlinien des Cylinders steht. Die Projektion des letzteren auf dieser Ebene ist ein Halbkreis, welcher durch Umklappung der Ebene QR in P_1 die Lage $a_3 b_3 d_3$ annimmt. Man ziehe durch den höchsten Punkt $(f_1 f_2)$ des Halbkreises den Strahl $(f_1 l_1,\ f_2 l_2)$, welcher P_1 in l_1 trifft, und bestimme die Projektion $f_3 l_3$ dieses Strahles auf QR. Legt man nun eine Berührungsebene M parallel zu den Strahlen an den Cylinder, so ist die zu $f_3 l_3$ parallele Tangente $d_3 e_3$ die Projektion derselben auf der neuen Ebene. In der Seitenlinie $d_1 g_1$, deren Projektion auf QR der Punkt d_3 ist, berührt nun die Ebene M den Cylinder, folglich ist $d_1 g_1$ die Eigenschattengrenze desselben.

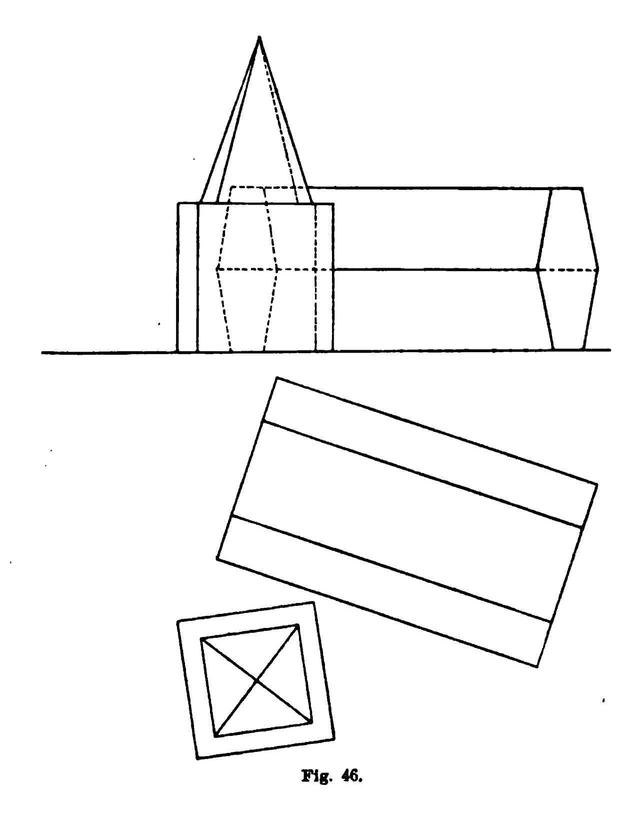


Fig. 46.

Anm. Die oben angegebenen Schattenkonstruktionen lassen sich auch mit Hülfe der Ebene QR ausführen, wenn man den Kegel ebenfalls auf dieselbe projiciert.

24) In den Figuren 46—54 die Schlag- und Eigenschatten zu bestimmen.

Anmerkung 1. Bei den Figuren 46, 47, 50, 51, 52, 53, 54 kann man die Methode des Zurückprojicierens mit Vorteil anwenden. Man be-

stimmt zu dem Zwecke zuerst die Schatten, welche die Körper auf die Projektionsebene werfen und benutzt dann die Schnittpunkte der Schatten wie bei den früheren Aufgaben.

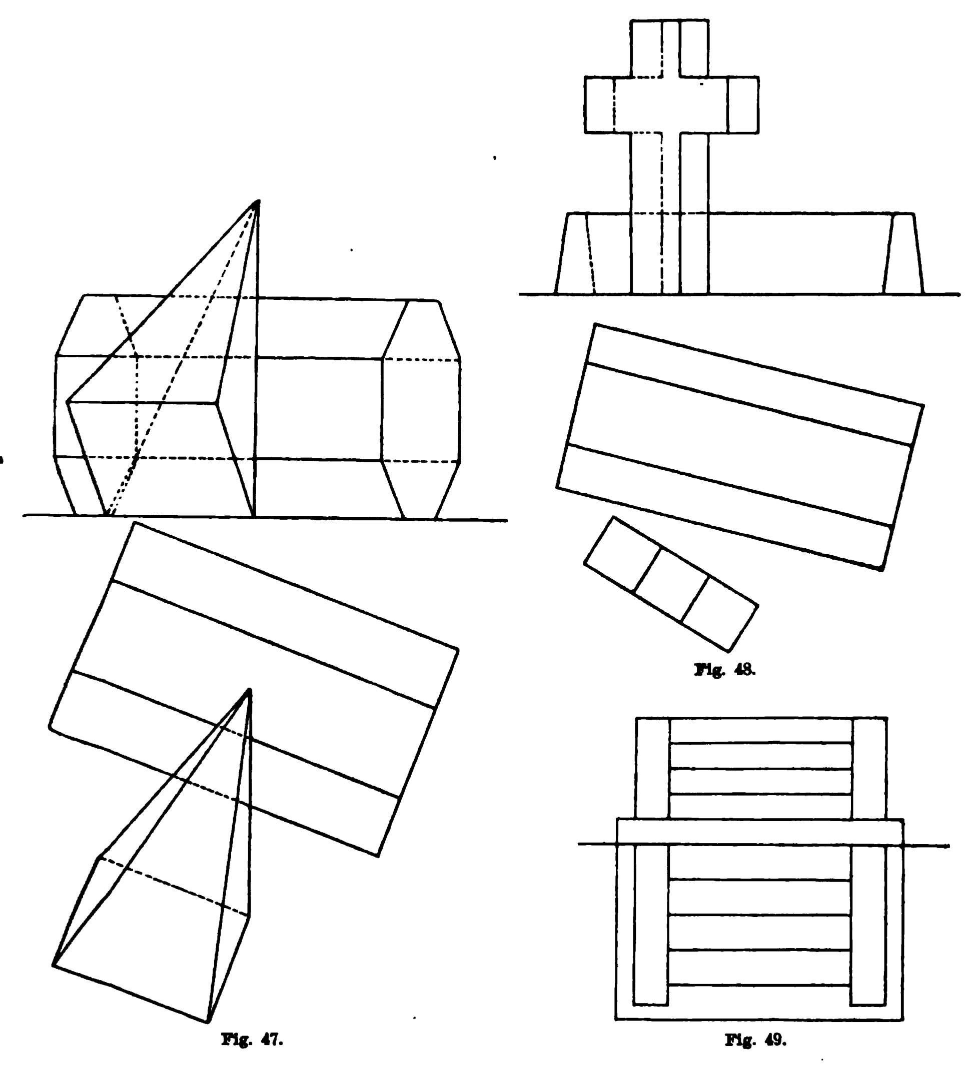


Fig. 47. Fig. 48. Fig. 49.

Anmerkung 2. Die Eigenschattengrenzen bei dem auf P_1 liegenden Kegel in Fig. 53 sind diejenigen Geraden, in welchen die zu den Lichtstrahlen parallelen Berührungsebenen den Kegel berühren. Dieselben können wie in (20) gefunden werden. Die Ermittelung wird jedoch für die in Fig. 53 gewählte Lage deshalb etwas umständlich, weil der Strahl, welcher durch die Spitze des Kegels gelegt werden muss, die erweiterte Grundfläche desselben

in zu grosser Entfernung trifft. Man kann in diesem Falle auf folgende Weise die Schattengrenzen finden. Nachdem der Schatten des Grundkreises auf P_1, nämlich die Ellipse af gezeichnet ist, ziehe man von der Spitze t aus die beiden Tangenten at und ft an dieselbe. Hierdurch ist nun der auf P_1 fallende Schatten des Kegels bestimmt. Nun ist die Tangente at die Spur einer Berührungsebene, welche parallel zu den Lichtstrahlen an den Kegel gelegt werden kann. Man verlängere at, bis dieselbe die Spur

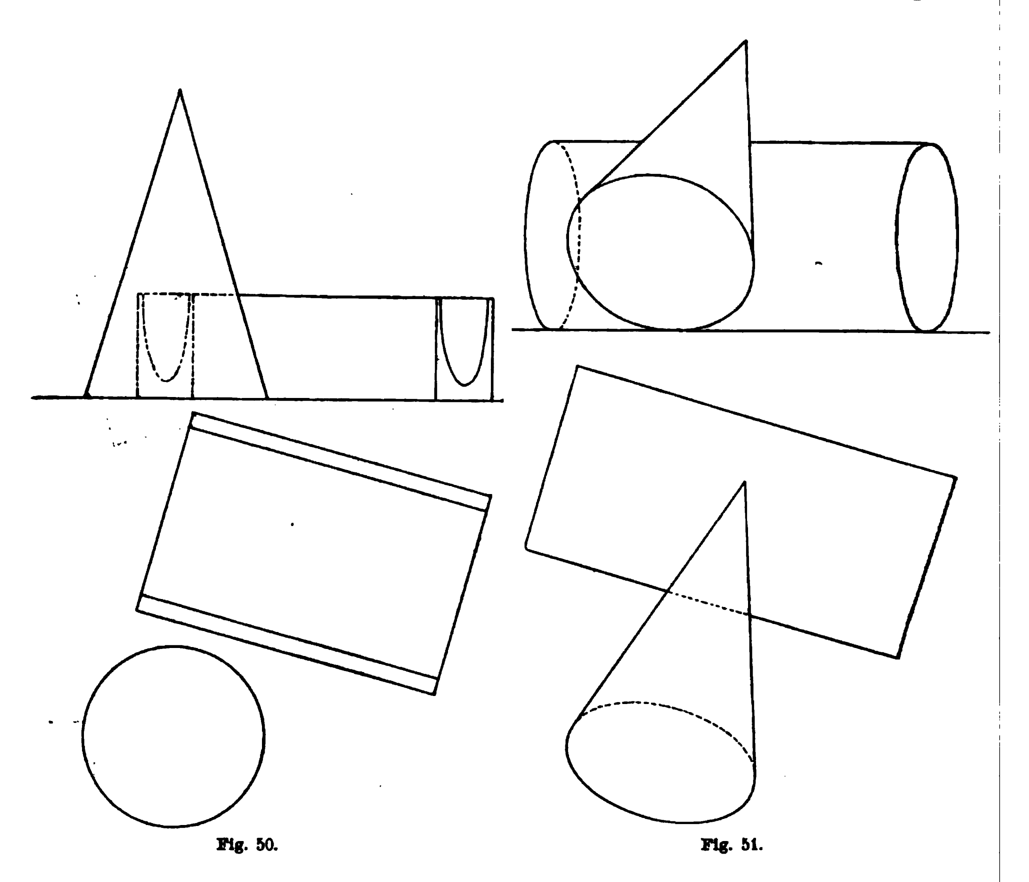


Fig. 50. Fig. 51.

des Grundkreises in b trifft; ziehe von b aus die Tangente bc und verbinde den Berührungspunkt c durch eine Gerade mit der Spitze t. Die Gerade ct stellt nun eine der gesuchten Schattengrenzen dar. Es ist nämlich, wie man sieht, die Ebene des Dreiecks, dessen Projektion durch bct dargestellt wird, eine Berührungsebene des Kegels. Der Berührungspunkt c ergiebt sich noch besser, wenn man den Grundkreis zuvor um die Spur bd in P_1 niederklappt; dann gelangt die Tangente bc nach bc′. Man bestimmt nun den Berührungspunkt c′ und findet hieraus leicht durch Zurück-

drehen des Kreises die Lage des Punktes c. Diese Lösung ist deshalb nicht ganz korrekt, weil man an die punktweise konstruierte Ellipse fa die Tangente at ziehen musste. Bei sorgfältiger Ausführung der Zeichnung ist die Konstruktion praktisch jedoch vollkommen brauchbar. Ebenso wird die zweite Schattengrenze gefunden.

In ähnlicher Weise bestimmt man in Fig. 51 die Schattengrenzen des auf dem Cylinder ruhenden Kegels.

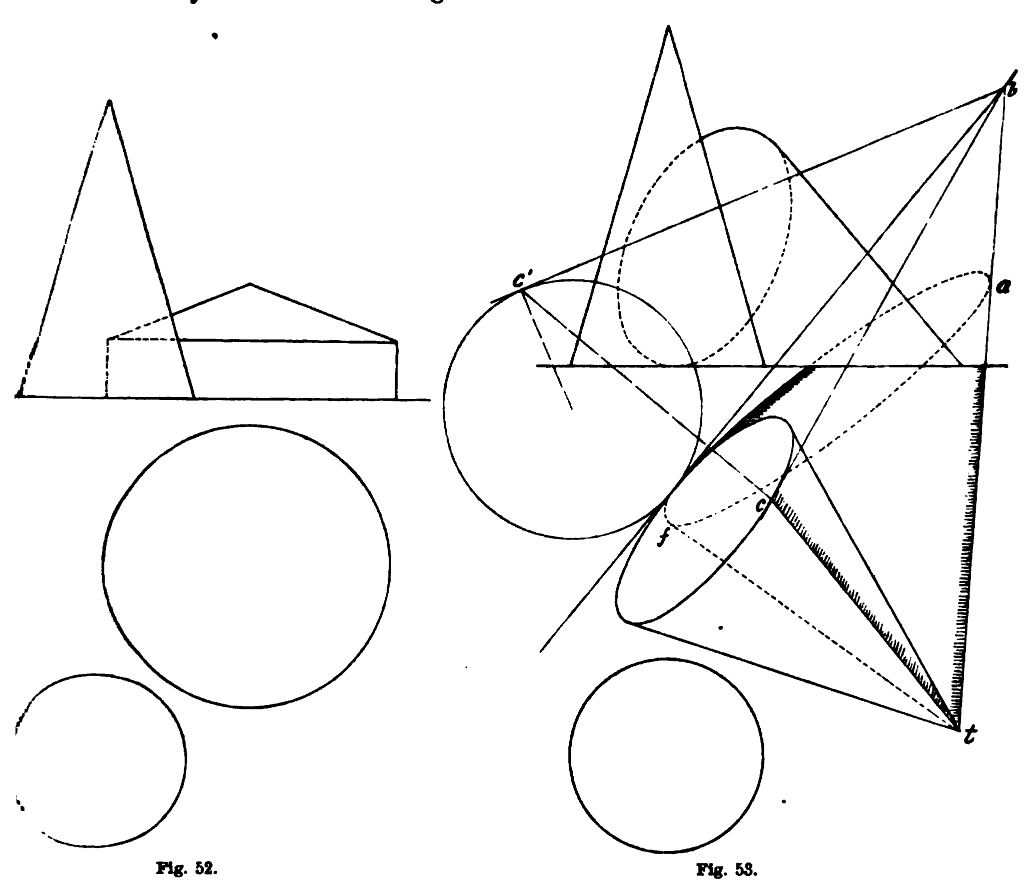


Fig. 52. Fig. 53.

Schattengrenzen und Schlagschatten bei Umdrehungskörpern.

25) Die Kugel. Legt man an eine Kugel K (Fig. 55) alle möglichen Lichtstrahlen, welche dieselbe berühren, so bilden die letzteren eine Cylinderfläche. Diese berührt die Kugel in einem grössten Kreise AB, welcher senkrecht zu den Strahlen steht. Derselbe bildet die Grenze zwischen dem erleuchteten und dem dunklen Teile der Kugeloberfläche. Bei parallelen

Lichtstrahlen wird der erleuchtete Teil hiernach eine Halbkugelfläche sein. Der Strahlencylinder schneidet eine Ebene P in einer Ellipse E, und diese ist der Schlagschatten, welchen die Kugel auf P wirft. Der Umfang der Ellipse ist zugleich der Schatten der Kreislinie AB.

Es sei nun eine auf P_1 liegende Kugel (Fig. 56) durch ihre beiden Projektionen gegeben. Zunächst sind die Projektionen des Berührungskreises mit dem die Kugel umhüllenden Strahlencylinder zu bestimmen. Die Projektionen des durch den Mittelpunkt (c_1, c_2) der Kugel gehenden Strahles seien $c_1 d_1$ und $c_2 d_2$. Man stelle eine neue Projektionsebene Q auf, welche parallel zu den Lichtstrahlen und senkrecht zu P_1 steht. Die erste Spur und Projektion dieser Ebene ist eine zu $c_1 d_1$ parallele Gerade TU. Auf diese Ebene werden die Kugel und der Strahl projiciert. Um die Projektionen darzustellen, ist die Ebene Q um TU in die erste Projektionsebene P_1 niederzuklappen. Die Projektion c_3 des Mittelpunktes der Kugel findet man, wenn man $c_1 c_3 \perp$ zu TU zieht, und $c_3 e_3$ gleich dem Halbmesser der Kugel macht. Die Projektion der Kugel erscheint dann nach der Umklappung als ein um c_3 gezeichneter Kreis von derselben Grösse, wie jede der beiden ersten Projektionen, und wenn man noch die erste Spur d_1 des Strahles ($c_1 d_1$, $c_2 d_2$) auf TU projiciert, so erhält man in $c_3 d_3$ auch die Projektion dieses Strahles auf Q.

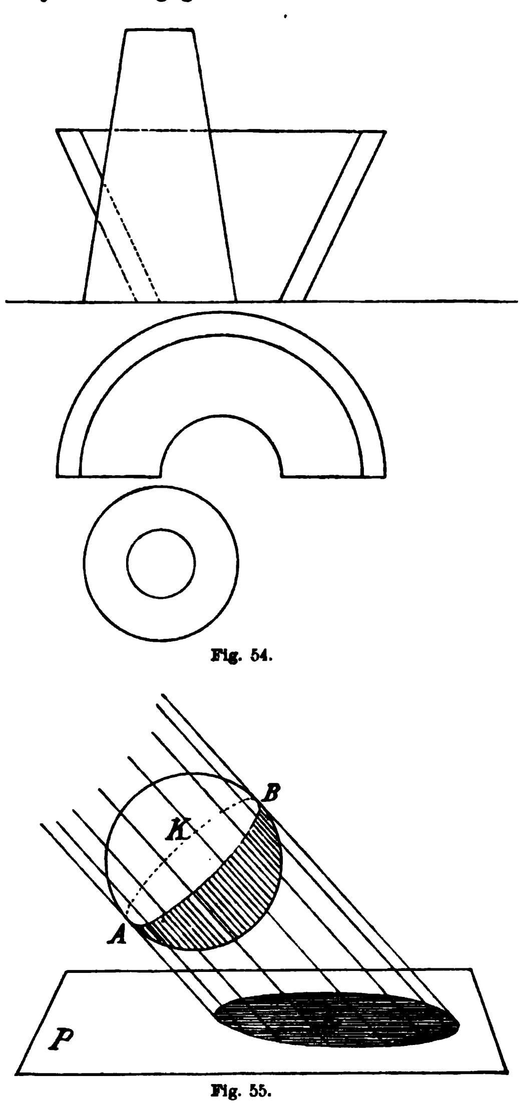


Fig. 54.

Fig. 55.

Da nun der Berührungskreis des Strahlencylinders senkrecht auf Q steht, so erscheint seine Projektion auf Q als eine zu $c_3 d_3$ senkrecht stehende

Gerade $a_3 b_3$. Um die beiden ersten Projektionen dieses Kreises zu finden, lege man durch die Kugel einen Schnitt parallel zu P_1. Die Projektion eines solchen Schnittes auf Q ist eine Gerade $f_3 g_3$, welche parallel zu TU ist und seine erste Projektion erscheint als ein um c_1 beschriebener Kreis, dessen Durchmesser gleich $f_3 g_3$ ist. Der Schnittpunkt m_3 von $f_3 g_3$ und $a_3 b_3$ wird nun durch die zu TU senkrechte Gerade $m_3 m_1$ auf diesen Kreis projiciert, wodurch man die beiden Punkte m_1 und n_1 erhält, welche der ersten Projektion des gesuchten Berührungskreises angehören. Die zweiten

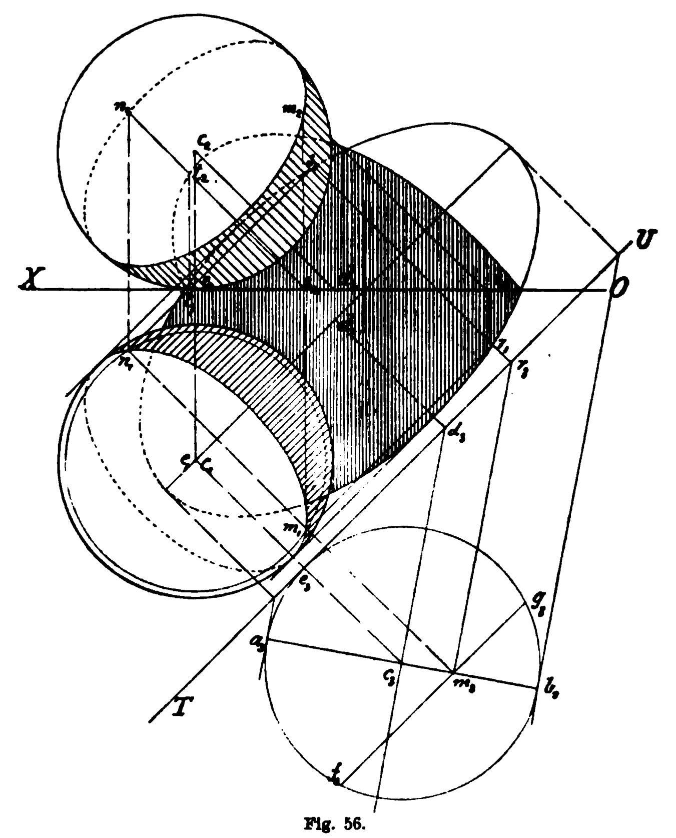


Fig. 56.

Projektionen m_2 und n_2 liegen auf den zur Achse OX senkrechten Geraden $m_1 m_2$ bez. $n_1 n_2$ und zwar sind die Höhen dieser Punkte über OX gleich dem Abstande des Punktes m_3 von TU. Durch Wiederholung dieses Verfahrens bestimmt man so viele Punkte der beiden Projektionen des Berührungskreises, als nötig sind, um dieselben zeichnen zu können. Die beiden Projektionen sind nach (IV, 8, I. Teil) Ellipsen, welche, wie leicht ersichtlich, kongruent werden, sobald die Projektionen der Strahlen mit OX gleiche Winkel bilden. Der Schlagschatten des Punktes $(m_1 m_2)$ auf P_1 ist

die erste Spur des durch diesen Punkt gehenden Strahles. Man findet letztere, wenn man den Strahl ($m_1 r_1$, $m_2 r_2$) zieht und durch den Schnittpunkt von $m_2 r_2$ mit OX die Senkrechte $r_2 r_1$ zu OX legt, in r_1. Dieser Punkt kann auch mit Hülfe der Seitenansicht gefunden werden, wenn man die Projektion $m_3 r_3$ jenes Strahles auf Q zeichnet und in r_3 die projicierende Gerade $r_3 r_1$ senkrecht zu TU zieht. Da nun $m_3 r_3$ auch zugleich die Projektion des Strahles ($n_1 s_1$, $n_2 s_2$) auf Q ist, so erhält man durch die Verlängerung von $r_3 r_1$ bis s_1 auch zugleich den Schatten des Punktes ($n_1 n_2$) auf P_1, (welcher in Fig. 56 auf dem hinteren Teile der ersten Projektionsebene liegt). Zieht man durch den Punkt, in welchem $n_1 s_1$ die Achse OX schneidet, die Projicierende $t_1 t_2$ bis zum Strahl $n_2 s_2$, so erhält man in t_2 den Schatten des Punktes (n_1, n_2) auf P_2. Hiernach kann man beliebig viele Punkte des auf P_1 und P_2 fallenden Schattens bestimmen.

In Fig. 56 ist der Schatten auf P_1 vollständig angegeben. Derselbe ist eine Ellipse, von welcher c_1 der eine Brennpunkt ist. Warum?

Andere Bestimmung der Schattengrenze und des Schlagschattens der Kugel (Fig. 57).

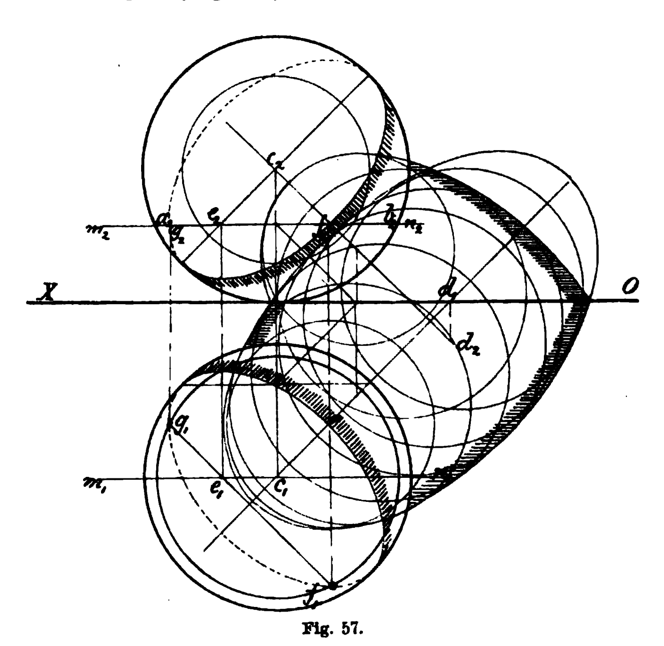


Fig. 57.

Nach dem vorigen ist die Schattengrenze der Kugel derjenige grösste Kreis, welcher senkrecht zu den Lichtstrahlen steht. Man denke sich durch den Mittelpunkt der Kugel eine neue Ebene P″ parallel zu P_2 gelegt, und ausserdem die Kugel von irgend einer anderen Ebene P′, welche parallel zu P_1 ist, durchgeschnitten. Die letztere werde in der zweiten Projektion

durch die zu OX parallele Gerade $m_2 n_2$ dargestellt. Betrachtet man nun P′ und P″ als zwei neue Projektionsebenen, deren Achse die Gerade ($m_1 n_1$, $m_2 n_2$) ist, dann stehen die Spuren der Ebene des gesuchten grössten Kreises in P′ und P″ senkrecht zu $c_1 d_1$ bez. $c_2 d_2$ (III, 19, I. Teil). Man ziehe hiernach die Spur $c_2 e_2$, welche in P″ liegt, durch c_2 senkrecht zu $c_2 d_2$, projiciere e_2 auf $m_1 n_1$ nach e_1 und ziehe durch den letzteren Punkt die Spur $f_1 g_1 \perp c_1 d_1$. Nun schneidet P′ die Kugel in einem Kreise vom Durchmesser $a_2 b_2$, welcher im Grundriss in wahrer Grösse erscheint und von der Spur $f_1 g_1$ in f_1 und g_1 getroffen wird. Diese beiden Schnittpunkte gehören der ersten Projektion, und die zweiten Projektionen f_2 und g_2 derselben, der zweiten Projektion der Schattengrenze an.

Die Schlagschattengrenze der Kugel kann auch als Einhüllende der Schlagschatten aller zu P_1 bez. P_2 parallelen Kreisschnitte der Kugel konstruiert werden. Die Schatten dieser Kreisschnitte auf P_1 bez. P_2 sind wieder Kreise, deren Konstruktion aus Fig. 57 leicht ersichtlich ist.

26) Man soll die Schlagschatten und die Eigenschattengrenzen für die in Fig. 58 und 59 dargestellten Kegel und Halbkugeln konstruieren. Im zweiten Beispiel ist eine Hohlkugel angenommen.

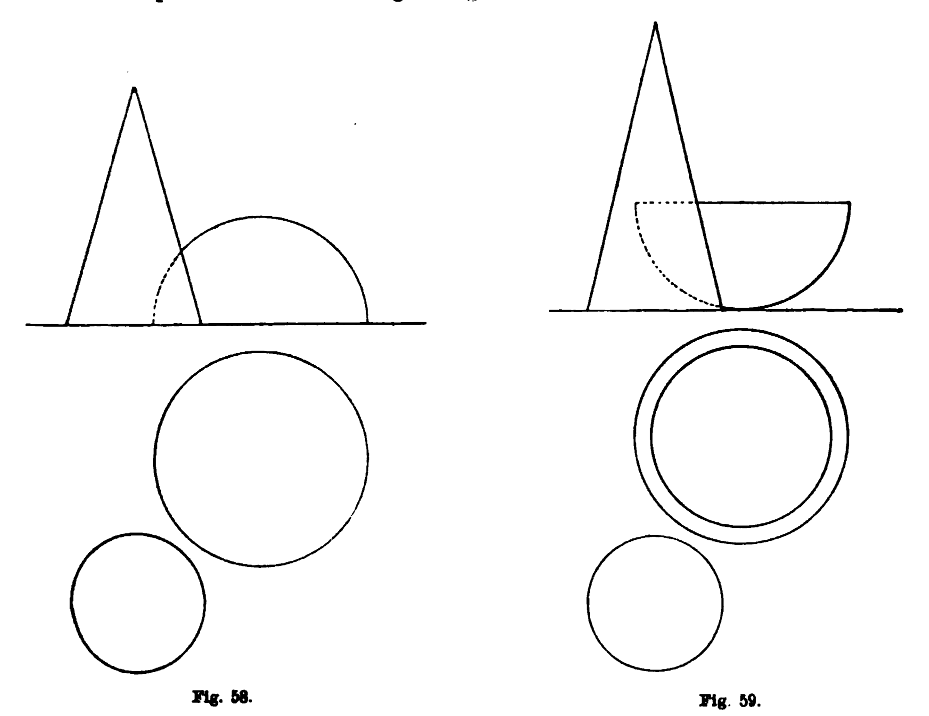


Fig. 58. Fig. 59.

27) Die Eigenschattengrenze und den Schlagschatten eines Umdrehungsellipsoides zu finden (Fig. 60).

Die Drehachse des Ellipsoids sei die grosse Achse der erzeugenden Ellipse. Dieselbe ist in Fig. 60 senkrecht zu P_1 angenommen, so dass die erste Projektion des Ellipsoids als Kreis erscheint, dessen Halbmesser der halben kleinen Achse jener Ellipse gleich ist. Die Schattengrenze ist nun die Berührungskurve einer das Ellipsoid umhüllenden Cylinderfläche, deren Seitenlinien den Lichtstrahlen parallel sind. Dieselbe muss also nach

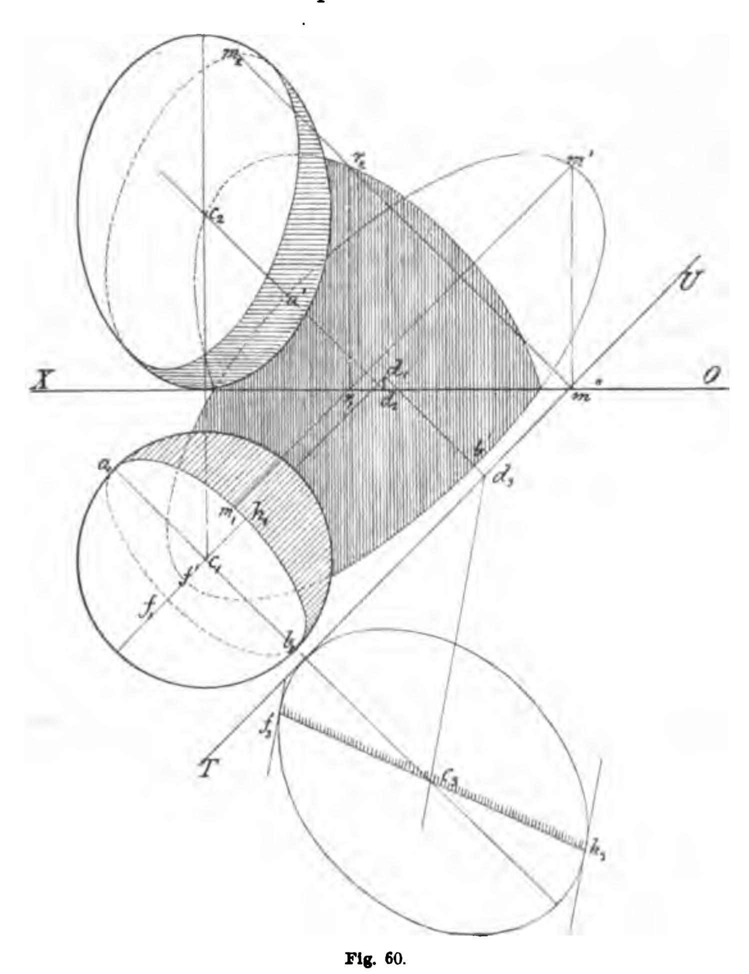


Fig. 60.

(VIII, 1, I. Teil) eine Ellipse sein. Man projiciere deshalb das Ellipsoid auf eine zu dem Strahl ($c_1 d_1$, $c_2 d_2$) parallele Ebene Q, welche zugleich senkrecht zu P_1 steht und deren erste Spur die zu $c_1 d_1$ parallele Gerade TU ist. Nach der Niederklappung dieser Ebene in P_1 erhält man als Projektion des Ellipsoids eine Ellipse von gleicher Gestalt, wie sie in der zweiten Projektion erscheint. Die Projektion $c_3 d_3$ des durch den Mittelpunkt gehenden

Strahles wird wie in Fig. 56 bestimmt. In dieser neuen Projektion erscheint nun die Schattengrenze als eine Gerade $f_3 h_3$, welche die Berührungspunkte der zu $c_3 d_3$ parallelen Tangenten der Ellipse verbindet. Projiciert man f_3 und h_3 auf $c_1 d_1$ nach f_1 und h_1, so ist nun $f_1 h_1$ die kleine Achse, und der zu $c_1 d_1$ senkrechte Durchmesser $a_1 b_1$ die grosse Achse der Ellipse, welche die erste Projektion der Schattengrenze darstellt. Hiernach ist nun auch leicht die zweite Projektion der letzteren zu finden.

Der Schlagschatten kann entweder durch die Bestimmung der Schatten einzelner Punkte der Schattengrenze gefunden werden, oder unabhängig von der letzteren, wenn man zuerst den auf P_1 fallenden Schatten als Einhüllende der Schatten aller zu P_1 parallelen Kreisschnitte wie in Fig. 57 konstruiert. Dieser Schatten $a'm'b'f'$ ist ebenfalls eine Ellipse. Hat man diese sorgfältig gezeichnet, so lässt sich daraus auch der auf P_2 fallende Schatten finden. Man ziehe durch einen Punkt m' des Schattens, welcher auf P_1 fällt und durch dessen zweite in OX liegende Projektion m'' den Strahl $(m_1 m', m_2 m'')$. Der letztere geht durch den Punkt $(m_1 m_2)$ der Eigenschattengrenze. Zieht man in dem Punkte r_1, in welchem $m_1 m'$ die Achse OX trifft, die Gerade $r_1 r_2$ senkrecht zu der letzteren, so ist r_2 die zweite Spur jenes Strahles oder der Schatten des Punktes $(m_1 m_2)$ auf P_2. Wie man sieht, braucht der Punkt $(m_1 m_2)$ zur Konstruktion seines Schatten selbst nicht benutzt zu werden.

Eie Eigenschattengrenze kann ferner mit Hülfe von (VI, 25, I. Teil) bestimmt werden. Diese Methode wird an dem folgenden Beispiel näher erläutert.

28) Den Schlagschatten und die Eigenschattengrenze des auf P_1 stehenden Umdrehungskörpers (Fig. 61) zu finden, dessen Meridianschnitt die beiden Geraden $a_2 b_2$, $c_2 d_2$ und der Viertelkreis $b_2 d_2$ sind. Man lege einen Schnitt parallel zu P_1 durch den gegebenen Körper. Die zweite Projektion desselben sei die zu OX parallele Gerade $e_2 f_2$; die erste Projektion ist ein Kreis, dessen Durchmesser $e_1 f_1 = e_2 f_2$ ist. Ferner sei das Dreieck $p_2 s_2 q_2$ die zweite Projektion eines Kegels, welcher die Umdrehungsfläche in diesem Kreise berührt. Durch die Spitze (s_1, s_2) legt man den Strahl $(s_1 t_1, s_2 t_2)$; die Spur t_1 des letzteren ist der Schatten der Spitze auf P_1, und wenn man die Berührungspunkte der von t_1 an den Grundkreis $p_1 q_1$ des Kegels gezogenen Tangenten mit der Spitze desselben durch die Geraden $g_1 s_1$ und $h_1 s_1$ verbindet, so schneiden diese den Kreis $e_1 f_1$ in den beiden Punkten m_1 bez. n_1, deren zweite Projektionen m_2 und n_2 auf $e_2 f_2$ liegen. Jene Verbindungslinien sind aber nach (14) die Eigenschattengrenzen des Kegels, und da der letztere die Umdrehungsfläche in dem Kreise $(e_1 f_1, e_2 f_2)$ berührt, so gehören die Punkte (m_1, m_2), (n_1, n_2) der gesuchten Schattengrenze an. (In diesen Punkten haben der Kegel und die Um-

drehungsfläche gemeinschaftliche Berührungsebenen, welche den Lichtstrahlen parallel sind.)

Die beiden Tangenten, welche von t_1 an den Kreis $p_1 q_1$ gezogen werden können, sind in Fig. 61 nicht gezeichnet; ihre Berührungspunkte g_1 und h_1 liegen bekanntlich auf dem um $s_1 t_1$ als Durchmesser gezeichneten Kreise. Es ist zweckmässig, nicht die Tangenten selbst zu ziehen, sondern zur Be-

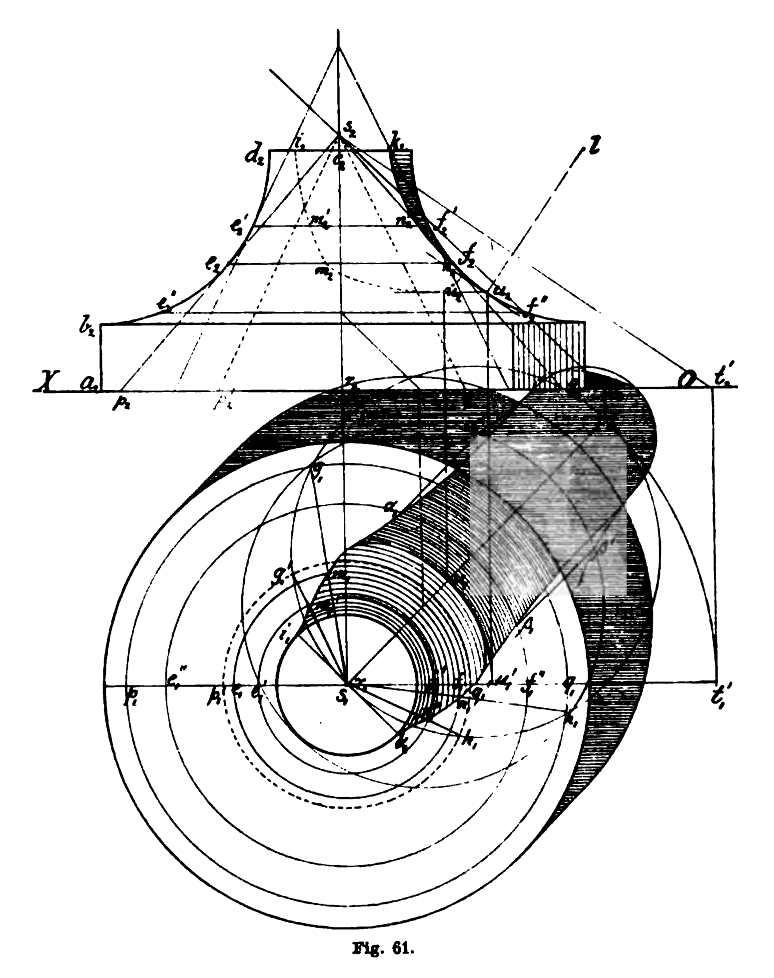


Fig. 61.

timmung ihrer Berührungspunkte diesen Kreis zu benutzen. Ist nun $e_2'f_2'$ ein zweiter Schnitt parallel zu P_1, dann verschiebe man den Kegel, welcher die Umdrehungsfläche in diesem Schnitt berührt, so, dass die Spitze nach s_2 verlegt wird. Der verschobene Kegel schneidet nun P_1 in dem Kreise $(p_1'q_1', p_2'q_2')$ und die ersten Projektionen der Schattengrenzen dieses Kegels sind die von den Schnittpunkten g_1' und h_1' nach s_1 gehenden Geraden

$g_1's_1$ und $h_1's_1$. Wird nun der Kegel wieder in seine frühere Lage gebracht, so ändern sich die ersten Projektionen der Schattengrenzen nicht. Die letzteren schneiden aber den Kreis $e_1'f_1'$ in zwei neuen Punkten m_1' und n_1' der gesuchten Schattengrenze und die zweiten Projektionen m_2' und n_2' dieser Punkte liegen auf $e_2'f_2'$.

Die Schattengrenze erreicht den oberen Kreis des Umdrehungskörpers in den beiden Punkten (i_1, i_2) und (k_1, k_2), deren erste Projektion man findet, wenn man den Durchmesser $i_1k_1 \perp s_1t_1$ zieht. In diesem Falle geht nämlich der Hülfskegel in eine gerade zu P_1 senkrechte Cylinderfläche über. Ferner ist klar, dass die erste Projektion der Schattengrenze von s_1t_1 in zwei kongruente Teile geteilt wird. Um denjenigen Punkt u_1 zu finden, welcher auf s_1t_1 liegt, ist durch die Drehachse (s_1r_1, s_2r_2) und durch den Strahl (s_1t_1, s_2t_2) eine Schnittebene zu legen. Man drehe diese Ebene um (s_1r_1, s_2r_2) so weit, bis dieselbe parallel zu P_2 wird, dann liegt nach der Drehung der Schnitt in der zu OX parallelen Geraden s_1t_1', während die zweite Projektion mit dem Umriss $f_2'f_2q_2$ zusammenfällt. Der Strahl (s_1t_1, s_2t_2) kommt bei dieser Drehung in die Lage s_1t_1', s_2t_2'). Man bestimmt nun den Berührungspunkt u_2' einer zu s_2t_2' parallelen Tangente an den Kreis f_2f_2', indem man den Halbmesser lu_2' senkrecht zu s_2t_2' zieht, projiciert u_2' nach u_1' und dreht alsdann den Schnitt in seine vorige Lage zurück. u_1' beschreibt hiernach um s_1 den Kreisbogen $u_1'u_1$, dessen zweite Projektion die zu OX parallele Gerade $u_2'u_2$ ist. Hierdurch sind die Projektionen u_1 und u_2 des gesuchten Punktes bestimmt.

Der Schlagschatten, welcher auf P_1 fällt, kann am einfachsten wieder als Einhüllende der Schatten aller zu P_1 parallelen Kreisschnitte bestimmt werden. Aus diesem findet man wie in (27) leicht denjenigen Teil des Schattens, welcher auf P_2 fällt. Selbstverständlich kann man diesen Schatten auch punktweise konstruieren.

Endlich ist noch derjenige Schatten zu konstruieren, welchen der obere Teil des Umdrehungskörpers auf den unteren breiteren Teil desselben wirft. Man findet diesen am einfachsten durch die Methode des Zurückprojicierens. Die Kurve, welche die Schatten der zu P_1 parallelen Schnitte einhüllt, ragt in den Schatten des unteren Teiles hinein. Ist nun der Kreis $(e_1''f_1'', e_2''f_2'')$ ein Schnitt, dessen Schatten auf P_1 jene Kurve in den beiden Punkten α' und β' schneidet, so zieht man durch die letzteren die beiden Strahlen $\alpha'\alpha_1$ und $\beta'\beta_1$ zurück, welche nun nach (8) den Kreis $e_1''f_1''$ in zwei Punkten α_1 und β_1 des gesuchten Schlagschattens treffen.

29) Ermittelung des Schlagschattens und Eigenschattens bei einem Wulst (Ringfläche), welcher eine rechteckige Platte trägt (Fig. 62).

Beide Körper stossen unmittelbar an die zweite Projektionsebene P_2. Der Schatten der rechteckigen Platte auf P_2 wird leicht durch die zweiten

Spuren der Strahlen gefunden, welche durch die Ecken der Platte gehen. Die Grenzlinien des Schattens, welcher auf den Wulst fällt, rühren von den beiden Kanten $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ und $(a_1 c_1, a_2 c_2)$ her. Da die letztere Kante senkrecht zu P_2 steht, so fällt ihr Schatten auf P_2 mit der Projektion $a_2 \alpha$ des Strahles, welcher durch $(a_1 a_2)$ geht, zusammen. Ebenso erscheint die Projektion des Schattens, welchen diese Kante auf den Wulst wirft, als eine in $a_2 \alpha$ liegende Gerade. Den Schatten, welcher von der Kante $(a_1 b_1, a_2 b_2)$

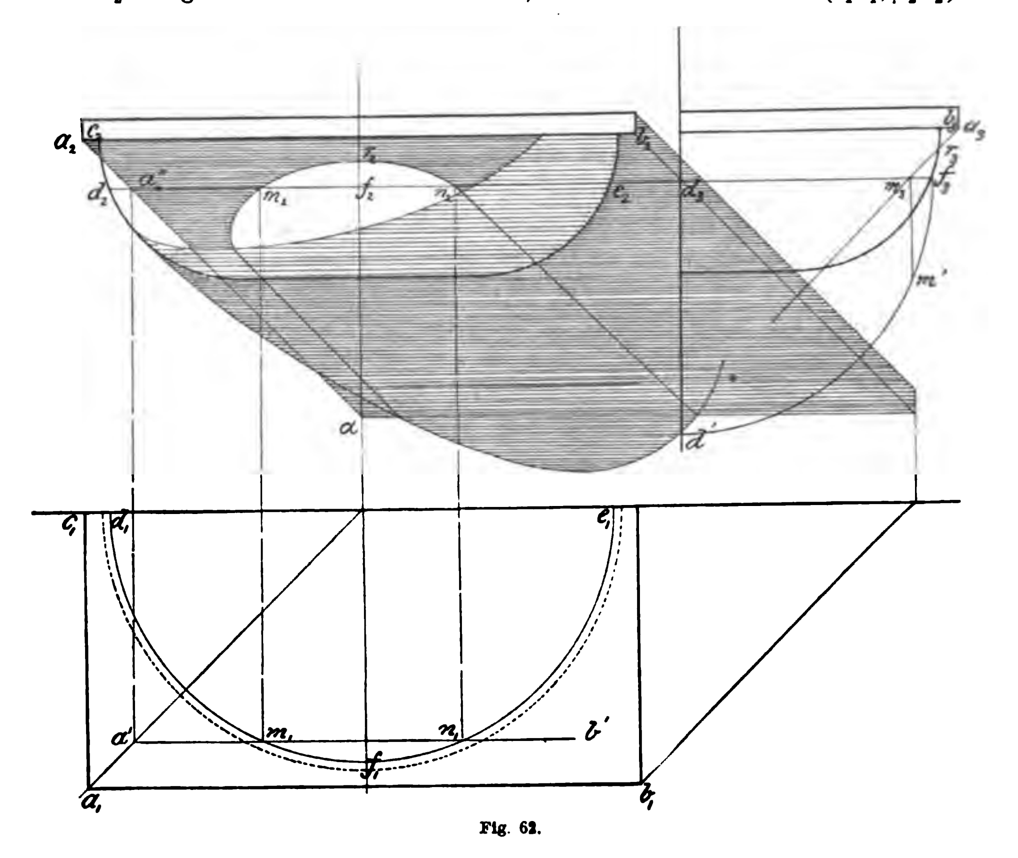


Fig. 62.

auf den Wulst fällt, kann man auf folgende Weise bestimmen. Es sei der Halbkreis $(d_1 e_1, d_2 e_2)$ ein zur Achse des Wulstes senkrechter Schnitt, dessen zweite Projektion also die Gerade $d_2 e_2$ ist. Man bestimmt den Schatten (a', a''), welchen der Punkt $(a_1 a_2)$ auf die Ebene dieses Halbkreises wirft, und zieht durch a' die Gerade $a'b'$ parallel zu $a_1 b_1$; dann ist $a'b'$ die erste Projektion des Schattens der Kante $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ auf derselben Ebene. Nun schneidet $a'b'$ den Halbkreis $d_1 e_1$ in den beiden Punkten m_1 und n_1, deren zweite auf $d_2 e_2$ liegende Projektionen m_2 und n_2 dem gesuchten Schatten angehören.

Der Schatten kann auch mit Hülfe der dritten Projektion gefunden werden. In dieser erscheint die Kante ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) als Punkt ($a_3 b_3$). und deshalb fällt der auf dem Wulst liegende Schatten der Kante mit der dritten Projektion $a_3 m_3$ des Strahles zusammen. Der vorhin benutzte Schnitt wird in dieser Ansicht durch die Gerade $d_3 f_3$ dargestellt, und auf der letzteren liegt nun der Punkt m_3 des Schlagschattens. Um denselben auf die zweite Projektion zu übertragen, wird die eine Hälfte des Schnittes um den zu P_2 senkrechten Halbmesser gedreht, wodurch derselbe in der dritten Projektion in die Lage des Viertelkreises $d'f_3$ kommt. Zieht man nun $m_3 m'$ senkrecht zu $d_3 f_3$, so ist $m_3 m'$ die Entfernung des Punktes m_3 von demjenigen Halbmesser, um welchen der Schnitt gedreht wurde. Man mache $m_2 f_2 = n_2 f_2 = m_3 m'$, dann erhält man die schon vorhin gefundenen Punkte m_2 und n_2. Leicht ergiebt sich, dass dieser Schatten, in Bezug auf die Mittelachse $f_1 f_2$ symmetrisch ist. Der in $f_1 f_2$ liegende höchste Punkt r_2 des Schattens ergiebt sich leicht aus seiner dritten Projektion r_3.

Die Eigenschattengrenze des Wulstes wird, wie in Fig. 61, mit Hülfe berührender Kegelflächen gefunden. Der Schlagschatten auf P_2 ergiebt sich dann durch Bestimmung der Schatten einzelner Punkte dieser Kurve.

Schattenkonstruktion bei schiefen Projektionen.

30) Bei der Darstellung gegebener Körper durch schiefe Projektionen lassen sich die Schlagschatten und Eigenschatten ebenfalls leicht bestimmen. Man kann entweder das Resultat der Schattenkonstruktion aus der geraden Projektion in die schiefe Projektion übertragen, oder auch in der letzteren die Schatten selbständig bestimmen. Das letztere soll durch Fig. 63 näher erläutert werden.

Es sind als Beispiel die nach (I, B, I. Teil) konstruierten schiefen Projektionen der beiden in Fig. 44 dargestellten Körper angenommen. Um die Richtung der Strahlen näher zu bestimmen, ist noch der Punkt e_1', in welchem der durch die Spitze des Kegels gehende Strahl die erste Projektionsebene P_1 trifft, in Fig. 63 übertragen. Dann stellt Ee_1' diesen Strahl und $e_1 e_1'$ seine Projektion auf P_1 dar. Hierdurch ist die Richtung der Strahlen bestimmt. Der Schatten der Pyramide auf P_1 wird durch die beiden Geraden Be_1' und De_1' begrenzt. Um den Schatten des Eckpunktes L zu finden, zieht man den Strahl Ll_1' parallel zu Ee_1' und zeichnet die Projektion $l_1 l_1'$ parallel zu $e_1 e_1'$. Diese wird vom Strahl Ll_1' in l_1', dem Schatten des Punktes L getroffen.

Zur Bestimmung des Schattens, welchen die Pyramide auf das Prisma wirft, wendet man das gleiche Verfahren wie in Fig. 44 an. Man legt durch den Strahl Ee_1' eine zu P_1 senkrecht stehende Ebene. Dieselbe wird durch das Dreieck $Ee_1 e_1'$ dargestellt, und sie schneidet das Prisma in einer Figur,

deren Projektion auf P_1 die in $e_1 e_1'$ liegende Gerade $\alpha\xi$ ist. Um diejenige Seite des Schnittes zu finden, welche auf der Fläche KLNM liegt, errichte man in dem Schnittpunkte β_1, wo die Projektion $k_1 l_1$ der Kante KL von $e_1 e_1'$ getroffen wird, das Lot $\beta\beta_1$ auf P_1; dann ist $\alpha_1\beta$ die eine Seite der Schnittfigur. Der Punkt G, in welchem $\alpha_1\beta$ den Strahl Ee_1' schneidet, ist nun der Schatten der Spitze E auf der erweiterten Ebene KLNM. Die Grenzlinien des auf P_1 fallenden Schattens der Pyramide erreichen die Kante MN in den Punkten δ_1 und ξ_1; zieht man nun die Geraden $\delta_1 G$ und $\xi_1 G$, so stellt das Dreieck $\delta_1 G \xi_1$ den Schatten der Pyramide auf KLNM dar. Von diesem Schatten ist aber nur der Teil $\delta_1 T U \xi_1$ wirklich vorhanden.

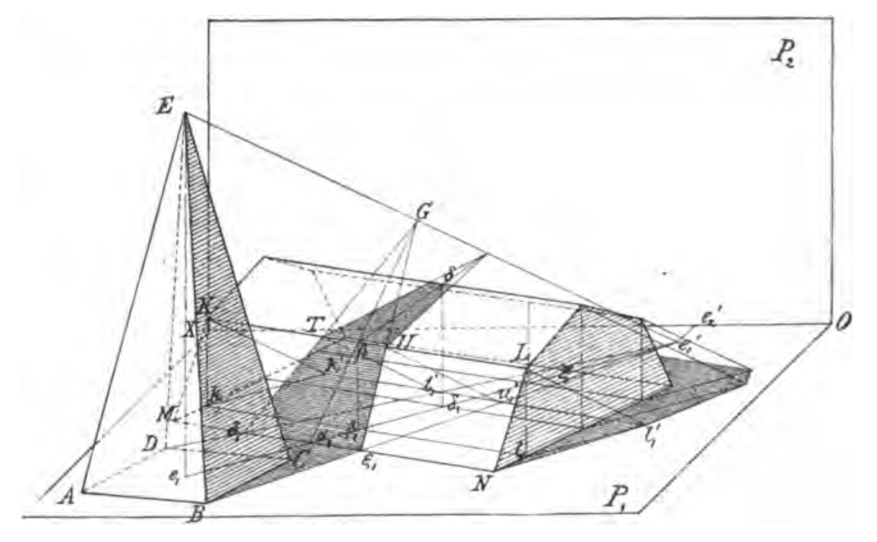


Fig. 63.

Die Methode des Zurückprojicierens ist bei schiefen Projektionen ebenfalls anwendbar. Ist $k_1' l_1'$ der zu KL parallele Schatten der letzteren Kante und trifft derselbe die beiden Grenzlinien Be_1' und De_1' des Schattens der Pyramide in t_1' und u_1', so ziehe man von diesen Punkten die Strahlen $u_1'U$ und $t_1'T$ parallel zu Ee_1'. Dieselben treffen KL in den beiden schon vorhin gefundenen Punkten U und T.

Die Figuren 45—52 eignen sich für die Darstellung in schiefer Projektion, und bieten Übungsbeispiele für weitere Schattenkonstruktionen.

Schattenkonstruktion bei endlicher Entfernung der Lichtquelle.

31) Wenn auch die Konstruktion der Schatten für eine endliche Entfernung der Lichtquelle seltener zur Anwendung kommt, so dürfte doch die Kenntnis derselben für diejenigen Studierenden der Darstellenden Geometrie, welche sich besonders dem Freihandzeichnen zuwenden, von Nutzen sein. Im übrigen bieten die Konstruktionen keine Schwierigkeiten.

Als Beispiel diene der Schatten eines Kreuzes (K_1, K_2), welches auf P_1 steht (Fig. 64). l_1 und l_2 sind die Projektionen einer Lichtquelle L. Um den Schatten eines Eckpunktes, z. B. denjenigen von (a_1, a_2) zu bestimmen, zieht man den Strahl ($l_1 a_1$, $l_2 a_2$). Derselbe trifft in Fig. 64 die zweite Projektionsebene in α_2 und dieser Punkt ist der Schatten von a_2. In gleicher Weise werden die Schatten der übrigen Ecken bestimmt. Zu

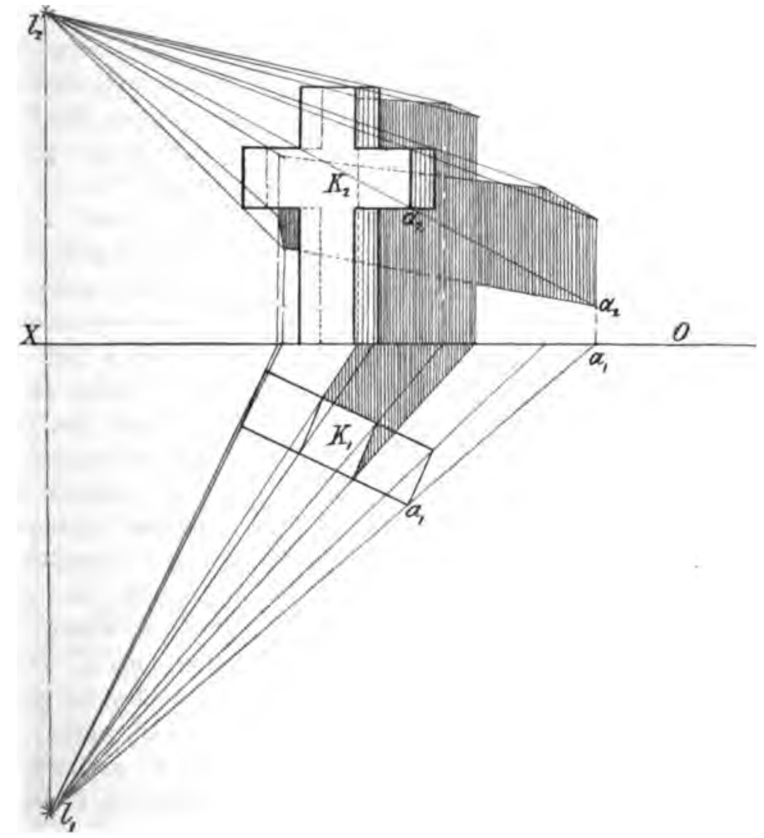


Fig. 64.

bemerken ist noch, dass die Sätze 3 und 4 der Einleitung, wie schon früher bemerkt, auch jetzt gültig sind.

Zur eigenen Übung kann man Beispiele aus den Figuren 44—62 entnehmen. Die Bestimmung der Eigenschattengrenzen von Cylinder- oder Kegelflächen ist nach (VI, 8, I. Teil) auszuführen und für Umdrehungsflächen ist nach (VI, 24, I. Teil) zu verfahren.

Man zeichne auch eine schiefe Projektion von Fig. 64 und führe darin die Schattenkonstruktion aus.

II. Abschnitt.

Beleuchtungslehre.

1) Die Helligkeit einer ebenen Fläche, welche von einem Bündel paralleler Strahlen getroffen wird, hängt von dem Neigungswinkel der Strahlen gegen die erleuchtete Fläche ab. Sie ist am grössten, wenn die Strahlen senkrecht zu der Fläche stehen und nimmt um so mehr ab, je spitzer der Winkel ist, unter welchem die Strahlen die Fläche treffen. Um das gesetzmässige dieser Erscheinung, welche schon die Erfahrung lehrt, klarer zu stellen, nehmen wir an, es sei S (Fig. 65) ein Bündel von Parallelstrahlen, dessen Querschnitt f ist. Trifft nun dieses Strahlenbündel eine andere Ebene EE′, so erleuchtet dasselbe einen Teil F der Ebene, welcher als schiefer Schnitt des Bündels betrachtet werden kann. Es ist deshalb $F > f$. Dieselbe Lichtmenge, welche f erleuchtet, trifft nun auch die grössere Fläche F, woraus sich ergiebt, dass die Helligkeit der letzteren eine geringere sein muss. Denn die Flächeneinheit auf F wird von einer kleineren Menge von Strahlen getroffen, als diejenige des Querschnittes f. Bezeichnet man die Lichtmenge, welche die Flächeneinheit in f erhält, mit J, so fällt auf f sowohl als auch auf F die Lichtmenge $J \cdot f$. Danach empfängt die Flächeneinheit von F die Lichtmenge:

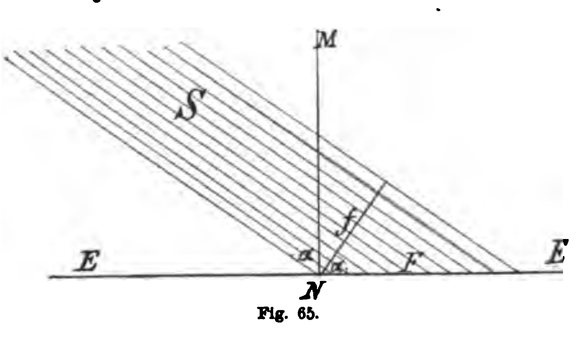


Fig. 65.

$$J' = \frac{J \cdot f}{F}.$$

Ist nun α der Winkel, welchen f mit F bildet, so ist bekanntlich (da f als gerade Projektion von F betrachtet werden kann):

$$f = F \cos \alpha, \quad \text{oder} \quad \frac{f}{F} = \cos \alpha.$$

Hieraus folgt:

(1) . . . . $J' = J \cdot \cos \alpha.$

Der Winkel α ist auch gleich dem Winkel, welchen eine zur Ebene EE′ errichtete Senkrechte MN (Einfallslot) mit der Strahlenrichtung bildet.

Man pflegt diesen Winkel den Einfallswinkel zu nennen. Demnach ist die auf die Flächeneinheit fallende Lichtmenge dem cos des Einfallswinkels proportional; sie ist gleich J, wenn $\alpha = 0$, und wird 0 für $\alpha = 90°$.

Die Helligkeit einer Fläche nehmen wir proportional der Strahlenmenge an, von welcher dieselbe getroffen wird. Die Gleichung (1) bleibt deshalb unverändert, wenn J und die J′ die Helligkeiten bei dem Einfallswinkel 0 bez. α bedeuten.

Nimmt man die Helligkeit bei dem Einfallswinkel 0 gleich 1 an, so drückt für jeden anderen Einfallswinkel der Cosinus desselben die entsprechende Helligkeit aus. Man findet hiernach leicht aus den trigonometrischen Tafeln, dass:

für $\alpha = 0$	die Helligkeit	= 1	
$\alpha = 10°$	„ „	= 0,98	
$\alpha = 20°$	„ „	= 0,94	
$\alpha = 30°$	„ „	= 0,87	
$\alpha = 40°$	„ „	= 0,77	
$\alpha = 50°$	„ „	= 0,64	
$\alpha = 60°$	„ „	= 0,5	
$\alpha = 70°$	„ „	= 0,34	
$\alpha = 80°$	„ „	= 0,17	
$\alpha = 90°$	„ „	= 0,00	
$\alpha = 100°$	„ „	= — 0,17	
$\alpha = 110°$	„ „	= — 0,34	u. s. w.

Diese Zahlen lassen sich leicht graphisch darstellen. Man zeichne mit dem Halbmesser 1 einen Viertelkreis (Fig. 66) und teile den Bogen AB in

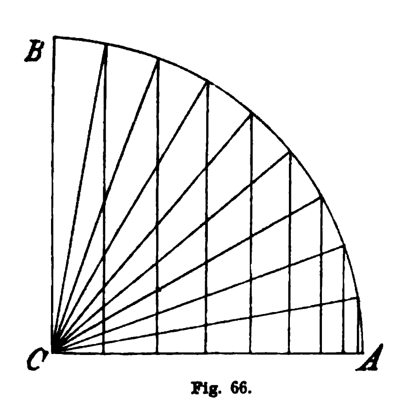


Fig. 66.

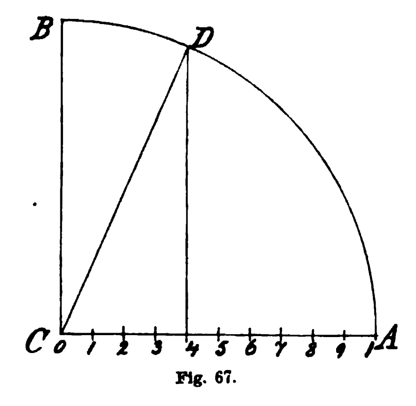


Fig. 67.

9 gleiche Teile. Projiciert man die Teilpunkte auf den Halbmesse CA, so geben die Entfernungen ihrer Projektionen vom Mittelpunkt C die entsprechenden Helligkeiten an.

Umgekehrt kann man die Einfallswinkel für gegebene Helligkeiten bestimmen. Der Halbmesser $CA = 1$ (Fig. 67) sei z. B. in 10 gleiche Teile geteilt; die einzelnen Teilpunkte, deren Abstände von C den Helligkeiten 0,1, 0,2, 0,3 . . . entsprechen, sind kurz mit 1, 2, 3 . . . bezeichnet. Um die Grösse des Einfallswinkels für die Helligkeit 0,4 zu finden, zieht man im Teilpunkte 4 das Lot D4 zu AC und verbindet D durch den Halbmesser CD mit C. Dann ist ACD der gesuchte Einfallswinkel.

Der Halbmesser AC kann somit als Maſsstab für die Helligkeiten bei gegebenen Einfallswinkeln benutzt werden.

Eine Ebene wird bei Beleuchtung durch Parallelstrahlen an allen Stellen gleiche Helligkeit zeigen, weil der Einfallswinkel der Strahlen überall derselbe ist. Ein von ebenen Flächen begrenzter Körper zeigt in seinem äusseren Anblick verschiedene Helligkeitsgrade seiner Begrenzungsflächen. Wird die Helligkeit dieser Flächen in der Zeichnung möglichst getreu wiedergegeben, so erhält man eine Abbildung, welche der Forderung grösster Anschaulichkeit genügt.

Eine krumme Fläche wird von den Lichtstrahlen im allgemeinen an verschiedenen Stellen unter ungleichen Winkeln getroffen; sie wird deshalb auch nicht gleichförmig hell erscheinen. Diejenigen Punkte der Fläche, für welche der Einfallswinkel der Strahlen derselbe ist, haben gleiche Helligkeit, und der Ort aller Punkte der krummen Fläche, welchen gleiche Helligkeit zukommt, wird eine Lichtgleiche (Isophote) der Fläche genannt. Während der Grad der Helligkeit für Körper, welche von ebenen Flächen begrenzt sind, nur für jede Seitenfläche ermittelt zu werden braucht, hat man bei einer krummen Oberfläche eine Anzahl von Lichtgleichen zu bestimmen, um ein anschauliches Bild von der Lichtverteilung zu erhalten.

Unter den krummen Flächen ist nun die Kugelfläche diejenige, deren Lichtgleichen am einfachsten zu bestimmen sind. Da bei der Kugelfläche alle möglichen Einfallswinkel, also auch alle möglichen Helligkeiten vorkommen, so bieten ihre Lichtgleichen auch das einfachste Mittel dar, die Lichtgleichen vieler anderen krummen Flächen, besonders diejenigen der Umdrehungsflächen zu ermitteln. Endlich sind die Lichtgleichen der Kugel auch geeignet, die Helligkeiten der Seitenflächen eines von Ebenen begrenzten Körpers leicht zu bestimmen.

2) Die Lichtgleichen der Kugelfläche.

Es seien K_1 und K_2 (Fig. 68) die beiden ersten Projektionen einer Kugel, K_3 die wie in Fig. 56 konstruierte dritte Projektion derselben. Ferner seien $c_1 d_1$, $c_2 d_2$, $c_3 d_3$ die drei Projektionen desjenigen Strahles, welcher durch den Mittelpunkt der Kugel geht; e_3 ein beliebiger Punkt des Umrisses der dritten Projektion und $e_3 f_3$ der durch e_3 gehende Strahl, dann ist der Halbmesser $c_3 e_3$ das Einfallslot und $\angle g e_3 f_3$ der Einfallswinkel.

Man denke sich den Halbkreis $m_3 a_3 i_3$ mit dem Strahl $e_3 f_3$ um den durch den Mittelpunkt c_3 gehenden Strahl gedreht. Dann beschreibt derselbe die Kugelfläche und $e_3 f_3$ behält bei der Drehung fortwährend die Lage eines

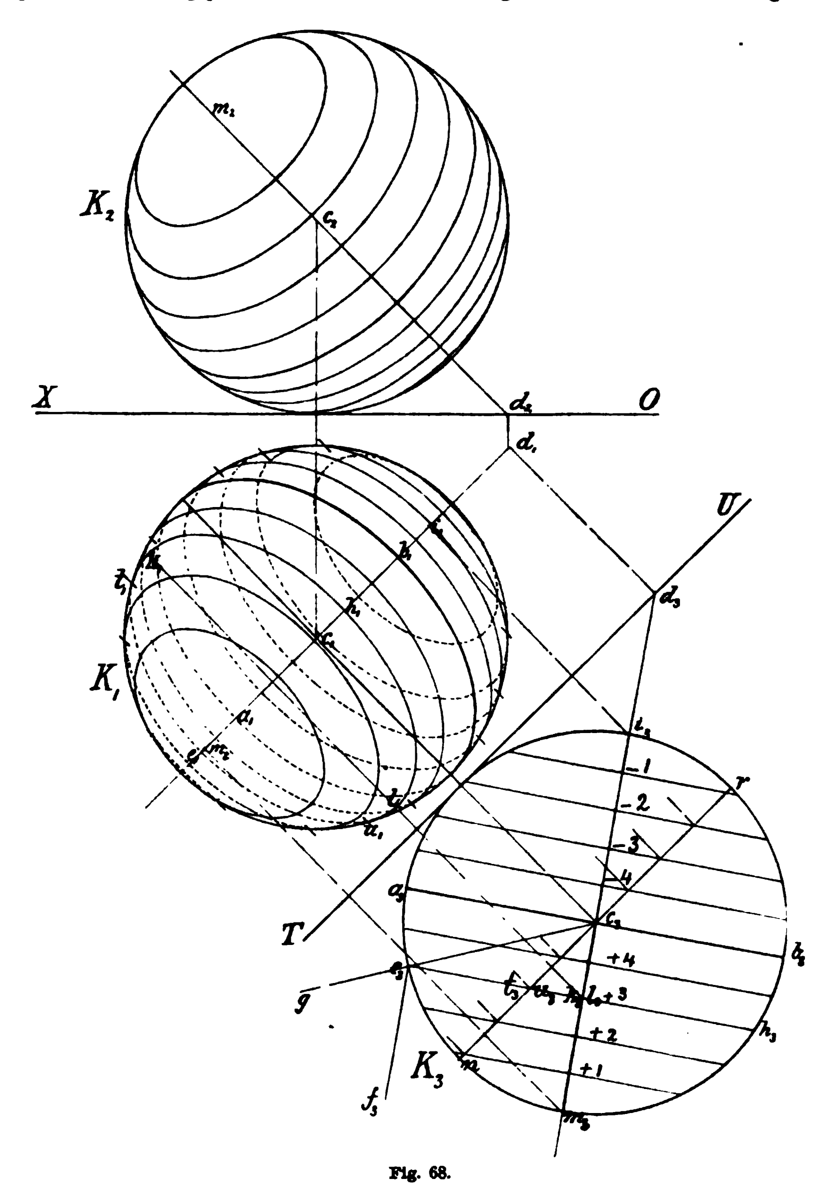


Fig. 68.

Strahles. Der Halbmesser $c_3 e_3$ durchläuft die Lagen der Einfallslote für alle Lagen des Punktes e_3, und der letztere beschreibt einen Kreis, welcher senkrecht zur Strahlenrichtung steht. Die dritte Projektion dieses Kreises

erscheint deshalb als eine zu $c_3 d_3$ senkrechte Gerade $e_3 h_3$. Erste und zweite Projektion desselben werden wie diejenigen der Schattengrenze in Fig. 56 bestimmt.

Die Lichtgleichen einer Kugelfläche sind hiernach Kreise, deren erste und zweite Projektionen als Ellipsen erscheinen. Man kann bei der Ausführmng der Konstruktion sich mit der Ermittelung der Achsen dieser Ellipsen begnügen und dann dieselben mit Hülfe eines Papierstreifens nach dem in (IV, 7, I. Teil) angegebenen Verfahren zeichnen, wodurch die vielen Hülfslinien erspart werden. Die kleine Achse $e_1 h_1$ derjenigen Lichtgleiche, deren dritte Projektion $e_3 h_3$ ist, liegt in $c_1 d_1$; ihre Endpunkte e_1 und h_1 sind die Projektionen von e_3 und h_3. Die grosse Achse $k_1 l_1$ ist gleich $e_3 h_3$.

Zieht man die Gerade nr parallel zu der Achse TU, so stellt dieselbe die Projektion desjenigen grössten Kreises der Kugel dar, dessen erste Projektion den Umriss von K_1 bildet. In dem Durchschnitte von $e_3 h_3$ mit nr fallen deshalb die Projektionen t_3 und u_3 zweier Schnittpunkte der gefundenen Lichtgleiche mit diesem grössten Kreise zusammen. Die ersten Projektionen t_1 und u_1 der beiden Schnittpunkte erscheinen somit als die Berührungspunkte der Ellipse $e_1 k_1 h_1 l_1$ mit dem Umriss der ersten Projektion der Kugel.

Die zweite Projektion ist bei der herkömmlichen Lage der Strahlen (wenn die Projektionen unter 45° gegen die Achse OX geneigt sind) der ersten kongruent. Man bestimmt nun am vorteilhaftesten die Lichtgleichen so, dass ihre Helligkeiten gleiche Unterschiede zeigen. Um z. B. diejenigen Lichtgleichen zu finden, welche der Reihe nach die Helligkeiten 0, 0,1, 0,2, 0,3 ..... 1,0 haben, teile man nach 1) den Halbmesser $c_3 m_3$ in 10 gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte Sehnen, welche senkrecht zu $c_3 m_3$ stehen. Dieselben stellen die dritten Projektionen der gesuchten Lichtgleichen dar, woraus nun ihre anderen Projektionen, wie oben angegeben, zu bestimmen sind. Der Helligkeit 1 entspricht hiernach nur der Punkt (m_1, m_2, m_3), in welchem der durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Strahl die Oberfläche derselben trifft. Der grösste Kreis, in welchem die Kugel von den Strahlen berührt wird, hat die Helligkeit 0, weil für jeden seiner Punkte der Einfallswinkel 90° beträgt. Dieser Kreis ist die schon in Fig. 56 bestimmte Grenze des Eigenschattens der Kugel. Durch Fortsetzung der Teilung von $c_3 m_3$ auf den Halbmesser $c_3 i_3$ erhält man weitere Lichtgleichen, welchen wegen der stumpfen Einfallswinkel negative Helligkeiten zukommen. Diese Kurven liegen in dem dunklen Teile der Kugel, welcher von den Strahlen nicht direkt getroffen wird: sie dienen dazu, die Abstufungen der Helligkeiten in dem Eigenschatten zu bezeichnen. Die dunkle Hälfte der Kugel wird nämlich noch durch Reflexlicht, welches von der Luft und von in der Nähe befindlichen Flächen (z. B. die Projektions-

ebenen) herrührt, erleuchtet. Die Eigenschattengrenze zeigt die geringste Helligkeit. Bezeichnet man die Helligkeit des hellsten Punktes mit 1, so kann man nach den Untersuchungen von Riess die Helligkeit der Schattengrenze a_3b_3 gleich $\frac{1}{6}$ und die des Punktes i_3 etwa gleich $\frac{1}{4}$ annehmen. Ferner bleibt der Helligkeitsunterschied je zweier Lichtgleichen, deren Ebenen gleiche senkrechte Abstände haben, stets derselbe. Auf der Lichtseite der Kugel ist deshalb der Unterschied der Helligkeiten zweier benachbarten Kurven gleich $\frac{1}{6}$, und im Eigenschatten beträgt derselbe $\frac{1}{60}$. In Fig. 68 entsprechen demnach den Lichtgleichen der Reihe nach folgende Helligkeiten:

für den Punkt m_3 die Helligkeit 1
„ „ Kreis + 1 „ „ $\frac{5}{6}$
„ „ „ + 2 „ „ $\frac{2}{3}$
„ „ „ + 3 „ „ $\frac{1}{2}$
„ „ „ + 4 „ „ $\frac{1}{3}$
für die Eigenschattengrenze „ $\frac{1}{6}$
„ den Kreis — 4 die „ $\frac{11}{60}$
„ „ „ — 3 „ „ $\frac{1}{5}$
„ „ „ — 2 „ „ $\frac{13}{60}$
„ „ „ — 1 „ „ $\frac{7}{30}$
„ „ Punkt i_3 „ „ $\frac{1}{4}$.

Werden diese Helligkeiten durch entsprechende Tuschlagen nachgeahmt, so erhält man ein Bild von guter plastischer Wirkung. Der Schlagschatten ist stets etwas dunkler als der Eigenschatten zu halten.

Da eine gründliche Untersuchung über die Helligkeitsverteilung auf der Kugel mit Berücksichtigung des Rückstrahlungsvermögens der Oberfläche, des Reflexlichtes der Luft und desjenigen von anderen zu berücksichtigenden Flächen u. s. w. eine schwierige und für die Ausstattung technischer Zeichnungen sehr zeitraubend ist, so beschränken wir uns im folgenden auf die oben angegebene Lichtverteilung. Dieselbe empfiehlt sich durch ihre grosse Einfachheit und reicht für die praktischen Bedürfnisse, welche wir hier in erster Linie berücksichtigen wollen, vollständig aus*).

3) Um die Lichtgleichen anderer Flächen zu bestimmen, nimmt man eine Kugel, auf welcher die Lichtgleichen schon angegeben sind, zu Hülfe.

---

*) Denjenigen, welche sich für eingehendere Studien in dieser Hinsicht interessieren, und welchen zugleich die nötigen mathematischen Kenntnisse zu Gebote stehen, empfehlen wir besonders: Riess, Schattierungskunde. Ferner enthält das schöne Werk von Wiener, „Darstellende Geometrie“, ausführliche Untersuchungen über die Beleuchtungslehre, Bd. I, S. 390. Dann: „Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen“.

Ferner ist noch eine andere Anordnung der Lichtgleichen neuerdings von F. Meisel (s. Repertorium der Physik von Dr. F. Exner) unter der Benennung „Ellipsoidische Isophoten“ angegeben.

Da die beiden ersten Projektionen der Kugel mit ihren Lichtgleichen bei der herkömmlichen Lage der Strahlen kongruent sind, so genügt eine Projektion derselben. Die zweite Projektion erhält man durch Drehung der ersten Projektion um 90°.

In Fig. 69 ist nun eine derartige sog. Normalkugel in grossem Maſsstabe hergestellt, welche man zum praktischen Gebrauche an einer passenden Stelle der Zeichenfläche mit Heftstiften befestigen kann. Die Helligkeiten nehmen auf der Lichtseite vom hellsten Punkte je um $\frac{1}{12}$ ab, somit sind dieselben

für den hellsten Punkt 1
„ die erste Lichtgleiche $\frac{11}{12}$
„ „ zweite „ $\frac{5}{6}$
„ „ dritte „ $\frac{3}{4}$ u. s. f.,

für die Eigenschattengrenze beträgt dieselbe $\frac{1}{6}$. Von der letzteren an nehmen die Helligkeiten der Lichtgleichen um je $\frac{1}{120}$ zu. Dieselben sind also $\frac{7}{40}$, $\frac{11}{60}$, $\frac{23}{120}$, $\frac{1}{5}$. $\frac{5}{24}$, $\frac{13}{60}$ . . . . ., und für den hellsten Punkt im Eigenschatten wie oben, $\frac{1}{4}$. In der Regel reicht man jedoch auf der Lichtseite sowie auf der Schattenseite mit etwa 5 Kurven aus. Nur für Zeichnungen in sehr grossem Maſsstabe dürften mehr Lichtgleichen erforderlich sein.

Die Berührungspunkte der Lichtgleichen mit dem scheinbaren Umriss der Kugel sind durch kleine Querstriche markiert.

4) Lichtgleichen auf einer Cylinderfläche (Fig. 70).

a. Der Cylinder sei gerade, habe eine kreisförmige Grundfläche und stehe auf der ersten Projektionsebene.

Es sei K die zweite Projektion einer Kugel mit ihren Lichtgleichen, welche dem Cylinder einbeschrieben ist, und die Mantelfläche desselben in einem grössten Kreise berührt. Die zweite Projektion des letzteren ist die zur Achse OX parallele Gerade $a_2 b_2$, welche die Lichtgleichen der Kugel in den Punkten 1′, 2′, 3′ . . . schneidet. In jedem dieser Punkte haben Cylinder- und Kugelfläche eine gemeinschaftliche Berührungsebene; folglich auch gleiche Helligkeiten. Da jede Berührungsebene die Cylinderfläche in einer Geraden berührt, so sind diejenigen Seitenlinien der Cylinderfläche, welche durch die Punkte 1′, 2′, 3′ . . . gehen, die gesuchten Lichtgleichen.

Wenn man diese Punkte mit Hülfe einer Normalkugel bestimmen will, so ist zu berücksichtigen, dass zwei Kugeln mit ihren Lichtgleichen ähnliche Figuren sind. Man zieht deshalb durch den Mittelpunkt m_2 der Normalkugel den Durchmesser $f_2 g_2$ parallel OX. Derselbe stellt die Projektion des dem Berührungskreise $a_2 b_2$ ähnlich liegenden Kreises der Normalkugel dar. Die Schnittpunkte I′, II′ . . . von $f_2 g_2$ mit den Lichtgleichen der letzteren sind jetzt die zu 1′, 2′ . . . ähnlich liegenden Punkte. Um dieselben entsprechend auf $a_2 b_2$ zu übertragen, ziehe man die Halbmesser $c_2 d_2$ und $m_2 n_2$

senkrecht zu OX. Legt man nun durch d_2 die Gerade $d_2 1'$ parallel zu $n_2 I'$, so erhält man den Punkt 1′ u. s. f.

Noch besser werden die Lichtgleichen mit Hülfe der ersten Projektion der Normalkugel bestimmt. Die erste Projektion des Kreises $f_2 g_2$ bildet den Umriss, und die ersten Projektionen I, II . . . der Punkte I′, II′ . . . sind

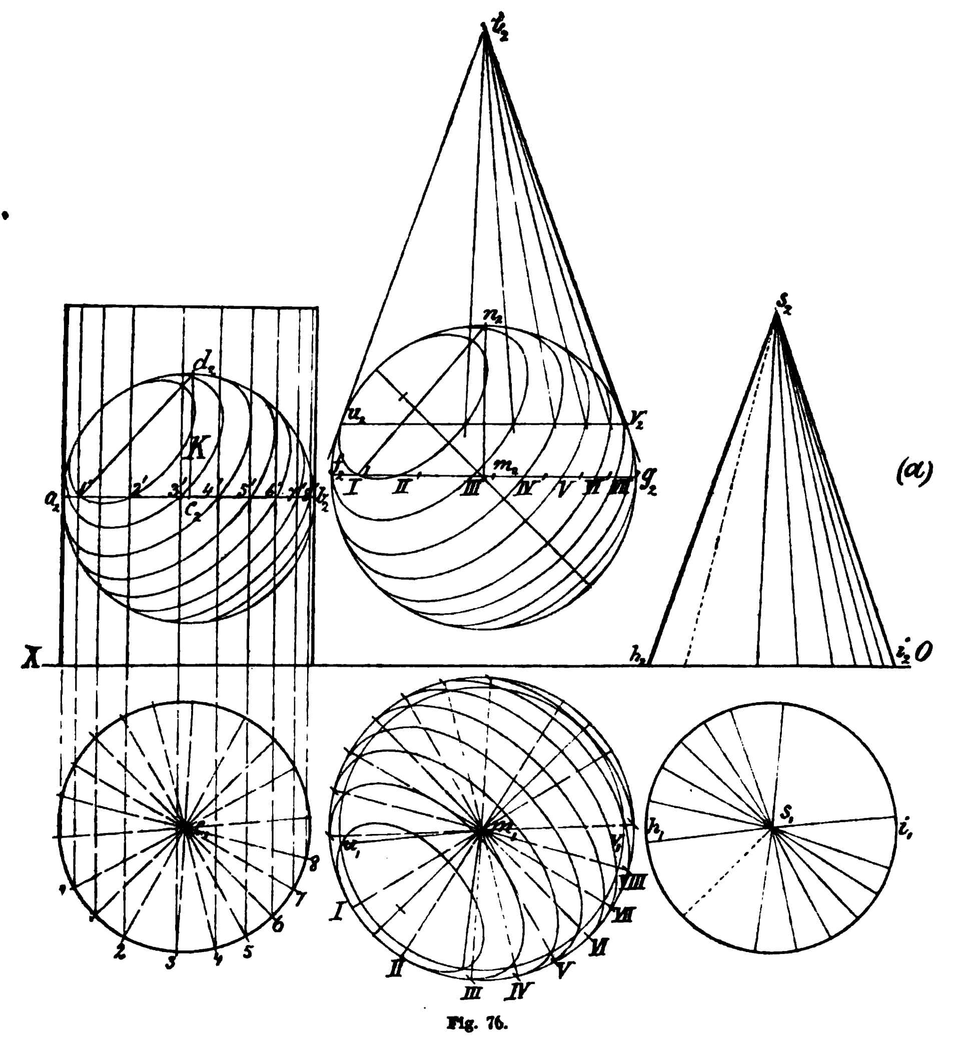


Fig. 76.

nach Fig. 68 ermittelt. Man zieht die Radien $c_1 1$, $c_1 2$, $c_1 3$ . . . bez. parallel zu $m_1 I$, $m_1 II$, $m_1 III$ . . . . Hierdurch erhält man die Punkte 1, 2, 3 . . . der ersten Projektion. Durch Hinaufprojicieren dieser Punkte erhält man die Lichtgleichen der Cylinderflächen in der zweiten Projektion.

b. Der Cylinder liege auf der ersten Projektionsebene.

Anl. zur Aufl. Man lege durch den Mittelpunkt der ersten Projektion der Normalkugel einen Schnitt parallel zur Grundfläche des Cylinders. Derselbe trifft die Lichtgleichen der Normalkugel in Punkten, welche man wie oben auf die Projektion der Grundfläche des Cylinders übertragen kann.

c. Die Lichtgleichen eines geraden auf der ersten Projektionsebene stehenden Cylinders mit elliptischer Grundfläche zu bestimmen.

Anl. zur Aufl. Man lege an den Cylinder Berührungsebenen, welche zu den die Normalkugel in den Punkten I, II, III . . . berührenden Ebenen parallel sind. Dieselben berühren die Cylinderfläche in den gesuchten Lichtgleichen.

d. Man bestimme die Lichtgleichen einer schiefen Cylinderfläche.

5) Lichtgleichen eines geraden Kegels mit kreisförmiger Grundfläche, welcher auf der ersten Projektionsebene steht Fig. 70 (α).

Man lege um die Normalkugel eine berührende Kegelfläche, welche der gegebenen ähnlich und in ähnlicher Lage ist. Die beiden zu $h_2 s_2$ und $i_2 s_2$ parallelen Tangenten $u_2 t_2$ bez. $v_2 t_2$ bilden die äussersten Seitenlinien derselben. Diese Kegelfläche berührt die Normalkugel in einem Kreise, dessen zweite Projektion die zur Achse OX parallele Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte u_2 und v_2 ist. In den Schnittpunkten dieses Kreises mit den Lichtgleichen der Kugel haben Kegel- und Kugelfläche gemeinschaftliche Berührungsebenen, folglich sind die durch diese Schnittpunkte gehenden Seitenlinien die Lichtgleichen der Hülfskegelfläche.

Da nun die beiden Kegelflächen ähnlich sind, so zieht man durch die Spitze s_2 die gesuchten Lichtgleichen parallel zu denjenigen der Hülfskegelfläche.

Hiernach werden alsdann noch die ersten Projektionen der Lichtgleichen bestimmt. Man kann auch die erste Projektion $u_1 v_1$ des Berührungskreises $u_2 v_2$ zeichnen. Die Verbindungslinien von m_1 mit den Durchschnittspunkten dieses Kreises und den Lichtgleichen der Normalkugel sind die ersten Projektionen der Lichtgleichen des Hülfskegels. Die ersten Projektionen der Lichtgleichen des gegebenen Kegels sind dann parallel zu denselben.

Man bestimme hiernach die Lichtgleichen für Fig. 58.

6) Ermittelung der Helligkeiten der ebenen Seitenflächen gegebener Körper mit Hülfe der Normalkugel.

Als Beispiel dient Fig. 71, welche die Projektionen zweier aufeinander gestützten rechtwinkligen Parallelepipeda darstellt.

Um die Helligkeit einer ihrer Lage nach gegebenen Ebene E zu finden, legt man an die Normalkugel eine zu E parallele Berührungsebene. Die Helligkeit des Berührungspunktes derselben ist gleich der Helligkeit der

Ebene E. Der Berührungspunkt ist aber der Endpunkt desjenigen Halbmessers der Kugel, welcher senkrecht zu E steht.

Um hiernach die Helligkeit der Fläche ($a_1 b_1 c_1 d_1$, $a_2 b_2 c_2 d_2$) zu finden, ziehe man die erste Projektion des Halbmessers $m_1 1$ senkrecht zu $a_1 b_1$, welche mit der ersten Spur dieser Fläche parallel ist (s. III, 19, I. Teil). Nun bestimmt man den Neigungswinkel $g_1 f_1 g'$ der Fläche, oder was das-

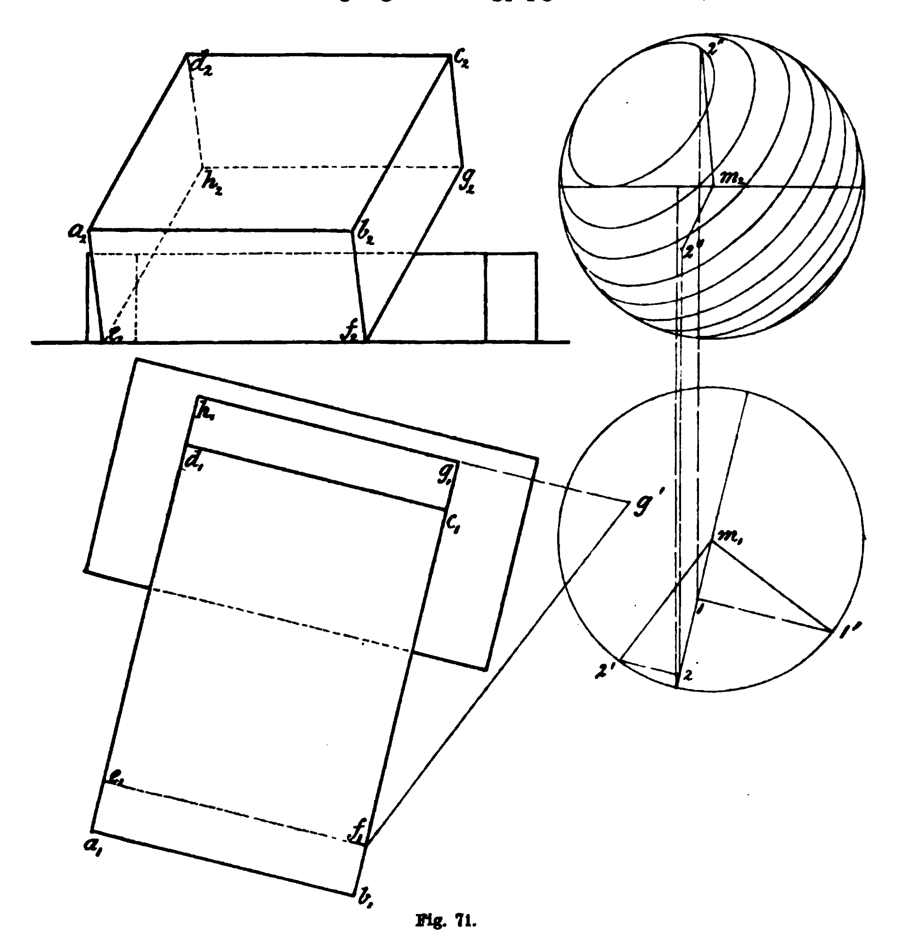


Fig. 71.

selbe ist, derjenigen der zu ihr parallelen Fläche ($e_1 f_1 g_1 h_1$, $e_2 f_2 g_2 h_2$) gegen die erste Projektionsebene, indem man die Höhe des Punktes g_2 über der Achse OX senkrecht zu $f_1 g_1$ nach $g_1 g'$ aufträgt, dann die Gerade $f_1 g'$ zieht. Durch $m_1 1$ legt man eine Ebene senkrecht zu P_1. Diese schneidet die Kugel in einem grössten Kreise, welchen man um seinen zu P_1 parallelen Durchmesser dreht, bis derselbe mit dem Umriss der ersten Projektion zusammenfällt. Zieht man nun $m_1 1'$ senkrecht zu $f_1 g'$, und dreht jetzt den

Kreis wieder in seine vorige Lage zurück, so gelangt 1′ nach 1 (wo die Gerade 1′1 ⊥ m_1 1 steht) und dieser letztere Punkt bezeichnet nun auf der Kugelfläche diejenige Stelle, welche dieselbe Helligkeit wie die Fläche ($a_1 b_1 c_1 d_1$, $a_2 b_2 c_2 d_2$) hat.

In gleicher Weise kann man die Helligkeiten der übrigen Flächen bestimmen. So ist, wie leicht ersichtlich, die Helligkeit der Fläche ($a_1 b_1 f_1 e_1$,

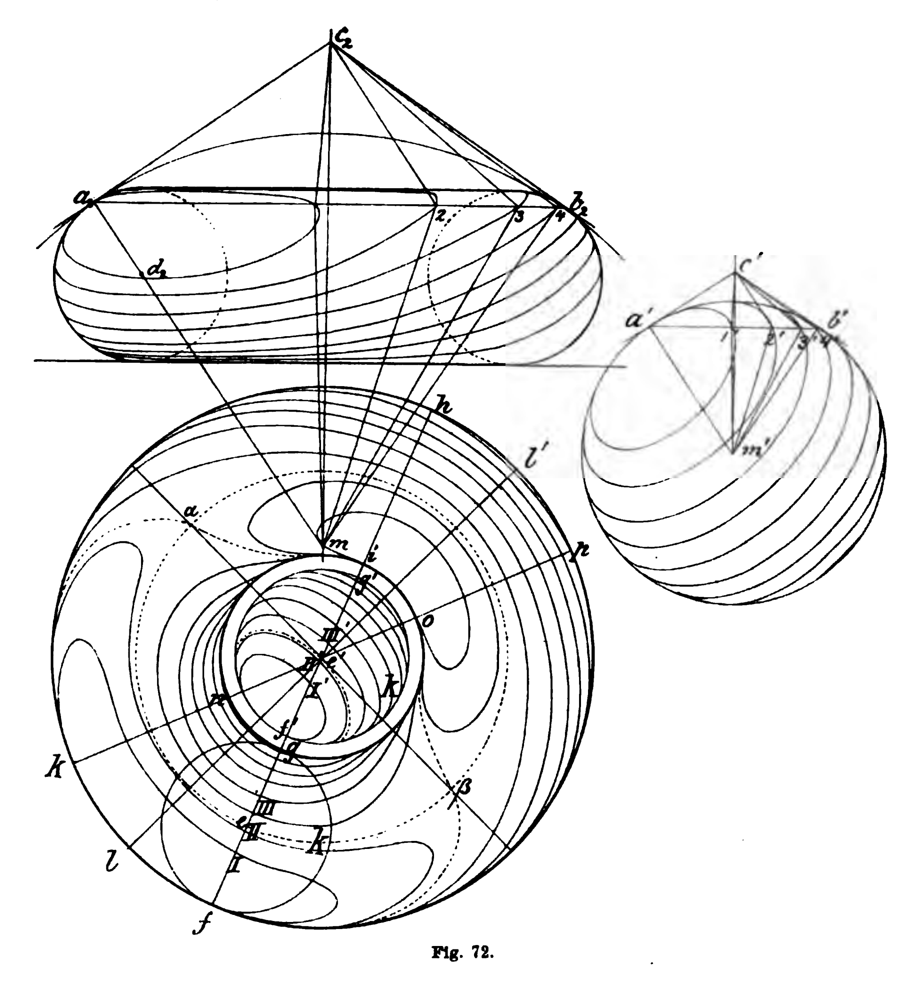


Fig. 72.

$a_2 b_2 f_2 e_2$) derjenigen des Punktes (2, 2″), (wo m_1 2′ ⊥ m_1 1′ und 2′2 ⊥ m_1 2) der Normalkugel gleich. Besonders einfach ist die Ermittelung für solche Flächen, welche senkrecht zu einer der Projektionsebenen stehen. Als Übungsbeispiele dienen die Figuren 32—54.

7) Ermittelung der Lichtgleichen auf Umdrehungsflächen.

a. Lichtgleichen einer Ringfläche (Fig. 72).

Die Umdrehungsachse der Ringfläche stehe senkrecht zu P_1. Es sei $a_2b_2c_2$ die zweite Projektion eines Kegels, welcher den Ring in einem als die Gerade a_2b_2 erscheinenden Kreise berührt. Ebenso sei $a'b'c'$ die Projektion eines die Normalkugel in $a'b'$ berührenden Kegels, welcher dem vorigen ähnlich und in ähnlicher Lage ist. Die Lichtgleichen dieses Kegels sind die von c' nach den Schnittpunkten $1'$, $2'$, 3 . . . gehenden Seitenlinien, und zu diesen sind die Lichtgleichen des Kegels $a_2b_2c_2$ parallel. Die letzteren schneiden a_2b_2 in den Punkten 1, 2, 3 . . ., welche auf der Ringfläche liegen und bez. dieselben Helligkeiten wie die Punkte $1'$, $2'$, $3'$ . . . der Normalkugel haben. In gleicher Weise bestimmt man diejenigen Punkte auf anderen zur Umdrehungsachse senkrechten Schnitten, welchen dieselben Helligkeiten zukommen, und hierdurch endlich die Lichtgleichen der Ringfläche.

Man kann auch statt des Kegels eine, die Ringfläche in a_2b_2 berührende Kugelfläche benutzen. Der Mittelpunkt m liegt in der Verlängerung des zu a_2c_2 senkrechten Halbmessers a_2d_2. Dann sind $a'b'$ und a_2b_2 die Projektionen ähnlich liegender Kreise dieser und der Normalkugel. Demnach findet man auch die zu $1'$, $2'$, $3'$ . . . ähnlich liegenden Punkte 1, 2, 3 . . ., wenn man die Geraden m1, m2, m3 . . . bez. parallel zu $m'1'$, $m'2'$, $m'3'$ . . . zieht.

Aus den zweiten Projektionen dieser Punkte findet man auf bekannte Weise leicht die ersten Projektionen derselben.

Noch besser bestimmt man die ersten Projektionen der Lichtgleichen unabhängig vom Aufriss auf folgende Weise. Wenn eine Kugel, deren Halbmesser demjenigen des Meridians der Ringfläche gleich ist, sich innerhalb der letzteren bewegt, so berührt sie die Ringfläche bei jeder Lage in einem Kreise, welcher senkrecht zu P_1 steht. Ist nun k eine Lage der beweglichen Kugel und der Durchmesser fg die Projektion ihres Berührungskreises mit der Ringfläche, so zeichnet man auf der um den Mittelpunkt e' beschriebenen Kugelfläche k' von gleicher Grösse die Projektion $f'g'$ des ähnlich liegenden Kreises. Der letztere schneidet die Lichtgleichen der Kugel k' in den Punkten I', II', III' . . ., welche man durch einfaches Abmessen nach I, II, III . . . auf fg übertragen kann.

Wie lassen sich diese Punkte auch mit Hülfe der ersten Projektion der Normalkugel finden?

Durch die Gerade ll', welche parallel zur ersten Projektion der Strahlenrichtung durch den Mittelpunkt e' geht, wird die erste Projektion der Ringfläche und diejenige der Kugel k' mit ihren Lichtgleichen bez. in zwei kongruente Teile geteilt. Es ist deshalb ersichtlich, dass man die Punkte I', II', III' . . . auch auf hi, sowie auf kn und op (wenn $\angle ke'l = \angle fe'l$ ist) übertragen kann.

Bemerkenswert ist noch, dass die Ringfläche zwei Lichtgleichen besitzt,

welche sich schneiden. Für alle Lagen der beweglichen Kugel hat der höchste Punkt derselben (dessen Projektion mit e' zusammenfällt) gleiche Helligkeit. Der Ort dieses Punktes ist aber ein um e' als Mittelpunkt gezeichneter Kreis, dessen Halbmesser $e e'$ ist. Legt man ferner durch e' noch eine Lichtgleiche auf k', welche in Fig. 72 durch eine punktierte Ellipse angegeben ist, so entspricht dieser eine Lichtgleiche der Ringfläche (ebenfalls punktiert angedeutet), welche jenen Kreis in zwei Punkten α und β schneidet. Diese beiden Lichtgleichen haben selbstverständlich dieselbe Helligkeit. (Die Gerade $\alpha\beta$ geht durch e' und steht senkrecht zu $l l'$).

b. Der Ring sei hohl; die obere Hälfte ist nicht vorhanden (Fig. 73). In diesem Falle benutzt man für die Darstellung der ersten Projektion die

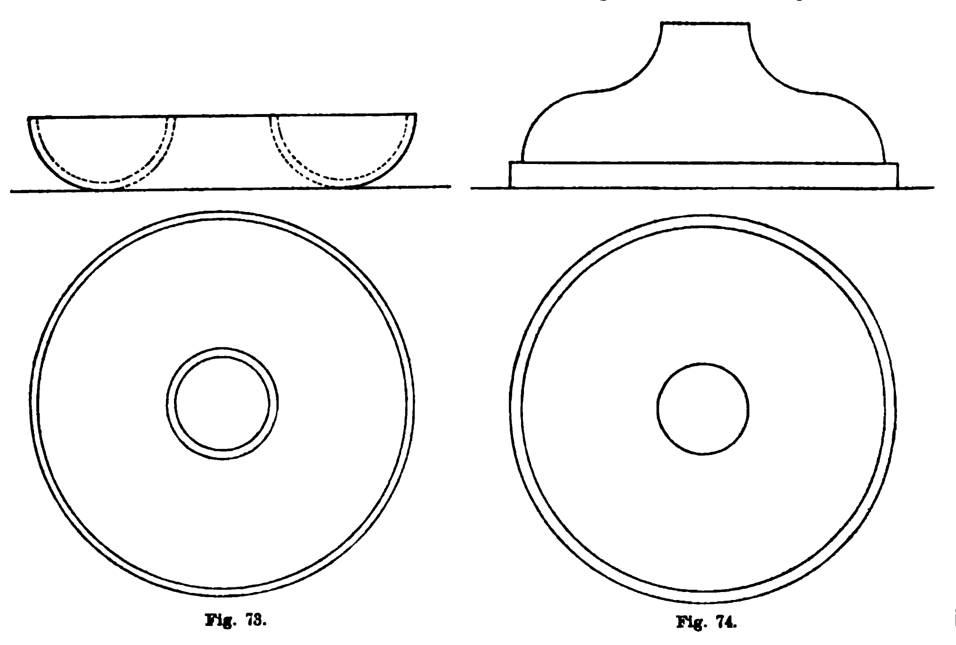


Fig. 73. Fig. 74.

untere Hälfte einer Hohlkugel mit ihren Lichtgleichen. Die letztere erhält man, wie leicht ersichtlich ist, durch Drehung der Normalkugel um 180°, und zwar um denjenigen Durchmesser derselben, welcher senkrecht zu P_1 steht. Bequemer ist es, der Hülfskugel den Durchmesser des Meridians der inneren Ringfläche zu geben, dann findet man die Lichtgleichen auf dieselbe Weise wie in Fig. 72. In der zweiten Projektion sind nur die Lichtgleichen auf der äusseren Ringfläche zu ermitteln, und zwar wie in a. mit Hülfe der Normalkugel.

Der Schlagschatten, welcher auf die Projektionsebenen fällt, wird auf bekannte Weise konstruiert. Zur Bestimmung des inneren Schlagschattens wendet man das in (I, 20, 2. Lösung) angegebene Verfahren an.

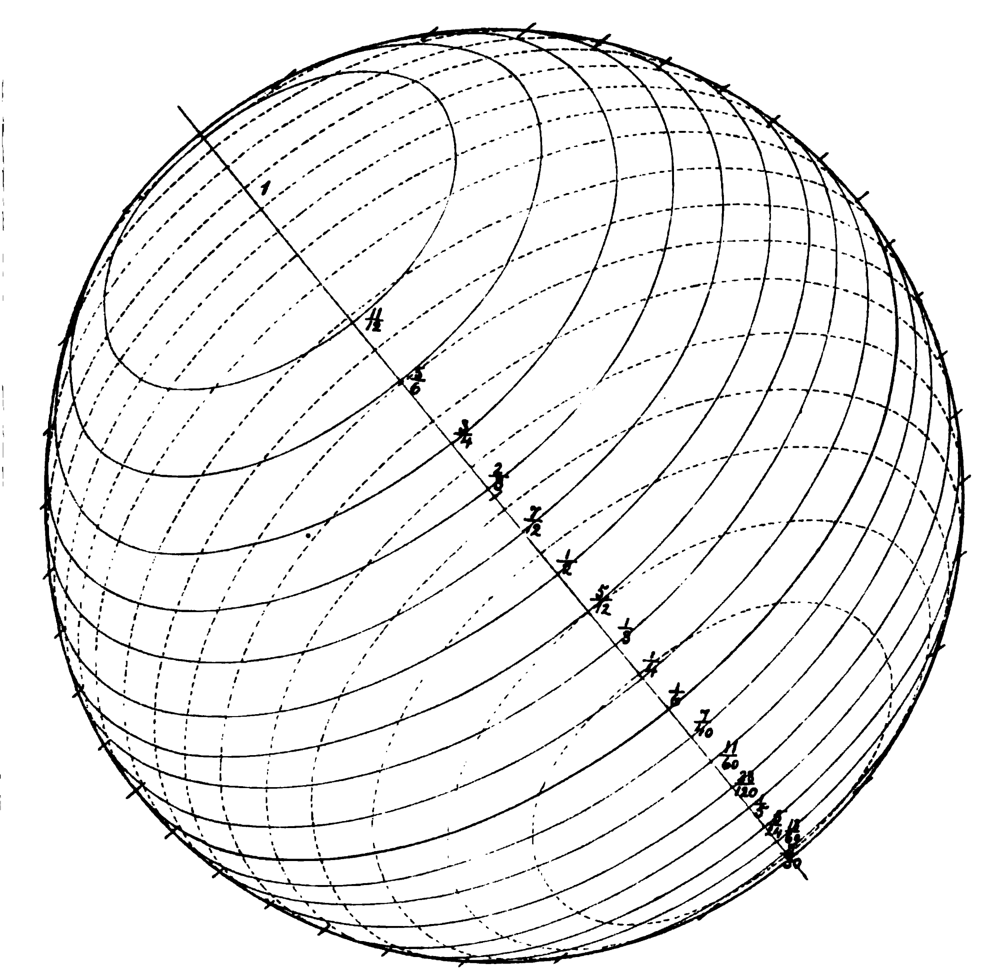


Fig. 69 (s. S. 48).

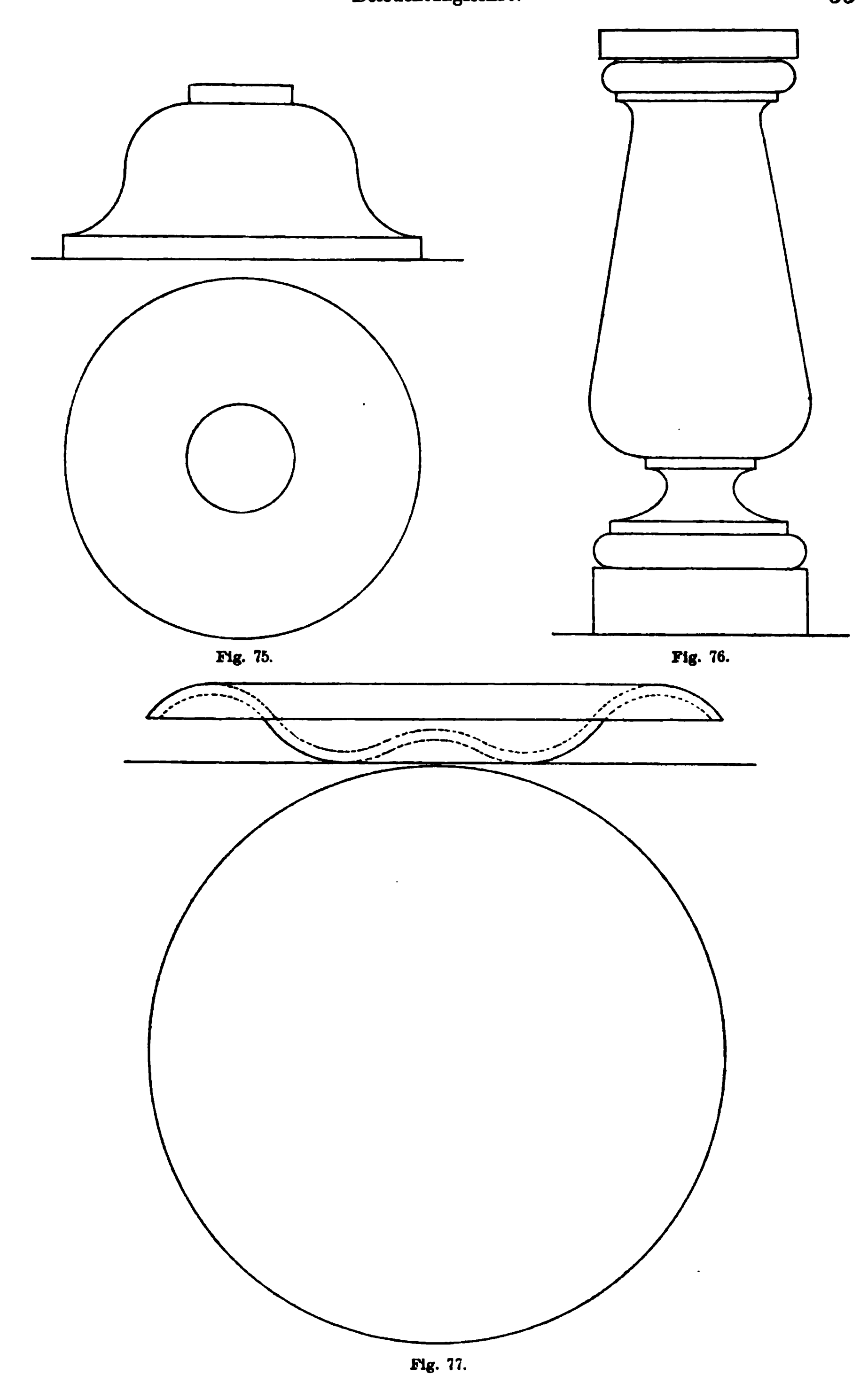


Fig. 75.

Fig. 76.

Fig. 77.

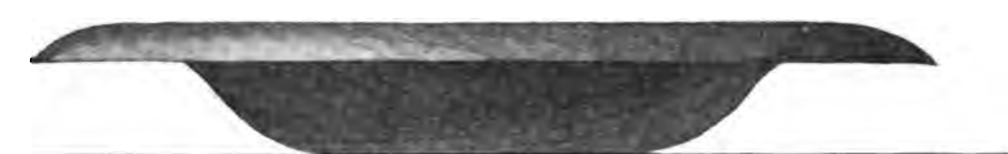


Fig. 77 a.

c. Die Lichtgleichen auf den Oberflächen der in den Figuren 72—78 dargestellten Umdrehungskörper zu finden. (Die Figuren sind in grossem Maſsstabe auszuführen.)

Das Resultat der bei Fig. 77 vorkommenden Schattenkonstruktion und die Darstellung der Lichtverteilung mit Hülfe der Lichtgleichen ist in Fig. 77a angegeben.

8) Die Lichtgleichen auf der in Fig. 79 durch erste und zweite Projektion dargestellten Schraubenröhrenfläche zu finden und die Schlagschatten zu konstruieren. Eine Kugel, deren Durchmesser gleich dem der Röhrenfläche ist, bewege sich innerhalb derselben. Sie wird dann von der letzteren bei jeder Lage in einem grössten Kreise berührt, dessen Neigungswinkel gegen die erste Projektionsebene unveränderlich ist (s. VIII, 19, I. Teil). Infolgedessen erscheint auch die erste Projektion dieses Kreises bei allen Lagen desselben als Ellipse von unveränderlicher Gestalt. Ist $(K_1 K_2)$ diejenige Lage der Kugel, für welche die zweite Projektion des Berührungskreises durch die Gerade $a_2 b_2$ dargestellt wird, so ist die erste Projektion desselben die leicht zu konstruierende Ellipse $a_1 c_1 b_1 d_1$. Die grosse Achse der letzteren geht durch den Mittelpunkt m_1. Bewegt sich die Kugel weiter, so dreht sich diese Ellipse um m_1. Nun sei Q die erste Projektion einer der beweglichen Kugel gleichen Kugel, auf welcher die Lichtgleichen schon bestimmt sind. Man zeichne in Q eine zu $a_1 c_1 b_1 d_1$ kongruente Ellipse $\alpha\beta\delta\gamma$, deren Hauptachsen parallel zu $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$ sind. Diese schneidet die Lichtgleichen der Kugel in Punkten, welche durch Abmessen auf die Fllipse $a_1 c_1 b_1 d_1$ übertragen werden. Durch Veränderung der Lage der beweglichen Kugel kann man hiernach beliebig viele Punkte der gesuchten Lichtgleichen bestimmen. Jede der in Q gezeichneten Ellipsen kann übrigens zweimal benutzt werden. So gilt die in Q angegebene Ellipse $\alpha\gamma\beta\delta$ sowohl für die Bestimmung der Punkte auf $a_1 c_1 b_1 d_1$ als auch auf derjenigen Ellipse $a' c' b' d'$, deren grosse Achse in der Verlängerung von $c_1 d_1$ liegt. Es ist nur zu berücksichtigen, dass bei der ersteren $c_1 b_1 d_1$, und bei der letzteren $c' a' d'$ die Projektion der oberen sichtbaren Hälfte darstellt.

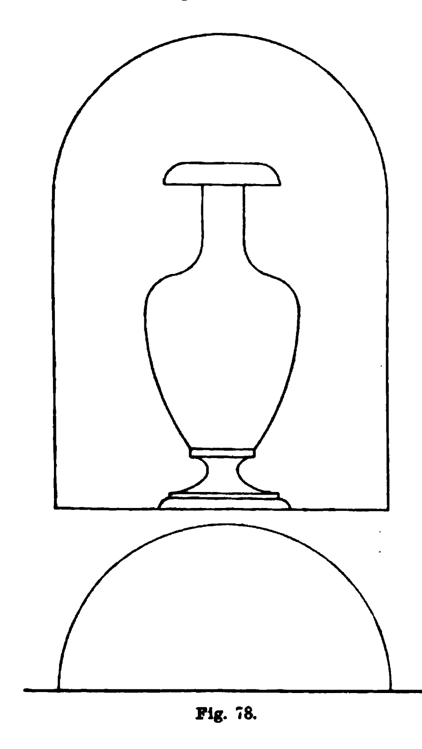


Fig. 78.

Diese etwas umständliche Ausführung der Konstruktion wird man sich bedeutend erleichtern durch Übertragung der Ellipse $a_1 c_1 b_1 d_1$ auf Paus-

papier. Legt man die Pause entsprechend der Lage $a_1\, c_1\, b_1\, d_1$, wie oben angegeben, auf Q, so kann man die Schnittpunkte der Ellipse mit den Licht-

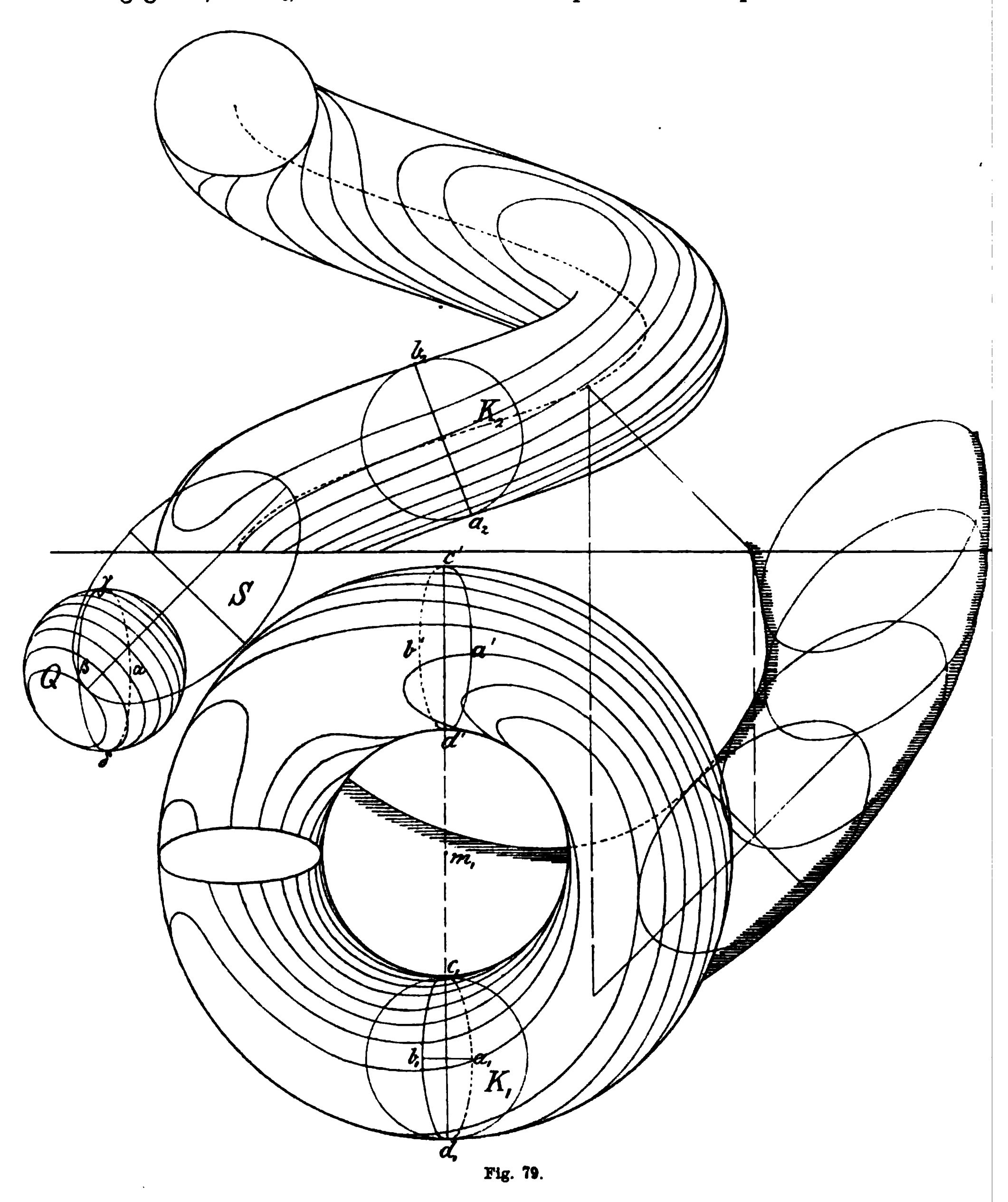


Fig. 79.

gleichen ohne weiteres übertragen. Man sieht dann leicht, dass die übrigen Lagen der Ellipse selbst nicht gezeichnet zu werden brauchen.

Sind nun die Projektionen der Lichtgleichen gefunden, so konstruiert man den Schlagschatten, welchen die Röhrenfläche auf die Projektionsebenen wirft. Derselbe rührt von der Eigenschattengrenze her und kann deshalb punktweise bestimmt werden.

Der Schlagschatten lässt sich auch unabhängig von der Eigenschattengrenze bestimmen. Man konstruiert die Schlagschatten aller der vorhin benutzten Kugeln, welche von der Röhrenfläche eingehüllt werden. Dieselben sind, wenn man zunächst den auf die erste Projektionsebene fallenden Schatten bestimmen will, kongruente Ellipsen von ähnlicher Lage mit dem Schatten S der Kugel Q. Man bestimmt also die Schatten der Mittelpunkte der beweglichen Kugeln und überträgt nun mittelst Pauspapiers die Ellipse S so, dass ihr Mittelpunkt nach und nach auf jene fällt und ihre Achsen stets denen von S parallel bleiben. Die Einhüllende aller dieser Ellipsen ist der gesuchte Schatten auf der ersten Projektionsebene.

In gleicher Weise findet man den Schatten auf der zweiten Projektionsebene, welcher sich übrigens auch wie in (I, 27, Fig. 60) leicht aus dem auf die erste Projektionsebene fallenden Schatten ergiebt.

Endlich bestimme man noch den Schatten, welchen der obere Teil des Rohres auf den näher an der zweiten Projektionsebene liegenden Teil desselben wirft.

Anhang.

Vermischte Aufgaben.

1) Die Schattenkonstruktion für ein Umdrehungsellipsoid auszuführen und zwar:

α. Schlagschatten und Eigenschattengrenze bei endlicher Entfernung der Lichtquelle zu finden.

β. Schlagschatten, Eigenschatten und eine Anzahl von Lichtgleichen bei Beleuchtung durch Parallelstrahlen zu bestimmen.

2) Von einem hohlen Umdrehungsellipsoid, dessen Drehachse senkrecht zu P_1 steht, wird durch eine zu P_2 parallele Ebene die vordere Hälfte abgeschnitten. Man soll den Schlag- und Eigenschatten und die Lichtgleichen der anderen Hälfte bei der Annahme paralleler Strahlen bestimmen. (Elliptisches Gewölbe.)

3) Schlagschatten und Eigenschattengrenze einer Ringfläche zu konstruieren bei endlicher Entfernung der Lichtquelle.

4) Zwei ineinander hängende Ringflächen (Kettenglieder sind gegeben). Man soll die Schattenkonstruktion ausführen und die Lichtgleichen bestimmen.

5) Bei den Umdrehungskörpern (Fig. 94, I. Teil) die Schattenkonstruktion und die Konstruktion der Lichtgleichen auszuführen.

6) Ebenso für ein einfächeriges Umdrehungshyperboloid und für ein Umdrehungsparaboloid die Schattenkonstruktion und diejenige der Lichtgleichen auszuführen.

7) Auf der ersten Projektionsebene P_1 liegt eine spiegelnde Fläche f, welche von einer Ellipse begrenzt ist. Alle Strahlen, welche P_1 innerhalb dieser Ellipse treffen, werden zurückgeworfen und erleuchten einen Teil F der zweiten Projektionsebene. Man soll den Umriss von F konstruieren α. bei Annahme eines gegebenen Punktes L als Lichtquelle; β. für Parallelstrahlen.

Anm. Bei der Zurückwerfung (Reflexion) der Lichtstrahlen bilden der auffallende und der zurückgeworfene Strahl gleiche Winkel mit dem Einfallslot.

8) Dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn die zurückgeworfenen Strahlen nicht auf die zweite Projektionsebene, sondern auf eine Hohlcylinderfläche fallen, deren Achse zu P_1 senkrecht steht.

9) Die Aufgaben (7) und (8) für schiefe Projektion zu lösen.

10) Den Schlagschatten, Eigenschatten und die nötigen Lichtgleichen bei einem Tonnengewölbe zu finden, wenn die Achse desselben parallel zu P_1 ist, aber nicht senkrecht zu P_2 steht.

Leipzig. Druck von Grimme & Trömel.

Lehrbuch

der

Darstellenden Geometrie

von

J. SCHLOTKE

Direktor a. D. der Gewerbeschule in Hamburg

III. Teil

Perspektive

Mit 138 Figuren

Zweite Auflage

Dresden

Verlag von Gerhard Kühtmann

1902

Vorwort.

Der dritte Teil dieses Werkes enthält die Grundzüge der Linearperspektive. Es soll hiermit dem praktischen Zeichner und besonders dem Techniker eine möglichst einfache Darstellung der Konstruktion perspektivischer Zeichnungen dargeboten werden, welche allerdings einige, wenn auch nur wenige Vorkenntnisse der Geometrie beansprucht. Ohne diese ist überhaupt ein wirkliches Studium der Perspektive nicht möglich, wenn man sich nicht mit unverstandenen mechanischen Regeln begnügen will, bei deren Anwendung der Zeichner aber in seiner Unkenntnis leicht den grössten Fehlern ausgesetzt ist.

Es sind allerdings und sogar noch in den letzten Jahren mannigfache Versuche gemacht worden, die Linearperspektive von der, wie es scheint, lästigen mathematischen Begründung frei zu machen, und dieselbe, wie man zu sagen pflegt, rein auf Anschauung zu stützen. Aber diese Versuche sind vergeblich und manche derselben fallen geradezu der Lächerlichkeit anheim. Was soll man sich z. B. bei der Erklärung denken: „Die Grenze zwischen Himmel und Erde heisst der Horizont" oder wie in einem anderen Lehrbuche (welches nach dem eigenen Urteil seines Verfassers nicht mehr übertroffen werden kann) zu lesen ist: „Je weiter ein Gegenstand in die Ferne tritt, desto kleiner wird er nach allen Seiten hin, bis er auf der Horizontlinie sich in einen Punkt vereinigt und unsichtbar wird. Diese Horizontlinie oder kurzweg Horizont genannt, ist für den Zeichner das Wichtigste", u. s. f. Oder: „Steht uns ein rechtwinkliger Gegenstand auf einer seiner Seitenfront gegenüber, das ist parallel mit der Stellung des Zeichners, dann zieht sich die andere sichtbare Seite geometrisch ganz direkt nach hinten, ohne Abweichung nach rechts oder links zurück, was auf dem Papier senkrecht erscheint", u. s. f.

Aus diesen Proben, deren wir noch eine Menge anderer hinzufügen könnten, ist zu ersehen, wohin vollständige Unkenntnis der Sache führt.

Der Anfänger möge deshalb die wenigen, leicht zu fassenden, auf geometrischer Grundlage beruhenden Gesetze der Linearperspektive gründlich studieren. Alles übrige wird ihm bei den Anwendungen alsdann keine Schwierigkeiten mehr bereiten. Das letztere gilt namentlich für den technischen Zeichner, welcher ohnehin durch die Kenntnis der Darstellenden Geometrie besser auf das Studium der Linearperspektive vorbereitet ist.

Die im Buche enthaltenen Anwendungen auf grössere Beispiele sollen nur als Anleitung dienen.

Zu selbständigen Übungen wird man am besten aus der eigenen Umgebung Beispiele wählen und dieselben nach Aufnahme durch Messung perspektivisch darzustellen suchen. In erster Linie kommt für die eigentliche Konstruktion die Darstellung solcher Gegenstände in Betracht, welche von Ebenen oder gesetzmässig gestalteten krummen Flächen begrenzt sind, also Gebäude, Innenansichten von Treppen, Gewölben u. s. w. Doch ist eine genaue Kenntnis der Perspektive, auch für das Zeichnen landschaftlicher Motive u. s. w., wobei man allerdings nicht mehr konstruiert, das wichtigste Hülfsmittel für naturwahre Darstellung.

Der Vollständigkeit wegen sind noch Anwendungen auf Vogelperspektive, auf das Zeichnen stereoskopischer Figuren, und auf die Herstellung von Panoramen, sowie endlich die Grundzüge der Reliefperspektive hinzugefügt worden.

Der Verfasser.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Der zweiten Auflage sind ausser einigen Verbesserungen auch noch mehrere neue Aufgaben hinzugefügt. Zu weiteren Änderungen lag zunächst keine Veranlassung vor.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

1) Die Perspektive ist derjenige Teil der Darstellenden Geometrie, welcher die Herstellung der Abbildungen räumlicher Gebilde auf einer Ebene (Bildfläche) lehrt, vorausgesetzt, dass das Auge in endlicher Entfernung von dem abzubildenden Gegenstand und von der Bildfläche sich befindet. Da nach der Einleitung des I. Teiles des Werkes eine Abbildung durch Projicieren aller Ecken, Kanten etc. des Gegenstandes von dem Punkte aus entsteht, in welchem das Auge postiert ist, so folgt, dass die Abbildungen in diesem Falle Centralprojektionen sind. Demnach werden in der Perspektive diejenigen Hilfsmittel aufgesucht, welche zur Konstruktion der Centralprojektionen erforderlich sind; zugleich zieht die Perspektive besonders diejenigen Eigenschaften der letzteren in den Kreis ihrer Untersuchungen, welche für das Zeichnen von hervorragender Wichtigkeit sind.

Es soll nun zunächst an einem einfachen Beispiel die Herstellung der Centralprojektion eines Gegenstandes erläutert werden. Die Projektion ist bestimmt, wenn die Lage des Auges (Projektionscentrum), die Lage der Bildfläche, ferner diejenige des abzubildenden Gegenstandes und die Dimensionen des letzteren gegeben sind. Man bedient sich zur Darstellung derselben am besten der im I. Teile erörterten geraden Parallelprojektionen, deren Kenntnis in der Perspektive vorausgesetzt wird.

Es seien Q_1 und Q_2, Fig. 1, erste bez. zweite Projektion eines rechtwinkligen Parallelepipedums; A_1 und A_2 ebenso die Projektionen des Punktes A, in welchem sich das Auge befindet (Augenpunkt). Die Bildfläche sei ein Rechteck, welches senkrecht zu den beiden ersten Projektionsebenen steht, so dass die Projektionen desselben die beiden zur Achse OX senkrechten Geraden OY und OZ sind (Grundlinie und Höhe des Rechtecks).

Man ziehe nun von einem beliebigen Eckpunkte, z. B. von (a_1, a_2) den Strahl $(a_1 A_1, a_2 A_2)$ nach dem Augenpunkte; derselbe schneidet die Bildfläche in einem Punkte M, dessen Projektionen m_1 und m_2 sind. Durch diese beiden Projektionen ist die Lage des Punktes M bestimmt. In gleicher Weise findet man die Durchschnitte aller übrigen Strahlen mit der Bildfläche.

Um nun die eigentliche Abbildung des Parallelepipedums in ihrer wahren Gestalt darzustellen, legt man die Bildfläche auf die Zeichenfläche so, dass die Grundlinie OY nach O′Y′, die Höhe OZ nach O′Z′ gelangt. Den vorhin bestimmten Punkt M erhält man, wenn man $O'm_1' = Om_1$ macht und

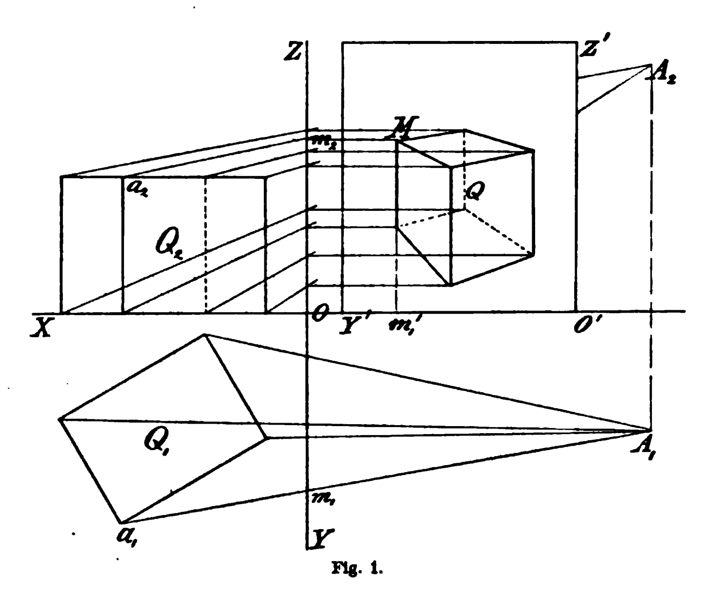


Fig. 1.

in m_1' die Gerade $m_1'M = Om_2$, senkrecht zu O′Y′ aufträgt. Werden nun in gleicher Weise die Abbildungen der übrigen Ecken bestimmt, so ergiebt sich hieraus leicht die in Fig. 1 dargestellte Abbildung Q des Parallelepipedums.

Dieses Verfahren, welches man die „Durchschnittsmethode" zu nennen pflegt, ist das einfachste, sich gleichsam von selbst darbietende Mittel, um perspektivische Abbildungen herzustellen. Wir empfehlen dem Anfänger, zur eigenen Übung und zur zweckmäfsigen Vorbereitung auf das Studium der später zu entwickelnden perspektivischen Gesetze, die Abbildungen der in den Figuren 2—4 durch Grund- und Aufriss dargestellten Gegenstände in gleicher Weise zu konstruieren. Fast scheint es, als ob hiermit die Lehre von der Konstruktion perspektivischer Abbildungen erledigt wäre. Dies würde auch wirklich der Fall sein, wenn dieselbe nichts weiter bezweckte, als die gleichsam mechanische Zusammensetzung einer Abbildung durch Bestimmung der Durchschnittspunkte aller nötigen Sehstrahlen mit der Bildfläche. Das genauere Studium der Eigenschaften perspektivischer Abbildungen ist aber erforderlich, um einerseits möglichst einfache Wege zur Herstellung derselben kennen zu lernen, andererseits um grössere Sicherheit des Urteils über die Richtigkeit von Zeichnungen zu erlangen.

2) Scheinbare Grösse und scheinbarer Umriss eines Gegenstandes.

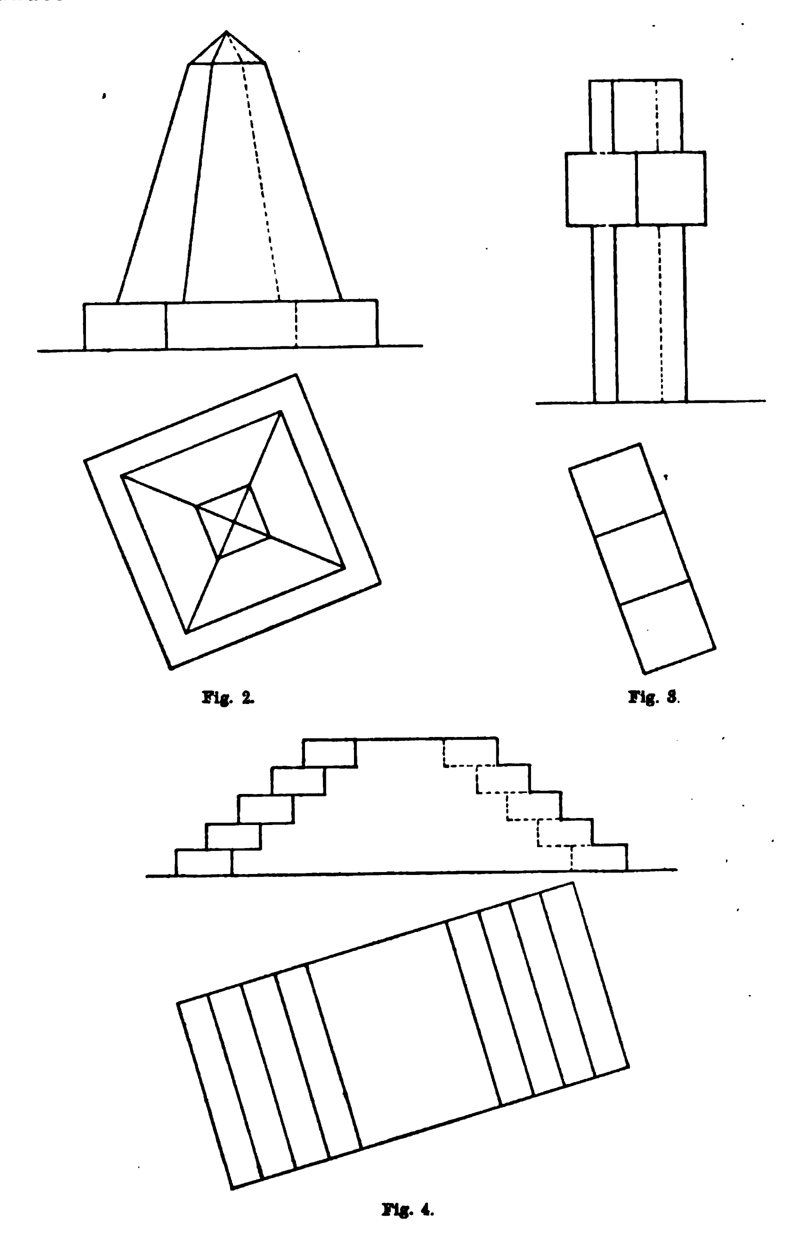


Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Es seien $(d_1 e_1, d_2 e_2)$ (Fig. 5) die Projektionen einer zur ersten Projektionsebene P_1 senkrechten Geraden; A_1 und A_2 die Projektionen des Augenpunktes und OY sowie OZ diejenigen der zu P_1 senkrecht stehenden Bild-

fläche. Wir nehmen an, dass die durch die Gerade ($d_1 e_1$, $d_2 e_2$) und durch den Augenpunkt gelegte Ebene senkrecht zur Bildfläche, also auch parallel zu P_2 sei. Zieht man nun von den Endpunkten der Geraden die Sehstrahlen nach dem Augenpunkte, so schliessen diese einen Winkel ein,

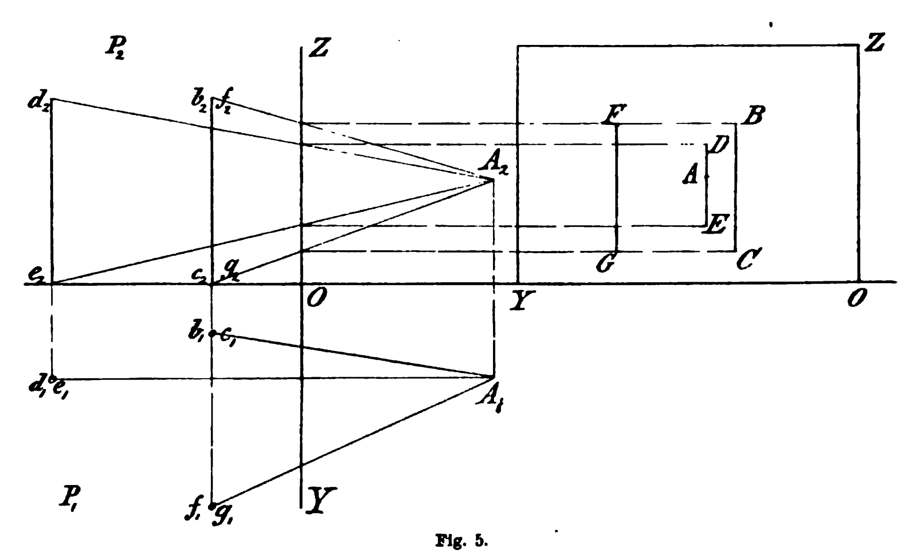


Fig. 5.

dessen zweite Projektion $d_2 A_2 e_2$ die wahre Grösse desselben darstellt. Man nennt diesen Winkel, unter welchem die Gerade dem Auge erscheint, den Sehwinkel. Nach der Grösse desselben pflegt man sich ein Urteil über die Länge der Linie, oder über ihre Entfernung vom Auge zu bilden. Ist z. B. ($b_1 c_1$, $b_2 c_2$) eine andere Gerade von gleicher Länge mit ($d_1 e_1$, $d_2 e_2$), welche aber dem Auge näher liegt, so ist der Sehwinkel $d_2 A_2 e_2$ kleiner als der Winkel $b_2 A_2 c_2$. Man schliesst hieraus beim Betrachten der beiden gleich langen Geraden, dass ($d_1 e_1$, $d_2 e_2$) weiter vom Augenpunkt entfernt sein muss als die erstere. Legt man die Bildfläche in die Zeichenfläche nieder, so findet man wie in 1) BC und DE als die Abbildungen der beiden Geraden. Auf DE liegt nach der oben gemachten Annahme die Projektion A des Augenpunktes.

Den Winkel, welchen die beiden Sehstrahlen nach den Endpunkten einer Geraden einschliessen, nennt man auch wohl die scheinbare Länge der letzteren. Die Astronomen bezeichnen z. B. den Winkel, unter welchem der Durchmesser eines Gestirns erscheint als den scheinbaren Durchmesser desselben. So ist z. B. der scheinbare Durchmesser der Sonne ca. 0° 32′ 16″; derjenige des Mondes ca. 0° 31′; der scheinbare Durchmesser des Jupiters in Erdnähe ca. 49″ in Erdferne, ca. 30″ u. s. f.

Es sei in Fig. 5 ($f_1 g_1$, $f_2 g_2$) eine dritte Linie, welche ebenfalls zu P^1 senkrecht steht, und deren zweite Projektion mit $b_2 c_2$ zusammenfällt. Die letztere Bedingung sagt, dass beide Geraden alsdann gleichen Abstand von

der Bildfläche haben. Dagegen ist der Abstand der neuen Geraden vom Auge, wie aus der ersten Projektion hervorgeht, grösser als derjenige der Geraden ($b_1 c_1$, $b_2 c_2$). Folglich erscheint sie unter einem kleineren Sehwinkel. Konstruiert man aber die Abbildung FG der Geraden, so ergiebt sich aus dem Zusammenfallen der zweiten Projektionen der Sehstrahlen, dass dieselbe der Abbildung BC an Länge gleich wird. Hierin scheint ein Widerspruch zu liegen, insofern als die Abbildungen zweier Geraden, welche verschiedene scheinbare Länge haben, doch gleich gross sein können. Man sieht aber leicht, dass die Abbildungen BC und FG dem senkrecht über A befindlichen Auge ebenfalls unter verschiedenen Sehwinkeln erscheinen, nämlich unter denjenigen, welche die scheinbaren Längen der abgebildeten Linien angeben.

Es möge hier noch eine Bemerkung angeknüpft werden. Man pflegt wohl zu sagen, ein Gegenstand müsse so gezeichnet werden, wie er dem Auge erscheint. Streng genommen ist nun der Sachverhalt etwas anders, wie wir hier an einem Beispiel näher erläutern wollen.

Betrachtet man eine Kugel von einem beliebigen Punkte A aus, so bilden alle Sehstrahlen, welche die Kugel berühren, den Mantel eines geraden Kegels, dessen Achse der von A nach dem Mittelpunkte der Kugel gehende Strahl ist. Nun berührt jener Kegelmantel die Oberfläche der Kugel in einem Kreise, dessen einzelne Punkte sämtlich vom Augenpunkte A gleichen Abstand haben, und die Ebene dieses Kreises steht senkrecht zu der Achse des Kegels. Für das Auge bildet dieser Kreis den äussersten sichtbaren Umriss der Kugel, und weil alle Durchmesser desselben unter gleichen Winkeln von A aus gesehen werden, so muss der Eindruck derjenige einer völligen Gleichförmigkeit aller einzelnen Teile des Umrisses sein. In dieser Hinsicht kann man also sagen, der Umriss einer Kugel erscheint dem Auge, welches die letztere von einem beliebigen Punkte aus betrachtet, stets als Kreis.

Wird nun zwischen Kugel und Auge eine Bildfläche aufgestellt, so ist als Abbildung des Umrisses der Kugel der Durchschnitt des von den Sehstrahlen gebildeten Kegelmantels mit der Bildfläche zu zeichnen. Die Abbildung kann demnach nur ein Kreis werden, wenn die Bildfläche senkrecht zur Achse des Kegelmantels steht. In allen anderen Fällen wird aber die Abbildung des Umrisses eine Ellipse*). Die letztere hat alsdann die Eigenschaft, dass ihre sämtlichen Durchmesser von A aus unter gleich grossen Winkeln erscheinen. Wenn demnach der Umriss einer Kugel dem Auge auch stets als Kreis erscheint, so muss als Abbildung doch im allgemeinen eine Ellipse gezeichnet werden. Diese geht nur in dem oben angegebenen besonderen Falle in einen Kreis über.

*) Vergl. IV, 4, I. Teil.

Dass bei den Abbildungen anderer Gegenstände ähnliche Betrachtungen angestellt werden können, wird dem aufmerksamen Leser im Laufe der weiteren Entwicklungen von selbst klar werden.

3) Zur ferneren Begründung der Linearperspektive ist die Kenntnis einiger Gesetze über gerade Linien und Ebenen erforderlich, welche wir hier kurz zusammenstellen, um gelegentlich darauf verweisen zu können.

α. Ist eine Gerade G parallel zu einer in der Ebene E liegenden Geraden, so ist auch G parallel zu E.

β. Ist eine Gerade G parallel zu einer Ebene E, so wird E von jeder durch G gelegten Ebene in einer zu G parallelen Geraden geschnitten.

γ. Legt man durch jede von zwei parallelen Geraden eine Ebene, so ist die Durchschnittslinie dieser Ebenen jenen Geraden parallel.

δ. Steht eine Gerade G senkrecht zu einer Ebene E, so steht sie auch senkrecht zu allen in E liegenden Geraden.

ε. Steht eine Gerade G senkrecht zu einer Ebene E, so steht auch jede durch G gehende Ebene senkrecht zu E.

η. Stehen zwei Ebenen E_1 und E_2 senkrecht zu einer dritten Ebene E_3, so steht auch die Durchschnittslinie von E_1 und E_2 senkrecht zu E_3.

4) Abbildung gerader Linien.

Zur Feststellung der Lage eines abzubildenden Gegenstandes beziehen wir dieselbe auf die Bildfläche (vertikale Ebene) und auf eine zu dieser senkrecht stehenden Ebene, welche die „Horizontalebene" genannt werden mag. Die Durchschnittslinie beider heisst die Achse.

Hiernach lassen sich nun leicht die folgenden Fundamentalgesetze über die Abbildungen gerader Linien nachweisen.

α. Die Abbildung einer zur Horizontalebene senkrechten Geraden ist eine Gerade, welche senkrecht zur Achse steht (Fig. 6).

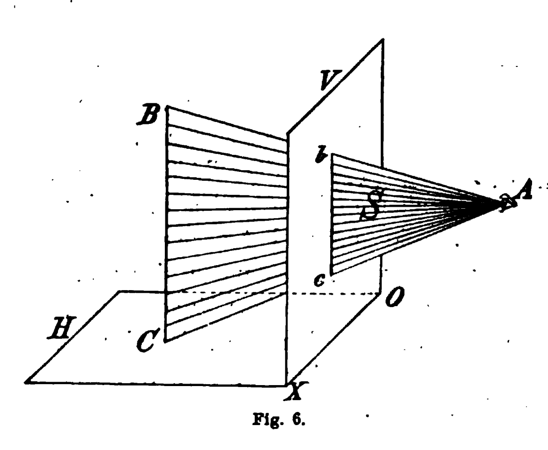


Fig. 6.

Beweis. BC stehe senkrecht zur Horizontalebene H; A sei der Augenpunkt. Zieht man von allen Punkten der abzubildenden Geraden Sehstrahlen nach A, so bilden diese eine Ebene S, welche die Ebene der Sehstrahlen genannt wird. Nach 3) ε. steht nun S senkrecht zu H, und da die Bildfläche V ebenfalls ⊥ H ist, so folgt aus 3) η., dass die Durchschnittslinie bc

von S und V senkrecht zu H, folglich auch senkrecht zur Achse OX steht. bc ist aber die Abbildung (Centralprojektion) von BC.

β. Die Abbildung einer zur Achse OX parallelen Geraden ist eine Gerade, welche ebenfalls parallel zu OX ist (Fig. 7).

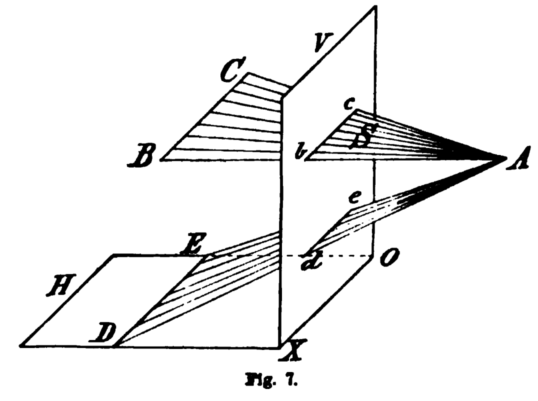


Fig. 7.

Die Gerade BC sei parallel zu OX, dann ist sie nach 3) α. auch parallel zur Bildfläche V. Die Ebene S der durch BC und A gehenden Sehstrahlen schneidet nun nach 3) β. die Bildfläche V in einer zu BC parallelen Geraden bc, welche die Abbildung von BC ist. Da bc || BC || OX, so ist auch

bc || OX.

Ist DE eine zweite zu OX parallele Gerade, so ist auch ihre Abbildung de || OX; folglich ist auch de || bc.

γ. Die Abbildung einer zur Bildfläche parallelen Geraden ist eine Gerade, welche der abgebildeten Geraden parallel ist (Fig. 8).

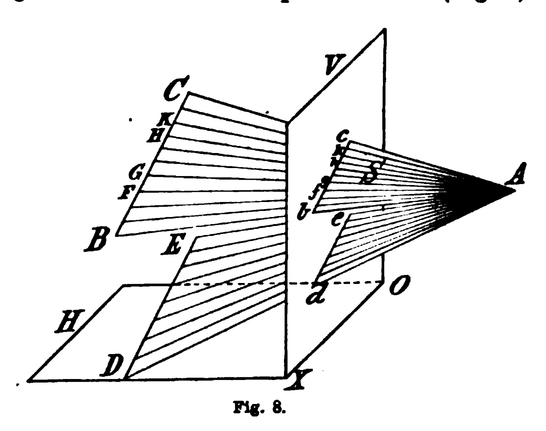


Fig. 8.

BC sei parallel zur Bildfläche V. Nach 3) β. schneidet nun die Ebene S der Sehstrahlen die Bildfläche in der zu BC parallelen Geraden bc und diese ist die Abbildung von BC.

Ist ferner DE parallel zu V, so ist auch die Abbildung derselben, nämlich de || DE. Wäre gleichzeitig DE noch parallel zu BC, so würde auch de || bc sein. Hieraus folgt: Die Abbildungen solcher Geraden, welche unter sich und zugleich parallel zur Bildfläche sind, müssen untereinander parallel sein.

Hiernach wird also die Abbildung eines sehr langen und schmalen Rechtecks (z. B. die Vorderfronte eines Gebäudes von grosser Länge), welches parallel zur Bildfläche ist, wieder ein Rechteck sein. Die Abbildungen der Abstände zweier parallelen Seiten desselben sind demnach stets dieselben, wie weit sich die abgebildeten Geraden auch vom Auge entfernen

mögen (s. 2). Ferner ergiebt sich hieraus noch leicht, dass die Abbildung einer ebenen Figur F, welche parallel zur Bildfläche ist, der F ähnlich sein muss. Dies folgt ausserdem auch aus dem stereometrischen Satze, dass parallele Schnitte eines pyramidalen Raumes ähnliche Figuren sind.

Anmerkung. Sind FG und HK zwei gleich lange Strecken der Geraden BC, so sind nach dem geometrischen Satze, dass Strahlen, welche durch einen Punkt gehen, auf parallelen Geraden proportionierte Stücke abschneiden, die Abbildungen fg und hk jener Strecken ebenfalls unter sich gleich.

δ. Die Abbildung einer beliebigen Geraden geht durch den Schnittpunkt derselben mit der Bildfläche, und sie ist nach dem Punkte gerichtet, in welchem der vom Augenpunkt ausgehende jener Geraden parallele Strahl die Bildfläche trifft (Fig. 9).

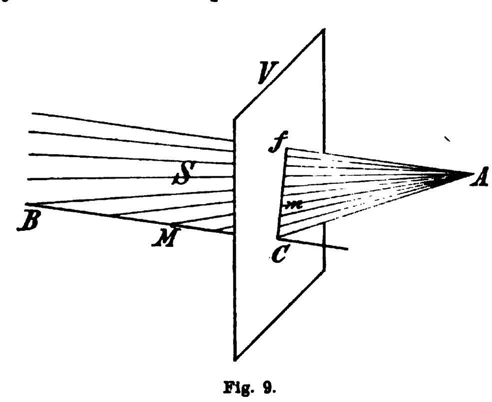


Fig. 9.

Die abzubildende Gerade BC treffe die Bildfläche V in C. Legt man durch den Augenpunkt und durch BC die Ebene S der Sehstrahlen, so enthält diese auch eine durch A gehende und zu BC parallele Gerade Af. Die letztere schneide die Bildfläche in f; dann ist Cf als Durchschnittslinie der Sehstrahlenebene S mit der Bildfläche die Abbildung von BC.

Ist M ein beliebiger Punkt auf BC, so liegt dessen Abbildung m im Durchschnitt des Strahles AM und der Abbildung Cf. Rückt man M auf BC in immer grössere Entfernung von der Bildfläche, so nähert sich m dem Punkte f und erreicht denselben, wenn M unendlich weit entfernt liegt. Der Punkt f ist deshalb die Abbildung des unendlich fernen Punktes und Cf die Abbildung der unendlich langen Geraden BC.

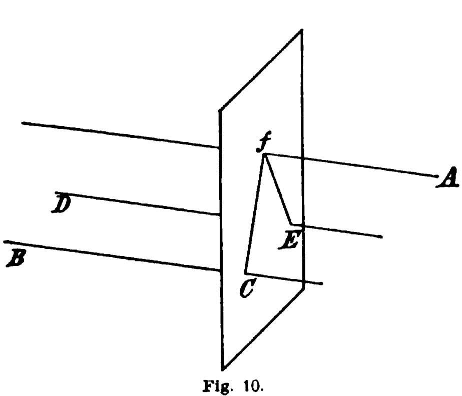


Fig. 10.

Man nennt f den Fluchtpunkt und C die Spur der Geraden BC.

Sind BC und DE zwei parallele Geraden, C und E die Spuren derselben und Af der vom Augenpunkt ausgehende Parallelstrahl, so ist der Schnitt-

punkt f des letzteren mit der Bildfläche der Fluchtpunkt für beide Geraden. Parallele Geraden haben deshalb einen gemeinsamen Fluchtpunkt. Die Abbildungen der Abstände der beiden Parallelen werden deshalb um so kleiner ausfallen, je grösser die Entfernungen derselben von der Bildfläche genommen werden.

Die unter α, β und γ aufgestellten Gesetze sind offenbar specielle Fälle des letzten allgemeinen Satzes. Dennoch dürfte eine eingehendere Besprechung der drei ersten Gesetze zweckmässig sein, dagegen überlassen wir die Herleitung derselben aus dem vierten Gesetze der eigenen Übung.

I. Abschnitt.

Konstruktion perspektivischer Abbildungen.

1) Hauptpunkt, Horizont, Distanzpunkte.

Nach den in der Einleitung entwickelten Fundamentalgesetzen können wir nun zu den für die Perspektive erforderlichen Konstruktionsmitteln übergehen. Hierzu dienen zunächst bestimmte Punkte und Geraden auf der Bildfläche, durch welche die Lage des Augenpunktes festgestellt wird.

Zieht man vom Augenpunkt A′ (Fig. 11) die Gerade A′A senkrecht zur Bildfläche V, so heisst diese Gerade der Hauptstrahl. Der Durchschnitt A

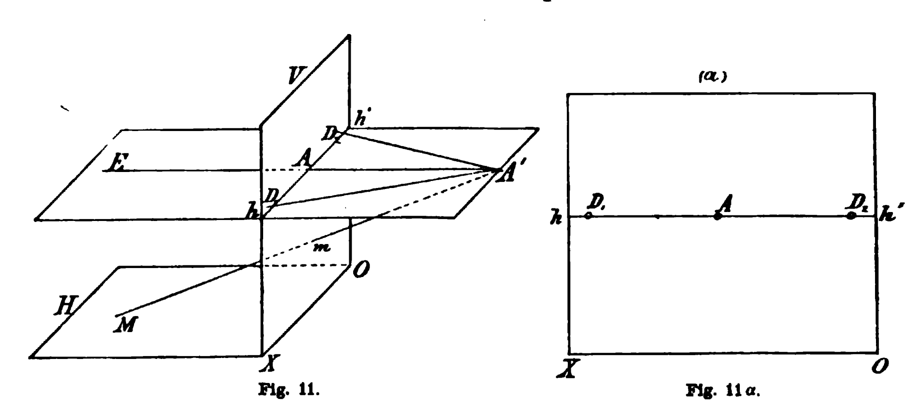


Fig. 11. Fig. 11 α.

des Hauptstrahles mit der Bildfläche wird der Hauptpunkt genannt. Eine durch den Augenpunkt parallel zur Horizontalebene gelegte Ebene E schneidet die Bildfläche in einer Geraden hh′, welche durch den Hauptpunkt geht und parallel zur Achse OX ist. Diese Gerade wird der Horizont genannt. Auf der letzteren trägt man vom Hauptpunkte aus die Entfernung AA′ zu beiden Seiten ab, wodurch man zwei Punkte D_1 und D_2 erhält, so dass also $AD_1 = AD_2 = AA'$; diese beiden Punkte heissen Distanzpunkte.

Wird die Bildfläche V wie bei (α) in Fig. 11 auf die Zeichenfläche niedergelegt, so erscheint sie in wahrer Gestalt. Ist alsdann A der Hauptpunkt, hh′ der Horizont, OX die Achse, D_1 der eine und D_2 der andere

Distanzpunkt, so ist hierdurch die Lage des Augenpunktes in Bezug auf Bildfläche und Horizontalebene völlig bestimmt. Man hat sich in (α) den Augenpunkt senkrecht über A in der Entfernung AD_1 von der Zeichenfläche vorzustellen. Die Höhe des Augenpunktes über der Horizontalebene ist gleich dem Abstand des Horizonts von der Achse.

2) Der Hauptpunkt A ist der Fluchtpunkt aller zur Bildfläche senkrechten Geraden.

Der Hauptstrahl ist der Parallelstrahl für alle zur Bildfläche senkrecht stehenden Geraden, folglich ist sein Schnittpunkt mit der Bildfläche nach Einleitung 4) δ. der Fluchtpunkt für jene Geraden.

3) Der Horizont ist der Ort der Fluchtpunkte für alle horizontalen Geraden (d. h. für solche Geraden, welche entweder in der Horizontalebene liegen, oder parallel zu ihr sind).

Der von A ausgehende Parallelstrahl einer horizontalen Geraden ist ebenfalls parallel zur Horizontalebene. Folglich liegt er in der durch A gelegten Ebene E der Fig. 11 und trifft deshalb die Bildfläche auf dem Horizont hh'.

4) Die beiden Distanzpunkte sind die Fluchtpunkte aller horizontalen Geraden, welche mit der Bildfläche einen Winkel von 45° bilden.

Zieht man die Geraden $A'D_1$ und $A'D_2$ (Fig. 11), so sind die Dreiecke $AA'D_1$ und $AA'D_2$ rechtwinklig bei A und weil $AD_1 = AA' = AD_2$, so sind dieselben auch gleichschenklig. Folglich ist $\angle AD_1A' = \angle AD_2A' = 45°$. Hiernach sind $A'D_1$ und $A'D_2$ die vom Augenpunkte ausgehenden Parallelstrahlen für alle horizontalen Geraden, welche nach der einen oder andern Seite unter 45° gegen die Bildfläche geneigt sind. Folglich sind D_1 und D_2 die Fluchtpunkte dieser Geraden.

5) Die Abbildung m eines in der Horizontalebene liegenden Punktes M (Fig. 11) liegt offenbar stets zwischen Achse und Horizont. Wird der Punkt M in der Horizontalebene mehr und mehr von der Bildfläche entfernt, so nähert sich die Abbildung m dem Horizont. Bei unendlicher Entfernung des Punktes M von der Bildfläche wird demnach m in den Horizont fallen. Man schliesst hieraus, dass der Horizont selbst als Abbildung der unendlich fernen Geraden der Horizontalebene zu betrachten ist. Die Abbildung der bis ins Unendliche erweiterten Horizontalebene (diese Erweiterung auf der dem Augenpunkte entgegengesetzten Seite der Bildfläche genommen), umfasst demnach den zwischen der Achse und dem Horizont liegenden Teil der Bildfläche.

Mit Hilfe des Hauptpunktes, des Horizonts und der Distanzpunkte lassen sich nun perspektivische Abbildungen in anderer Weise, wie in der Einleitung gezeigt wurde, konstruieren. Diese Konstruktionen gewähren, wie

wir sehen werden, einen klareren Einblick in die Gesetzmässigkeit der perspektivischen Darstellungen.

6) Die Abbildung eines Punktes M ist der Durchschnitt der Abbildungen zweier durch M gehenden Geraden (Fig. 12).

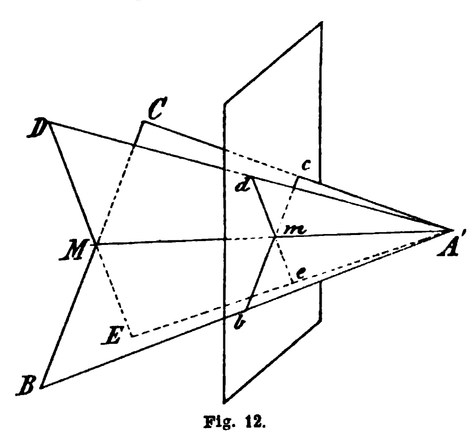


Fig. 12.

Sind BC und DE zwei beliebige durch M gehende Geraden, bc und de ihre Abbildungen, ferner A'BC und A'DE die Ebenen der Sehstrahlen für die Linien BC und DE, so schneiden sich die letzteren in dem von A' nach M gehenden Strahl. Da nun die Durchschnittslinien von drei Ebenen sich bekanntlich in einem Punkte treffen, so liegt der Schnittpunkt m des Strahles A'M und der Bildfläche auch auf bc und de. m ist aber die Abbildung des Punktes M.

7) Abbildung eines in der Horizontalebene liegenden Punktes (Fig. 13).

Bei dieser wie bei allen folgenden Aufgaben ist die Lage des Augenpunktes durch Hauptpunkt, Horizont, Achse, Distanzpunkt stets gegeben.

Es sei M der auf der Horizontalebene gegebene Punkt, dessen Abbildung zu bestimmen ist. Wir erläutern nun zuerst mit Hilfe der schiefen Projektion (Fig. 13α) den räumlichen Vorgang und leiten hieraus die Konstruktion auf der ebenen Zeichenfläche ab. Nach (6) legt man durch M zwei Geraden und bestimmt deren Abbildungen. Wir ziehen Ma senkrecht zur Bildfläche, dann ist a die Spur und A nach (2) der Fluchtpunkt dieser Geraden. Die Abbildung derselben fällt hiernach in die Verbindungslinie der Punkte a und A. Zieht man ferner die Gerade

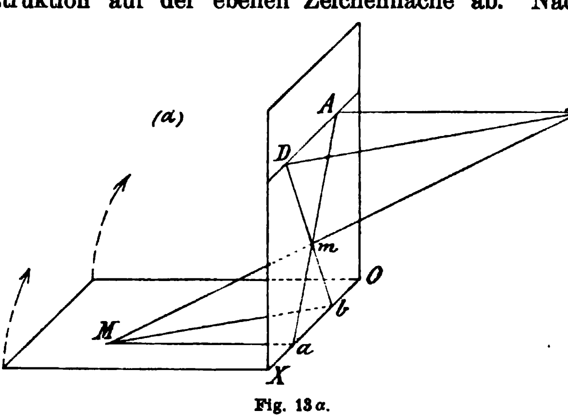


Fig. 13α.

Mb in der Horizontalebene unter einem Winkel von 45° gegen die Achse OX (parallel zu A'D), so ist nach (4) der Distanzpunkt D der Fluchtpunkt, und b ist die Spur der Geraden, folglich liegt die Abbildung von Mb in bD. Da nun die Abbildung des Punktes M sowohl auf aA als

auch auf bD liegen muss, so fällt sie mit dem Schnittpunkt m dieser beiden Geraden zusammen. Hieraus ergiebt sich, dass zur Bestimmung der Abbildung des Punktes M der Sehstrahl von M nach dem Augenpunkte A′ nicht benutzt zu werden braucht.

Zur Ermittelung der Abbildung m auf der in die Zeichenfläche niedergelegten Bildebene (Fig. 13β) drehe man in (α) die Horizontalebene um die Achse OX (in dem Sinne wie die Pfeilspitzen andeuten), bis sie mit der Bildfläche zusammenfällt. Nach der Drehung verschiebt man die Horizontalebene derart abwärts, dass jeder Punkt derselben sich senkrecht zur Achse OX bewegt, und zwar soweit, bis die auf der Bildfläche und auf der Horizontalebene zu zeichnenden Linien sich nicht mehr störend durchkreuzen. In Fig. 13 (β) ist die so verschobene Horizontalebene durch das Rechteck OXX′O′ angegeben; die Verschiebung ist soweit fortgesetzt, bis der abzubildende Punkt M unterhalb OX liegt. Die beiden Geraden Ma und Mb in (α) nehmen in (β) die Lagen Ma′ und Mb′ an, wo Ma′ ⊥ O′X′ und Mb′ unter einem Winkel von 45° gegen die Achse geneigt ist. Man sieht nun leicht, dass Ma′b′ die wahre Gestalt des Dreiecks Mab in (α) und somit Ma′ den wahren Abstand des Punktes M von der Bildfläche darstellt.

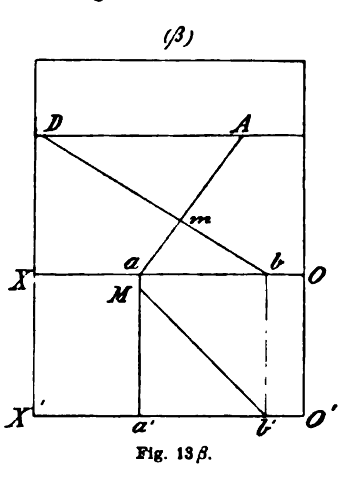


Fig. 13β.

Um nun in (β) die Abbildung des Punktes M zu finden, denkt man sich die Horizontalebene wieder hinaufgeschoben, bis O′X mit OX zusammenfällt. Die beiden Punkte a′ und b′ bewegen sich auf den zur Achse OX senkrechten Geraden a′a bez. b′b und gelangen schliesslich nach a bez. b. Diese beiden Punkte stellen die in (α) angegebenen, ebenfalls mit a und b bezeichneten Spuren der durch M gezogenen Hilfslinien dar, deren Fluchtpunkte A bez. D sind. Man zieht also die Geraden Aa und Db, welche sich dann in m, der gesuchten Abbildung des Punktes M schneiden.

Selbstverständlich kann man auf gleiche Weise die Abbildung m mit Hilfe des anderen Distanzpunktes bestimmen, welcher rechts vom Hauptpunkte liegt.

Das Dreieck abm ist die perspektivische Abbildung des Dreiecks abM (welches in (β) durch a′b′M dargestellt ist). Da ferner ab = a′b′ = a′M, so kann man m auch finden, wenn man von der Spur a aus die Entfernung a′M auf OX nach ab abträgt; dann schneidet die Verbindungslinie von b nach D die Gerade Aa in m.

Jede Gerade, welche von einem Punkte der Achse nach dem Haupt-

punkt geht, kann als Abbildung einer in der Horizontalebene liegenden und zur Bildfläche senkrechten Geraden angesehen werden. Nach dem vorigen kann man ferner die Abbildung eines Punktes M, welcher auf dieser Geraden im Abstand k von der Bildfläche liegt, ohne Benutzung der Horizontalebene finden. Ist aA (Fig. 14) die Abbildung der Geraden (a die Spur, der Hauptpunkt A der Fluchtpunkt derselben), so trage man von a aus die Strecke ab = k ab und ziehe bD (D Distanzpunkt), dann schneidet letztere die Gerade aA in der gesuchten Abbildung m. Sind c, d ... beliebige andere Punkte der Achse, so schneiden ebenso die Geraden cD, dD ... die gegebene Gerade aA in Punkten m′, m″ ..., welche Abbildungen solcher Punkte sind, deren Abstände von der Bildfläche den Strecken ac, bez. ad ... gleich sind. Ist ab = bc = cd = ..., so stellen am, mm′, m′m″ ... die Abbildungen gleich langer Strecken der gegebenen Geraden dar.

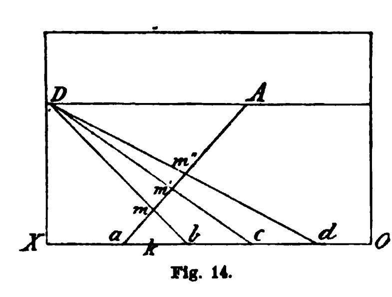


Fig. 14.

Es ist nützlich, wenn man sich die wahre Gestalt der in der Horizontalebene liegenden Figur vergegenwärtigt, welche in Fig. 14 abgebildet ist. Sie wird durch Fig. 15 dargestellt. Die Geraden bm, cm′, dm″ ... sind die Abbildungen der Parallelen bM, cM′, dM″..., welche unter 45° gegen die Achse OX geneigt sind.

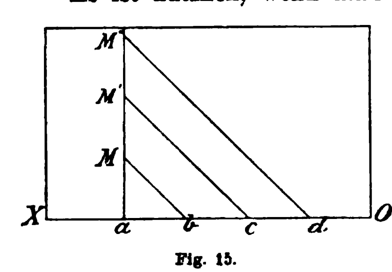


Fig. 15.

Die Lösungen folgender Aufgaben werden hiernach leicht zu finden sein:

α. Von einem auf aA gegebenen Punkte m aus ist eine Strecke von gegebener Länge abzutragen. Die Abbildung dieser Strecke zu finden.

β. Eine auf aA gegebene Strecke MN ist in eine gegebene Anzahl gleicher Teile zu teilen. Man soll die Abbildungen der Teilpunkte angeben.

8) Abbildung eines in der Horizontalebene liegenden Rechtecks BCEF zu finden, wenn die Seiten BF und CE mit der Achse OX parallel sind (Fig. 16).

Man verlängere die Seiten BC und EF, welche der gemachten Annahme zufolge auf OX senkrecht stehen, bis sie O′X′ in G′ und H′ schneiden. Die beiden letzteren Punkte werden auf OX nach G und H projiciert, dann sind G und H die Spuren der zur Bildfläche senkrechten Seiten des Rechtecks. Die Abbildungen der letzteren liegen in den von G und H nach dem Hauptpunkte A, dem gemeinsamen Fluchtpunkte, gehenden Geraden. Zieht man noch BJ′

und CK′ unter einem Winkel von 45° gegen O′X′ und projiciert J′ und K′ nach J und K auf OX (oder, was dasselbe ist, macht man GJ = BG′ und GK = CG′) und zieht von J und K die Geraden JD und KD nach dem Distanzpunkte D, so schneiden die letzteren die Gerade GA in den Abbildungen b und c der beiden Eckpunkte B und C. Nach Einleitung 4 (β) sind ferner die Abbildungen bf und ce der Geraden BF und CE parallel zur Achse, wodurch sich dann die Eckpunkte e und f ebenfalls leicht ergeben.

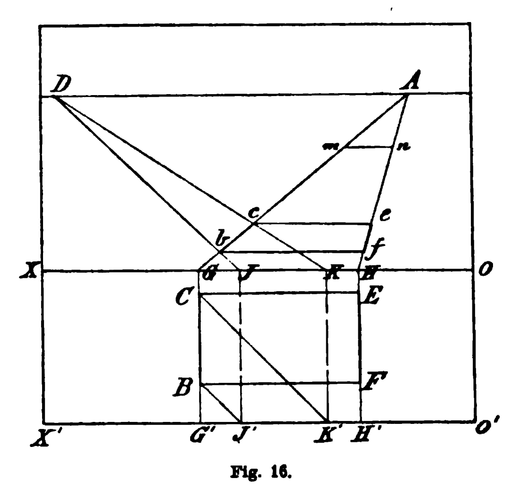


Fig. 16.

Jede zur Achse parallele Gerade, z. B. mn, welche zwischen GA und HA liegt, stellt die Abbildung einer in der Horizontalebene liegenden Geraden von der gleichen Länge wie BF vor, welche ebenfalls parallel zur Achse ist.

Aus dem vorhergehenden ergeben sich leicht die Lösungen folgender Aufgaben:

α. Auf der Abbildung einer zur Achse parallelen und in der Horizontalebene liegenden Geraden von einem gegebenen Punkte aus die Abbildung einer Strecke von gegebener Länge l zu bestimmen.

β. Die wahre Länge einer zur Achse parallelen und in der Horizontalebene liegenden Geraden aus ihrer perspektivischen Abbildung zu finden.

9) **Die Abbildung eines in der Horizontalebene liegenden Quadratnetzes** (z. B. Parketfussboden eines Zimmers) **soll konstruiert werden, wenn die Seiten der einzelnen Quadrate teils senkrecht, teils parallel zur Achse sind** (Fig. 17).

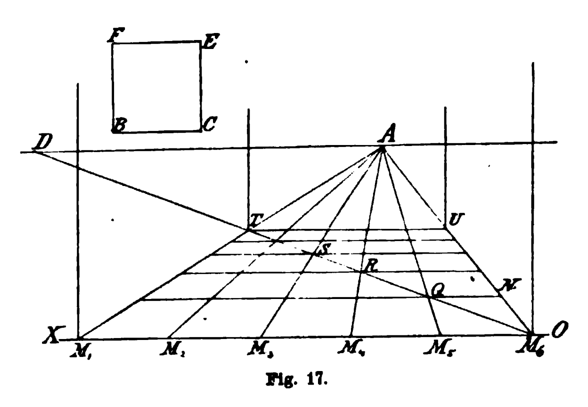


Fig. 17.

Stellt BCEF die wahre Grösse eines der quadratischen Felder dar und nehmen wir an, dass die erste Quadratreihe unmittelbar an der Achse liegt, so erhält man durch mehrmaliges Auftragen der Quadratseite BC auf OX leicht die Spuren M_1,

M_2, M_3 ... der zur Achse senkrechten Seiten des Netzes. Die Abbildungen der letzteren sind von den Spuren nach dem Hauptpunkte A gerichtet. Da jede Diagonale eines Quadrats mit der Seite desselben, folglich auch mit der Achse OX, einen Winkel von 45° bildet, so sind die beiden Distanzpunkte die Fluchtpunkte der beiden Scharen der Diagonalen. Man zieht demnach, wenn wie in Fig. 17 der links vom Hauptpunkt A liegende Distanzpunkt D gegeben ist, die Gerade M_6D. In dieser liegt die Abbildung M_6Q der einen Diagonale des ersten Quadrats rechts. Dieselbe schneidet M_5A in Q und durch diesen Punkt zieht man die Abbildung NQ der vierten Seite des Quadrats parallel zur Achse OX (Einleitung 4, β). Durch die Verlängerung von NQ wird nun die an der Achse liegende Quadratreihe vervollständigt. Ferner erkennt man leicht, dass M_6D die Seiten M_4A, M_3A ... in den Punkten R, S ... schneidet, durch welche die noch fehlenden zu OX parallelen Seiten der Abbildung des Quadratnetzes gezogen werden können.

Wie würde man die Abbildungen noch mehrerer hierauf folgenden Quadratreihen bestimmen können?

Nach Einleitung 4 (γ) schneiden die Geraden M_1A, M_2A, M_3A ... auf jeder der zur Achse parallelen Seiten des Quadratnetzes unter sich gleiche Stücke ab.

Anmerkung. Es ist in Fig. 17 auffällig, dass die äusserste Reihe der Abbildungen der einzelnen Felder starke Verzerrungen zeigt, welche auf den Beschauer nicht den Eindruck vollkommener Richtigkeit machen. Da ferner die Anzahl der Quadrate, welche an der Achse OX liegen, gleich der Anzahl derjenigen an M_1A ist, so stellt auch M_1TUM_6 die Abbildung eines Quadrates vor. Nun wird man aber beim aufmerksamen Betrachten der Fig. 17 die Empfindung haben, als wäre M_1TUM_6 die Abbildung eines Rechtecks, dessen grössere Seite nicht M_1M_6, sondern diejenige Seite, welche senkrecht zur Bildfläche steht, und durch die Strecke M_1T abgebildet ist. Der Grund dieser Erscheinung liegt in der zu klein gewählten Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche; die anscheinende Verzerrung verschwindet, wenn man die Abbildung aus dem für dieselbe gewählten Augenpunkte betrachtet. In Fig. 18 ist die Abbildung desselben Fussbodens für die doppelte Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche dargestellt, welche die starken Verzerrungen der Fig. 17 nicht besitzt.

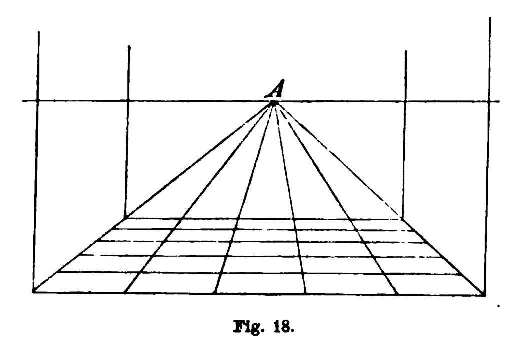


Fig. 18.

Das Nähere über die scheinbar zu starken Verzerrungen findet man in IV, 1.

10) Die Abbildung eines Fussbodens mit regelmässigen achteckigen Feldern zu konstruieren. Die vordere Reihe der Rechtecke liege unmittelbar an der Achse (Fig. 19).

Es sei bcdefghi eines der gegebenen Achtecke. Man zeichne um dasselbe das Quadrat klmn und konstruiere wie in 9 die perspektivische Abbildung eines Quadratnetzes, dessen einzelne Quadrate die Grösse klmn haben. Um auf den Abbildungen der Quadratseiten die Eckpunkte der achteckigen Felder zu bestimmen, zieht man die zur Achse OX senkrechten Geraden ch und dg, deren Abbildungen von h bez. g nach dem Hauptpunkte A gerichtet sind. Diese schneiden auf denjenigen Geraden des Netzes, welche parallel zur Achse sind, eine Reihe von Eckpunkten der achteckigen Felder ab. Diejenigen Seiten der Achtecke, welche nicht in die Seiten des Quadratnetzes fallen, sind unter 45° gegen die Achse OX geneigt. Ihre Abbildungen sind deshalb teils nach D_1, teils nach D_2 gerichtet und können hiernach leicht gefunden werden.

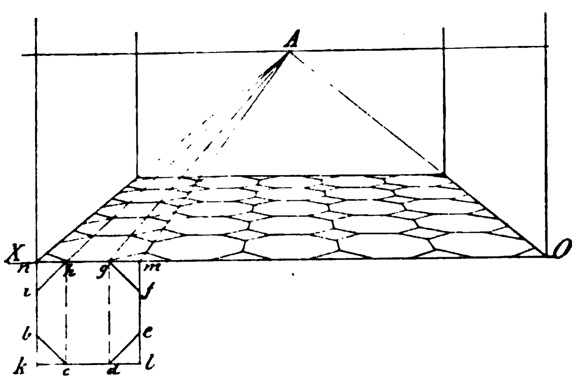


Fig. 19.

Damit die Achtecksreihen an den äusseren Rändern keine übermässigen Verschiebungen zeigen, nehme der Anfänger die Entfernung eines Distanzpunktes vom Hauptpunkte mindestens gleich der $1\,^1/_2$ bis 2fachen Breite des ganzen Fussbodens an. Man wird übrigens leicht bemerken, dass zur Konstruktion einer der beiden Distanzpunkte ausreichend ist.

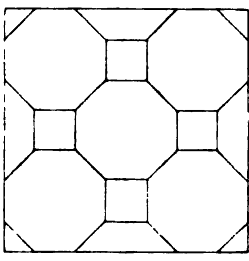
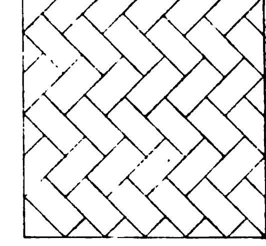



Fig. 20.

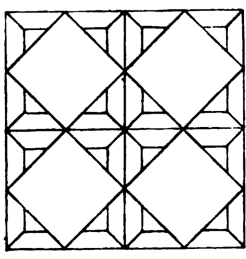
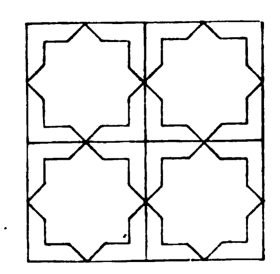



Fig. 21.

Zur eigenen Übung konstruiere man die perspektivischen Abbildungen einiger Fussböden mit den in den Fig. 20 und 21 dargestellten Feldern. Die bei diesen Figuren vorkommenden Geraden sind entweder senkrecht oder parallel zur Achse oder

unter einem Winkel von 45° gegen dieselbe geneigt, ihre Abbildungen werden deshalb leicht mit Hilfe der vorigen Entwickelungen gefunden.

11) In Fig. 22 ist noch ein Beispiel angegeben, in welchem mehrere Scharen von Parallelen auftreten, die weder den Hauptpunkt, noch einen der Distanzpunkte als Fluchtpunkt haben. Dem Muster des Fussbodens liegt wieder ein Quadratnetz zu Grunde, dessen Abbildung man zuerst wie

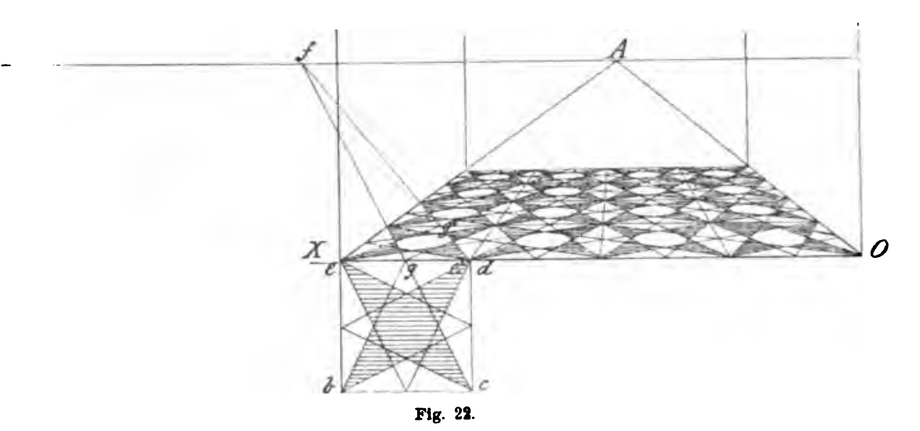


Fig. 22.

bei den vorigen Beispielen konstruiert. Die in die Quadrate eingezeichneten Sterne werden von Linien gebildet, welche von einer Quadratecke nach der Mitte einer der nicht durch diese Ecke gehenden Quadratseiten gezogen werden können. Da alle diese Linien in der Horizontalebene liegen, so haben alle, welche einer Schar von Parallelen angehören, einen auf dem Horizont liegenden Fluchtpunkt. Ist z. B. c′g′ die Abbildung von cg, so schneidet c′g′ verlängert den Horizont im Punkte f, dem Fluchtpunkte der Geraden cg und aller zu derselben Parallelen.

12) Abbildung eines Fussbodens mit regelmässigen sechseckigen Feldern (Fig. 23).

Es sei abcdef eines der Felder, welches mit der Seite bc an der Achse O′X′ (Grundriss) liegt. Man ziehe durch die Ecken die Geraden gg′, bb′, cc′ und mm, senkrecht zur Achse. Diese treffen OX in den Punkten g′, b′, c′ und m′. Die hierdurch entstandenen Abschnitte g′b′, b′c′ und c′m′ = b′g′ trage man, wie in Fig. 23 angegeben, auf der Achse OX entsprechend weiter nach rechts ab und ziehe von den Teilpunkten m′, c′, b′, g′ .... Geraden nach dem Hauptpunkte A, welche alsdann die Abbildungen jener Hilfslinien sind. Auf diesen liegen die Abbildungen sämtlicher Eckpunkte des Netzes. Zieht man ferner durch die Ecken der Felder Parallelen zur Achse OX (Grundriss), so schneiden diese auf der zur Achse senkrechten Grenzlinie gg′ des Fussbodens gleiche Teile ag = ag′ u. s. w. ab, deren Abbildungen wie in Fig. 14 bestimmt werden. Man trägt die Strecke

ag von g′ aus beliebig viele Male nach rechts auf O′X′ ab und zieht von den erhaltenen Teilpunkten 1, 2, 3, . . . Geraden nach dem Distanzpunkte D. Die letzteren schneiden auf g′A die Abbildungen jener Teilstrecken ab. Zieht man durch die so erhaltenen Punkte a′, k′ . . . Parallelen

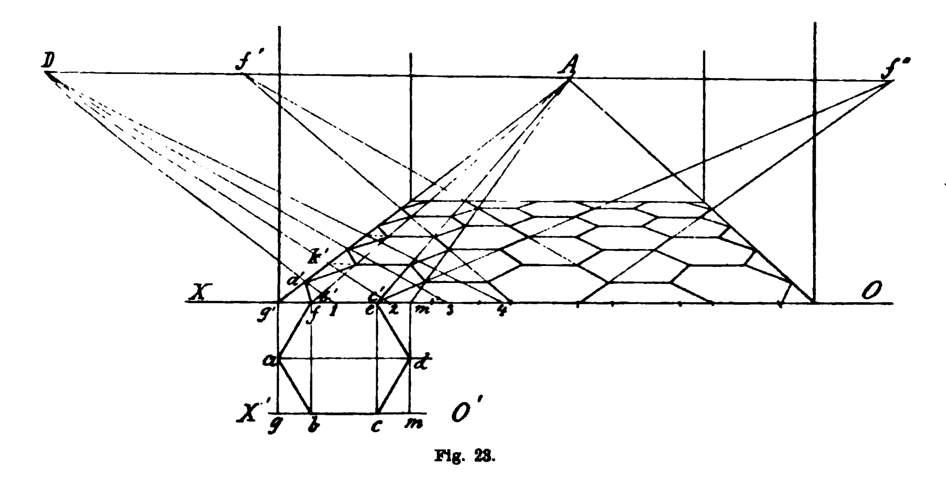


Fig. 23.

zur Achse, so sind diese die Abbildungen derjenigen Geraden, in welchen die zu OX parallelen Seiten der Sechsecke liegen. Hierdurch sind nun sämtliche Ecken des Netzes bestimmt. Unter den Seiten der Sechsecke giebt es zwei Scharen paralleler Geraden, deren Fluchtpunkte f′ und f″ auf dem Horizont gleichweit vom Hauptpunkt entfernt liegen. Man findet sie zunächst, wenn man eine Gerade jeder Schar bis zum Durchschnitt mit dem Horizont verlängert. Es ist vorteilhaft, diese beiden Fluchtpunkte zur Kontrolle der Genauigkeit der Zeichnung mit zu benutzen.

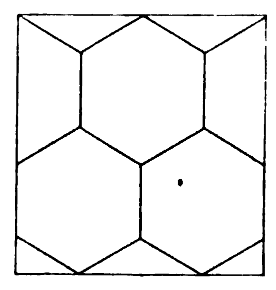


Fig. 23 (β).

Man zeichne auch die Abbildung für die in Fig. 23 (β) angedeutete Lage der sechseckigen Felder.

13) Ist aA die Abbildung einer in der Horizontalebene liegenden und zur Bildfläche senkrechten Geraden, so schneidet nach (7) die von einem beliebigen Punkte b der Achse OX nach D gezogene Gerade bD (Fig. 24) auf aA die Abbildung einer Strecke ac von der Länge ab ab. Zieht man nun

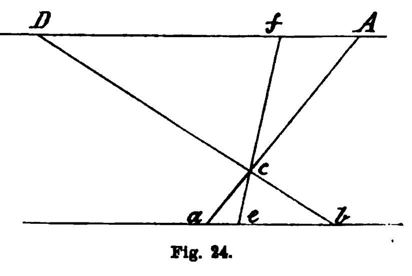


Fig. 24.

durch c die Gerade ef beliebig und sind e und f die Schnittpunkte derselben mit Achse bez. Horizont, so verhält sich bekanntlich:

$$ae : ab = Af : AD.$$

Ist z. B. e die Mitte von ab, so ist auch f die Mitte von AD, oder wenn allgemein $ae = \frac{1}{n} ab$ ist, so muss $Af = \frac{1}{n} AD$ sein.

Bei den praktischen Anwendungen der Linearperspektive wird in der Regel der Distanzpunkt ausserhalb der Zeichenfläche liegen. Man pflegt in diesem Falle den nten Teil der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche von A aus auf dem Horizont abzutragen und den Endpunkt dieser Strecke mit $\frac{D}{n}$ zu bezeichnen. Wie mit Hilfe des Punktes $\frac{D}{n}$ Aufgaben zu lösen sind, zeigt das folgende Beispiel.

14) Auf der Geraden aA von dem auf derselben gegebenen Punkte b aus die Abbildung einer Strecke von der Länge l zu bestimmen, wenn nur $\frac{D}{3}$ zugänglich ist (Fig. 25).

Man mache $ac = \frac{1}{3} l$, ziehe durch b die Gerade bh parallel zur Achse OX und verbinde c mit A durch die Gerade cA, dann schneidet die letztere bh in d. Es ist nun bd die Abbildung einer Strecke von der Länge $\frac{l}{3}$. Zieht man die Gerade $d \frac{D}{3}$, so trifft diese aA in e und es ist nun be die gesuchte Abbildung. Der Beweis ergiebt sich leicht aus folgender Betrachtung. Ist $ag = l$, so ist die durch Ag begrenzte Strecke bh die Abbildung einer Geraden von der Länge l, welche mit der Achse parallel ist. Die Gerade von h nach dem unzugänglichen Distanzpunkte D würde auf bA die gesuchte Strecke be abschneiden. Da nun $bd = \frac{1}{3} bh$ und $A \frac{D}{3} = \frac{1}{3} AD$ ist, so geht $d \frac{D}{3}$ auch durch den Punkt e.

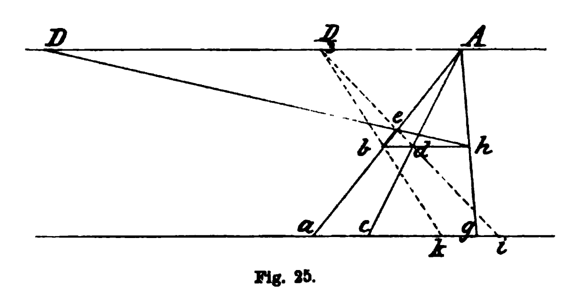


Fig. 25.

Anmerkung. Zieht man von $\frac{D}{3}$ eine Gerade durch b bis zum Durchschnitt k mit OX, und trägt von k aus $ki = \frac{1}{3} l$ auf OX ab, so geht die Verbindungslinie des Punktes i mit $\frac{D}{3}$ durch d, also auch durch e.

Es sind nämlich kb und di die Abbildungen zweier Parallelen, deren Fluchtpunkt $\frac{D}{3}$ ist, folglich stellt bdik die Abbildung eines in der Horizontalebene liegenden Parallelogramms dar, in welchem also bd die Abbildung einer Strecke von der Länge ik bedeutet. Diese Konstruktion von be ist nicht brauchbar, wenn die Gerade $\frac{D}{3}$ b die Achse OX innerhalb der Grenzen der Zeichenfläche nicht mehr schneidet.

Aufgaben.

14) Wie gross ist der Abstand eines in der Horizontalebene liegenden Punktes von der Bildfläche, dessen Abbildung in der Mitte zwischen Achse und Horizont liegt?

15) Den Abstand eines beliebigen in der Horizontalebene liegenden Punktes von der Achse aus seiner perspektivischen Abbildung zu finden.

16) Die wahre Länge einer zur Achse senkrechten Geraden, welche in der Horizontalebene liegt aus ihrer perspektivischen Abbildung zu finden.

17) Die wahre Länge einer beliebigen in der Horizontalebene liegenden Geraden aus der Abbildung derselben zu finden.

Anleitung. Man suche die wahre Gestalt des Trapezes zu finden, welches die gegebene Gerade, die beiden durch ihre Endpunkte gezogenen Senkrechten zur Achse, und die letztere selbst mit einander bilden.

Die vorigen Aufgaben zu lösen, wenn auf dem Horizont nur ein Teil der Entfernung AD angegeben werden kann.

17a) Aus der perspektivischen Abbildung eines in der Horizontalebene liegenden Dreiecks dessen wahre Gestalt zu bestimmen.

Abbildungen von Geraden, welche senkrecht zur Horizontalebene stehen.

Die Abbildungen, welche wir in diesem Abschnitte bisher betrachtet haben, bezogen sich auf solche Punkte und Figuren, welche in der Horizontalebene liegen. Wir schliessen hieran die Abbildungen von Geraden, welche senkrecht zur Horizontalebene stehen, wodurch dann das Mittel gegeben ist, die Abbildung jedes beliebig im Raum gelegenen Punktes zu bestimmen.

18) In einem gegebenen Punkte M der Horizontalebene ist eine Senkrechte MN zu der letzteren errichtet, welche die Länge l hat. Es soll die Abbildung von MN bestimmt werden (Fig. 26).

Die Abbildung m des Punktes M wird wie in (7) durch die beiden Geraden a′M und c′M, von denen die erstere senkrecht zur Achse O′X′, die zweite unter einem Winkel von 45° gegen diese geneigt ist, gefunden. Die Abbildung der Geraden MN steht nach Einleitung 6 senkrecht zur Achse; sie kann also der Richtung nach schon gezeichnet

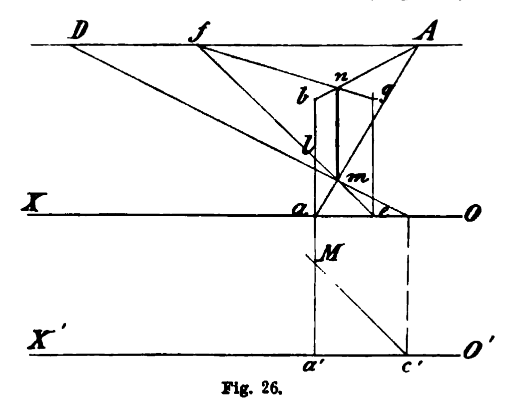


Fig. 26.

werden. Um die Länge der Abbildung zu bestimmen, trage man in a die gegebene Länge ab = l senkrecht zu OX ab. Zieht man die Gerade von b nach dem Hauptpunkte A, so sind aA und bA die Abbildungen zweier Parallelen, welche (weil A der gemeinsame Fluchtpunkt derselben ist) senkrecht zur Bildfläche stehen und durch die Endpunkte M und N der gegebenen Geraden gehen, (vergl. die Darstellung [α] in schiefer Projektion). Folglich schneiden aA und bA auf der in m zur Achse errichteten Senkrechten die gesuchte Abbildung mn ab.

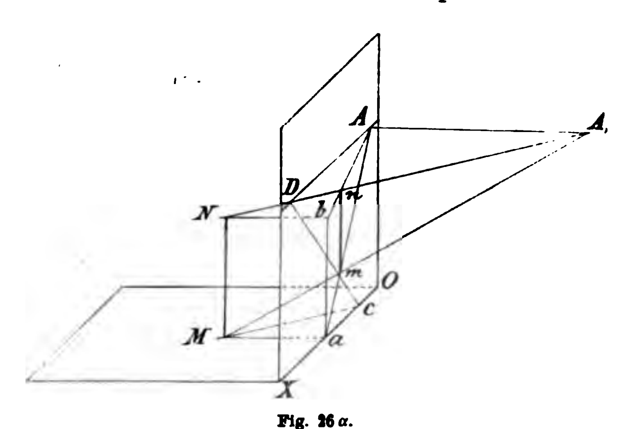


Fig. 26 α.

In (α) sind auch die beiden Strahlen von M und N nach dem Augenpunkte angegeben, welche selbstverständlich die Bildfläche in m bez. n treffen.

Man sieht leicht aus Fig. 26, dass mn ohne Benutzung des Grundrisses gefunden werden kann, wenn die Abbildung m des Fusspunktes schon gegeben ist. Übrigens kann man zum Auftragen der Höhe in m auch einen anderen Fluchtpunkt als A benutzen. Man ziehe durch m eine beliebige Gerade, welche die Achse in e und den Horizont in f schneidet, trage ge = l senkrecht zu OX auf und ziehe die Gerade fg. Dann kann man ef und fg als die Abbildungen zweier Parallelen mit dem gemeinsamen Fluchtpunkt f ansehen, welche demnach auf mn ebenfalls die gesuchte Höhe h abschneiden.

19) Abbildung eines mit der Grundfläche auf der Horizontalebene stehenden rechtwinkligen Parallelepipedums (Fig. 27).

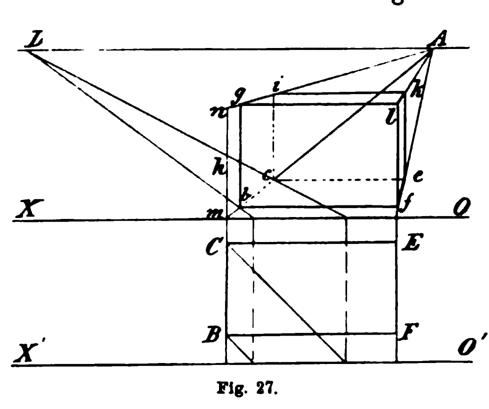


Fig. 27.

Das Parallelepipedum ist durch seine mit der Grundfläche BCEF zusammenfallende Horizontalprojektion und durch die Höhe h gegeben. BF sei parallel zu Achse OX. Die Abbildung der Grundfläche wird nach (8) bestimmt. Durch die Eckpunkte b, c, e und f zieht man senkrecht zur Achse OX die Geraden bg, ci, ek und fl, deren Längen noch näher zu bestimmen sind.

Man verlängere bc bis m und ziehe die Gerade mn = h senkrecht zur Achse. Nach 18 schneidet dann nA auf bg sowohl als auch auf ci die Höhe h ab. Ferner sind die Kanten gl und ik nach (Einleitung 4 β) parallel zur Achse OX, und gi und lk sind nach dem Hauptpunkte A gerichtet.

Leicht ergiebt sich aus dieser Konstruktion noch, dass die Abbildungen gleich langer Senkrechten zur Horizontalebene, welche dieselben Abstände von der Bildfläche haben, gleich gross werden.

Die besondere Stellung des Parallelepipedums, bei welcher eine Seitenfläche parallel zur Bildfläche ist, wird Frontstellung, die Abbildung in Folge dessen eine Frontansicht genannt. Diese Bezeichnung ist auch bei den Abbildungen grösserer Gegenstände gebräuchlich. So nennt man z. B. die Abbildung eines Gebäudes eine Frontansicht desselben, wenn die dem Beschauer zugekehrte Frontfläche des Gebäudes parallel zur Bildfläche angenommen ist.

Die Frontansichten sind am leichtesten herzustellen, wir werden deshalb die Konstruktion derselben zuerst betrachten und dann zu den schiefen Stellungen (Übereckstellungen) übergehen.

20) **Abbildung eines rechtwinkligen Parallelepipedums mit quadratischer Basis, welches auf zwei ebenfalls quadratischen Platten steht (Fig. 28).**

Wir setzen wieder voraus, dass ein Teil der Kanten parallel zur Achse ist. Man wird alsdann zunächst die perspektivischen Abbildungen der Horizontalprojektionen aller Grundflächen bestimmen und hierauf das Auftragen der Höhen vornehmen. Das erstere kann wie früher ausgeführt werden; die Abbildungen der Höhen erhält man am einfachsten, wenn man eine der beiden Diagonalen der Grundfläche z. B. BC bis zum Durchschnitt E mit OX verlängert. In E zieht man die Gerade EF senkrecht zu OX und trägt auf dieser die drei gegebenen Höhen eg, eh u. s. f. ab. Zieht man von g, h . . . Geraden nach dem Distanzpunkte D, so schneiden diese auf den über der Diagonale stehenden zur Horizontalebene senkrechten Kanten die gesuchten Höhen ab. Die Abbildungen der übrigen Kanten werden in bekannter Weise hinzugefügt.

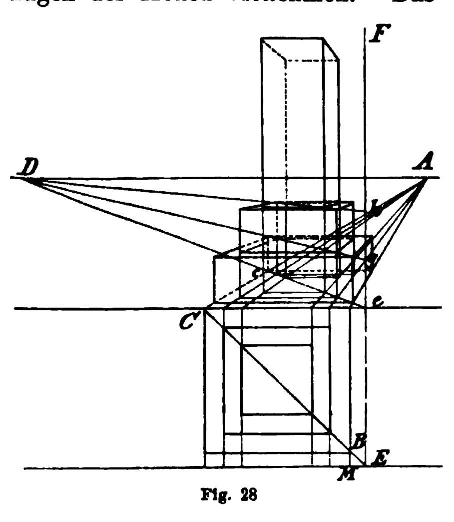


Fig. 28

Es ist leicht ersichtlich, dass der Grundriss entbehrt werden kann, wenn ausser den nötigen Dimensionen des Gegenstandes der Abstand BM gegeben ist.

21) Abbildung eines auf der Horizontalebene stehenden Kreuzes, dessen Frontfläche parallel zur Bildfläche ist (Fig. 29).

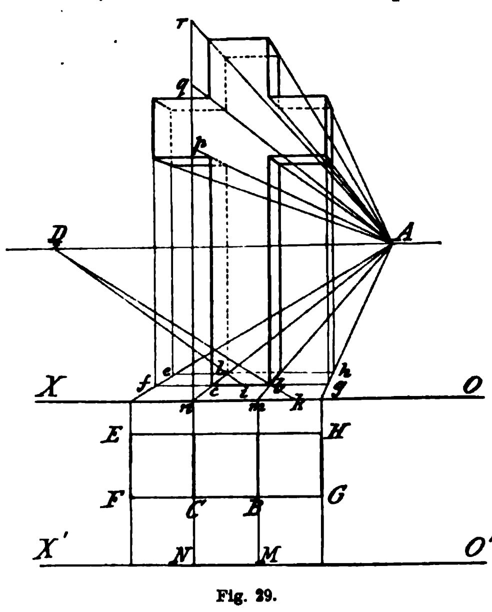


Fig. 29.

Es soll hierbei noch angenommen werden, dass der Distanzpunkt ausserhalb der Grenzen der Zeichenfläche liegt, und etwa $\frac{D}{2}$ noch erreichbar ist. Das aus drei Quadraten bestehende Rechteck EFGH sei die Horizontalprojektion des Kreuzes, BM der Abstand desselben von der Bildfläche. Die Abbildung des Rechtecks EFGH ist efgh, welche sich, wie schon früher angegeben, leicht konstruieren lässt. Der Punkt b auf mA z. B. wird bestimmt durch die Gerade k$\frac{D}{2}$, welche man findet, wenn man mk gleich der Hälfte des Abstandes BM macht. Ferner liegt der Eckpunkt l auf derjenigen Geraden, welche die Mitte i der Seite bc mit $\frac{D}{2}$ verbindet. Die gegebenen Höhen np, nq, nr, welche an dem Kreuz vorkommen, trage man in der Spur n der Kante cl senkrecht zur Achse OX auf, dann schneiden die Geraden pA, qA, rA auf den in c und l zur Horizontalebene senkrecht stehenden Kanten die Abbildungen jener Höhen ab. Die Abbildungen der noch übrigen Kanten sind alsdann leicht zu finden, da dieselben entweder parallel oder senkrecht zur Achse OX stehen, oder nach dem Hauptpunkte A gerichtet sind.

Aufgaben.

22) Die Abbildung des vorigen Kreuzes zu zeichnen, wenn die Kante EF parallel mit der Achse ist, und das Kreuz wie in 21) mit der Grundfläche auf der Horizontalebene steht.

23) Man soll die Abbildung des Kreuzes zeichnen, wenn dasselbe so auf der Horizontalebene liegt, dass seine Grundfläche mit der Bildfläche parallel ist.

24) Zur weiteren Übung empfehlen wir dem Anfänger die in den Figuren 30—33 durch Grundriss und Aufriss dargestellten Gegenstände perspektivisch abzubilden unter der Voraussetzung, dass eine Frontfläche parallel zur Bildfläche ist. Man ver-

suche auch einige dieser Beispiele zu konstruieren, wenn die Distanzpunkte ausserhalb der Zeichenfläche liegen.

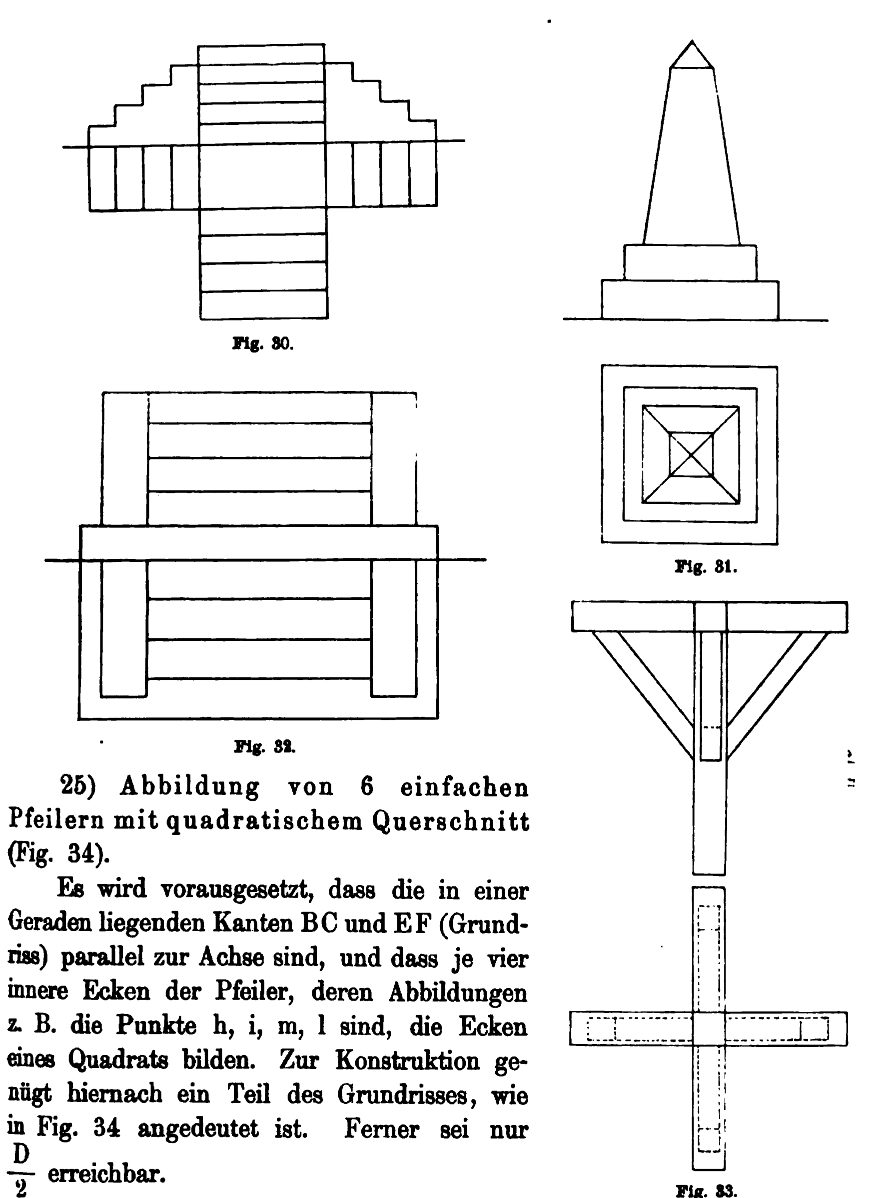


Fig. 30.

Fig. 31.

Fig. 32.

Fig. 33.

25) Abbildung von 6 einfachen Pfeilern mit quadratischem Querschnitt (Fig. 34).

Es wird vorausgesetzt, dass die in einer Geraden liegenden Kanten BC und EF (Grundriss) parallel zur Achse sind, und dass je vier innere Ecken der Pfeiler, deren Abbildungen z. B. die Punkte h, i, m, l sind, die Ecken eines Quadrats bilden. Zur Konstruktion genügt hiernach ein Teil des Grundrisses, wie in Fig. 34 angedeutet ist. Ferner sei nur $\frac{D}{2}$ erreichbar.

Die Abbildungen der Grundflächen der vorderen Pfeiler werden wie diejenige der Grundfläche des Kreuzes in Fig. 29 bestimmt. Um die Ecke l zu bestimmen, halbiere man hi in n und ziehe die Gerade n $\frac{D}{2}$, welche

cA in l schneiden muss. Die hintere Ecke t des zweiten Pfeilers links ergiebt sich durch die Gerade, welche man von der Mitte s der Kante ol nach $\frac{D}{2}$ zieht. Die Höhen der Pfeiler sind wie bei den vorhergehenden Auf-

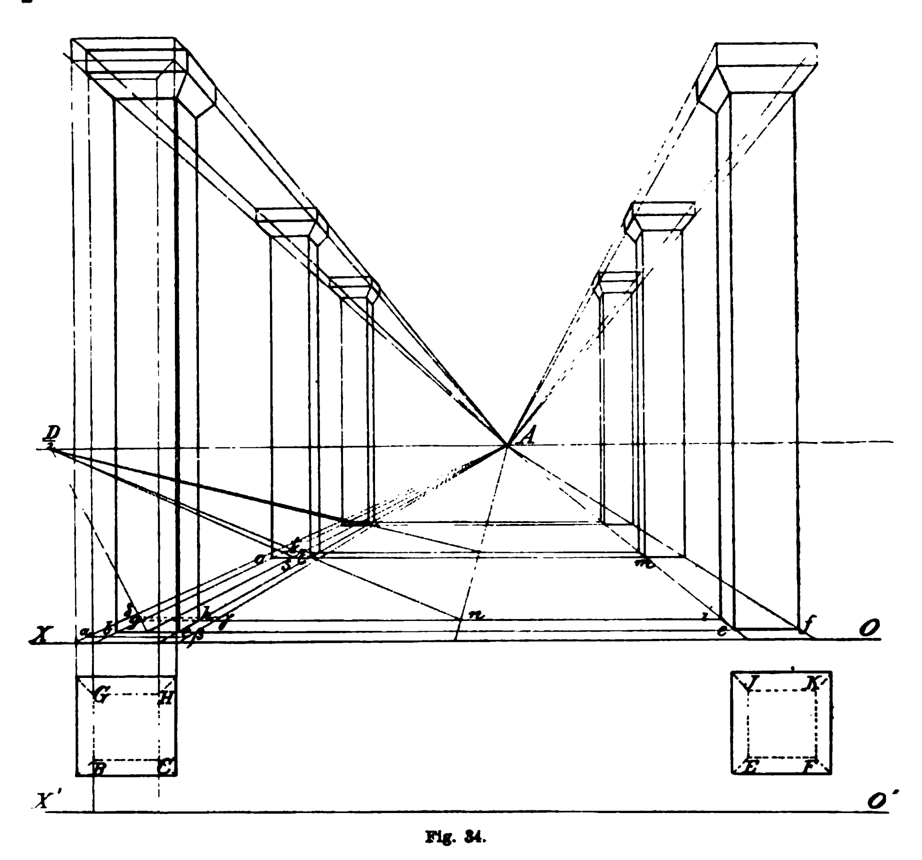


Fig. 34.

gaben leicht zu bestimmen. Um die Abbildungen der Kapitäle zu finden, konstruiert man zunächst die perspektivischen Abbildungen ihrer Horizontalprojektionen, wie dieses bei dem ersten Pfeiler durch $\alpha\beta\gamma\delta$ angedeutet ist. Auf den in den Eckpunkten einer solchen Projektion errichteten Senkrechten sind dann noch die zugehörigen Höhen auf bekannte Weise abzutragen. Wie die Abbildung des dritten Paares der Pfeiler gefunden wird, ist nun leicht ersichtlich und in Fig. 34 hinreichend angedeutet.

Betrachtet man die bisher konstruierten Abbildungen (Frontansichten) aufmerksam, so bemerkt man, dass diese einen etwas gezwungenen Eindruck machen, und deshalb keine vollkommen befriedigende Wirkung hervorbringen. Der Hauptgrund dieser Erscheinung liegt darin, dass alle zur Bildfläche parallelen Flächen in ihren Abbildungen Grössenverhältnisse haben,

welche den wirklichen proportioniert sind, während die Abbildungen unmittelbar daranstossender Flächen starke Verzerrungen zeigen. Dieser plötzliche Übergang ist es, welcher der Abbildung den etwas schroffen gezwungenen Charakter verleiht; ausserdem wirkt auch eintönig die grössere Zahl von Geraden, welche der Achse parallel sind. Wenn deshalb nicht besonders wichtige Gründe vorhanden sind, so zieht man, vor allen Dingen bei freistehenden Gegenständen, der Frontansicht die zufällige schräge Stellung (Übereckstellung) vor. Die Abbildungen erhalten dann einen ungezwungenen, lebendigeren Charakter, insbesondere verschwinden die vielen horizontalen Geraden, welche nun nicht mehr unter sich parallel erscheinen. Dagegen ist bei Innenansichten, z. B. bei der Abbildung eines langen Korridors und dgl. die Frontansicht häufig mit Vorteil zu benutzen.

Wir gehen nun im folgenden zum Studium derjenigen Konstruktionen und Hilfsmittel über, welche zur Herstellung der Abbildungen bei beliebiger Stellung der Bildfläche erforderlich sind.

26) Abbildung einer beliebigen Geraden, welche in der Horizontalebene liegt, oder parallel zu derselben ist (Fig. 35 [α] und [β].

Es sei A_1 (Fig. 35α) der Augenpunkt, A der Hauptpunkt hh′ der Horizont und ab die abzubildende Gerade, welche in der Horizontalebene liegen mag. Nach (3) trifft nun der zu ab von A_1 aus gezogene Parallelstrahl die Bildfläche in einem Punkte f des Horizontes. Dieser Punkt ist der Fluchtpunkt der gegebenen Geraden; folglich liegt ihre Abbildung in der Verbindungslinie der Spur a mit f.

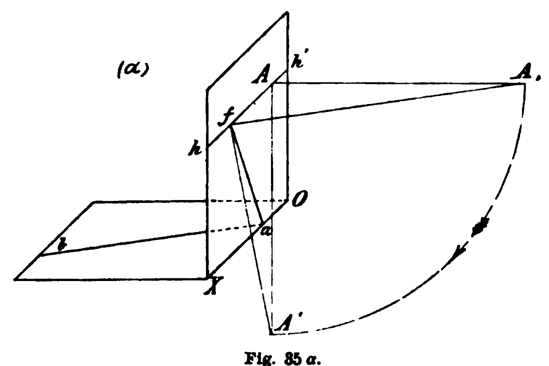


Fig. 35 α.

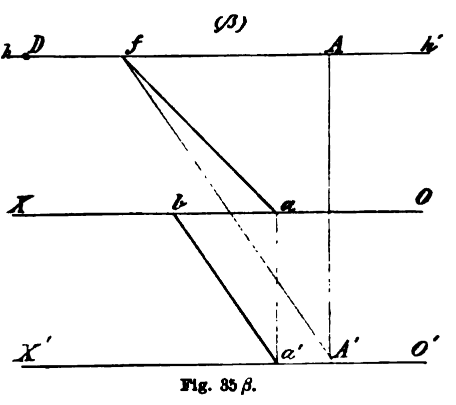


Fig. 35 β.

Die wirkliche Ausführung der so angedeuteten Konstruktion ist in (β) angegeben. Die Lage der gegebenen Geraden a′b und ihre Spur a′ ist aus dem Grundriss ersichtlich. Um den Fluchtpunkt f zu finden, hat man sich das bei A rechtwinklige Dreieck A_1 Af [s. (α)] um Af gedreht zu denken, bis es in die Bildfläche nach AA′f

gelangt. Die Lage des gedrehten Dreiecks lässt sich in (β) leicht bestimmen. Da nämlich in (α) $\angle AfA_1 = \angle baX$ also in (β) $\angle AfA' = \angle ba'X'$ ist, so muss $A'f \parallel a'b$ sein. Man mache deshalb in (β) $AA' \perp hh'$ und $AA' = AD$; ziehe $A'f \parallel a'b$, dann ist der Schnittpunkt f der gesuchte Fluchtpunkt. Projiciert man noch die Spur a′ nach a, dann liegt in der Verbindungslinie des Punktes a mit f die Abbildung der Geraden ab.

Da die Fluchtpunkte aller zur Horizontalebene parallelen Geraden im Horizont liegen, so ist die eben angegebene Konstruktion des Fluchtpunktes auch noch gültig, wenn a′b nicht die gegebene Gerade selbst, sondern die Horizontalprojektion einer zu ihr parallelen Geraden bedeutet.

27) Abbildung eines auf der Horizontalebene stehenden rechtwinkligen Parallelepipedums (Fig. 36).

Es sei BCEF der Grundriss des Parallelepipedums und h die Höhe desselben. Man ziehe in A die Gerade $AA' = AD$, senkrecht zum Horizont und lege durch A′ die Geraden $A'f_1$ und $A'f_2$ bez. parallel zu BF und BC, dann erhält man in f_1 und f_2 die Fluchtpunkte der letzteren und aller

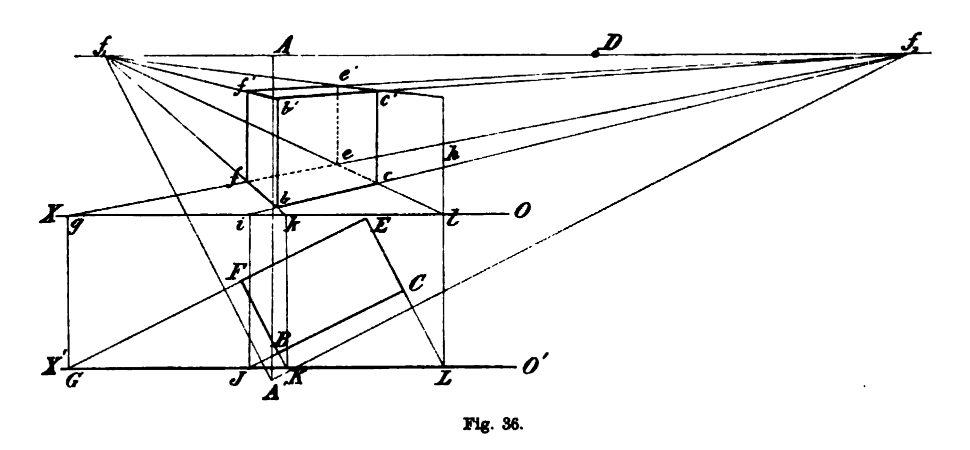


Fig. 36.

Kanten, welche zu denselben parallel sind. Nun verlängere man die Seiten des Rechtecks BCEF bis zu ihren Spuren G, I, K, L, deren Abbildungen g, i, k, l senkrecht über den letzteren liegen. Die Abbildungen der beiden Geraden BC und EF liegen dann in den Verbindungslinien gf_2 und if_2, und jene der Geraden BF und CE in kf_1 bez. lf_1. Hierdurch ergiebt sich die Abbildung bcef der Grundfläche. In den Ecken der letzteren sind Senkrechten zur Achse zu ziehen und auf diesen die Abbildungen der Höhe h aufzutragen.

Man konstruiere hiernach die Abbildungen von Übereckstellungen der in den Figuren 30—33 dargestellten Gegenstände.

Unzugängliche Fluchtpunkte.

28) Die Ermittelung der perspektivischen Abbildungen beliebiger horizontaler Geraden zeigt, wie die Abbildungen von Übereckstellungen leicht gefunden werden können mit Berücksichtigung auf das scheinbare Zusammenlaufen paralleler Geraden in einem Fluchtpunkte. Zwar hätte man derartige Abbildungen auch nach 7) und 18) dieses Abschnittes konstruieren können; man wäre dann aber gezwungen, die Abbildungen aller Ecken zu bestimmen und diese den Kanten des abzubildenden Gegenstandes entsprechend mit einander zu verbinden. Dadurch tritt aber (was gerade für das Zeichnen von besonderer Wichtigkeit ist) die Gesetzmässigkeit in dem Verlauf der Abbildungen der Kanten nicht so klar hervor, wie z. B. bei dem in 27) angegebenen Verfahren. Überhaupt gewährt die Benutzung der Fluchtpunkte der vorkommenden Geraden einen besonders lehrreichen Einblick in die Eigentümlichkeiten perspektivischer Abbildungen und man wird nur in einzelnen Fällen (s. 30) mit der punktweisen Ermittelung sich begnügen.

Nun tritt häufig der Fall ein, dass Fluchtpunkte ausserhalb der Zeichenfläche liegen. Es ist dann die Aufgabe zu lösen, von einem beliebigen Punkte der Zeichenfläche eine Gerade nach einem unzugänglichen Punkte zu ziehen, dessen Lage immer durch zwei gegebene Geraden bestimmt ist, welche sich ausserhalb der Zeichenfläche schneiden. Die Lösung ist jedoch sehr einfach; sie stützt sich auf das planimetrische Gesetz, dass parallele Geraden auf anderen Geraden stets proportionierte Strecken abschneiden.

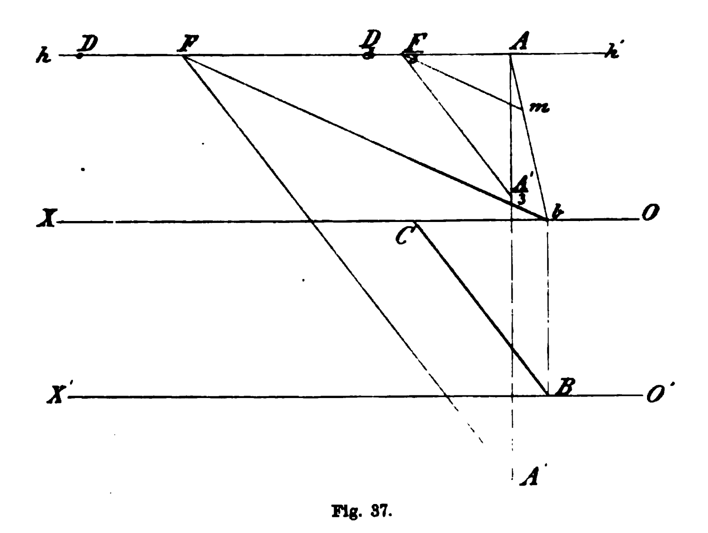


Fig. 37.

Es sei BC Fig. 37 eine in der Horizontalebene liegende Gerade, deren Abbildung gefunden werden soll. Ist AA' ⊥ hh' und gleich AD, ferner

$A'F$ parallel BC, so ist nach 26) F der Fluchtpunkt der gegebenen Geraden. Projiciert man noch die Spur B nach b auf OX, so liegt in bF die Abbildung von BC. Liegt nun D ausserhalb der Zeichenfläche, so dass z. B. nur noch $\frac{D}{3}$ auf derselben erreichbar ist, so kann man die Richtung der Abbildung von b nach F leicht folgendermassen bestimmen.

Man mache $A\frac{A'}{3} = \frac{1}{3}AA'$ (also $= \frac{1}{3}AD$) und ziehe von $\frac{A'}{3}$ aus eine Parallele zu BC. Die letztere schneidet den Horizont hh' in $\frac{F}{3}$, dann verhält sich:

$$A\frac{F}{3} : AF = A\frac{A}{3} : AA';$$

folglich ist auch $A\frac{F}{3} = \frac{1}{3}AF$.

Mit Hilfe von $\frac{F}{3}$ kann man nun leicht die Richtung von bF finden. Man ziehe Ab und mache $Am = \frac{1}{3}Ab$; verbinde m mit $\frac{F}{3}$ durch die Gerade $m\frac{F}{3}$ und ziehe nun von b aus eine Parallele zu $m\frac{F}{3}$. Diese Parallele fällt mit bF zusammen. Der Beweis ergiebt sich aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke AbF und $Am\frac{F}{3}$.

Ist $\frac{D}{n}$ gegeben, so trägt man auf AA' von A aus $\frac{1}{n}$ der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche ab und verfährt sonst wie vorhin.

Sind a und b (Fig. 38) die Abbildungen von zwei beliebigen Punkten und sollen von denselben gerade Linien nach dem auf dem Horizont hh' liegenden unzugänglichen Fluchtpunkte f gezogen werden, so ziehe man Aa und Ab und mache, wenn etwa $\frac{f}{3}$ gegeben ist, $Ac = \frac{1}{3}Aa$ und $Ad = \frac{1}{3}Ab$. Zieht man nun am parallel zu $c\frac{f}{3}$ und bn parallel zu $d\frac{f}{3}$, so gehen am und bn verlängert durch f.

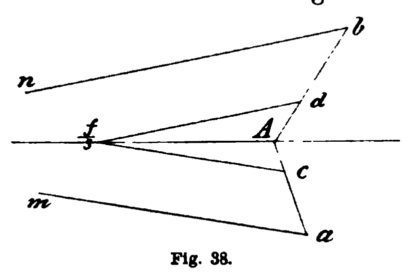


Fig. 38.

Soll man von mehreren Punkten a, b, c, d, e . . . (Fig. 39), welche auf der Achse OX, oder wie in Fig. 40, auf einer beliebigen Geraden an

liegen, gerade Linien nach dem auf dem Horizonte liegenden unzugänglichen Fluchtpunkte f gezogen werden, so verbindet man zunächst die gegebenen Punkte mit dem Hauptpunkte A durch gerade Linien. Ist nun wieder etwa $\frac{f}{3}$ gegeben, so mache man $A\alpha = \frac{1}{3} Aa$ und ziehe die Gerade kl durch α parallel zur Achse OX bez. parallel zu an. Diese Parallele schneidet auf jeder der Verbindungsgeraden der Punkte a, b, c, d, e .. mit A ein Drittel ihrer Länge von A aus gerechnet, ab. Die gesuchten von a, b, c, d, e .. nach f gehenden Geraden sind dann bez. parallel zu denjenigen Geraden, welche $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ .. mit $\frac{f}{3}$ verbinden.

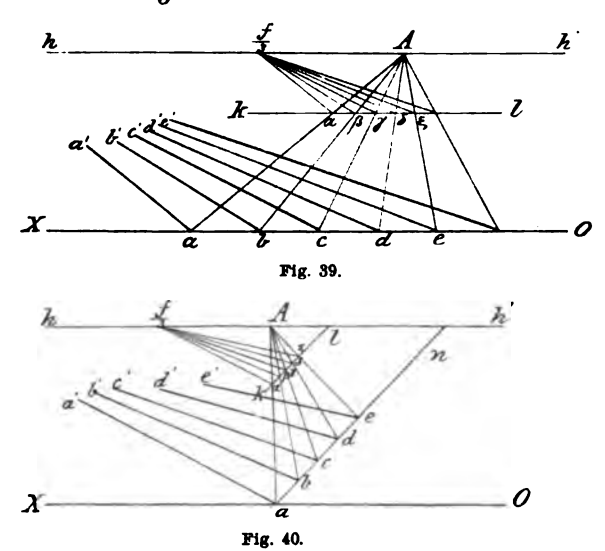


Fig. 39.

Fig. 40.

29) Die in 28) erläuterten Konstruktionen sind in Fig. 41 zur perspektivischen Darstellung eines Monumentes bei Übereckstellung benutzt worden, unter der Voraussetzung, dass noch $\frac{D}{6}$ auf der Zeichenfläche zugänglich ist. Einige Andeutungen werden hier vollständig genügen, da wir bereits Gesagtes nur zu wiederholen haben. Nachdem die Spuren G, H, I und K der Kanten der Grundfläche in der Horizontalprojektion gefunden, und durch Senkrechten zur Achse in der perspektivischen Abbildung in g, h, i und k bestimmt sind, zieht man von den letzteren gerade Linien nach dem Hauptpunkte A. Ferner lege man die Gerade mn parallel zum Horizonte so, dass ihr Abstand von dem letzteren $\frac{1}{6}$ des Abstandes zwischen Horizont und Achse beträgt. Diese Gerade schneidet auf gA, hA, iA und kA je $\frac{1}{6}$ ihrer Länge, von A aus gerechnet, ab. Macht man nun $AA_2 = \frac{1}{6}$ der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche und senkrecht zum Horizont, und zieht $A_2 \frac{f}{6}$ parallel zu BC, $A_2 \frac{F}{6}$ parallel zu BE, so sind $A \frac{f}{6}$ und

$A\frac{F}{6}$ bez. die sechsten Teile der Entfernungen der wahren Fluchtpunkte vom Hauptpunkte A.

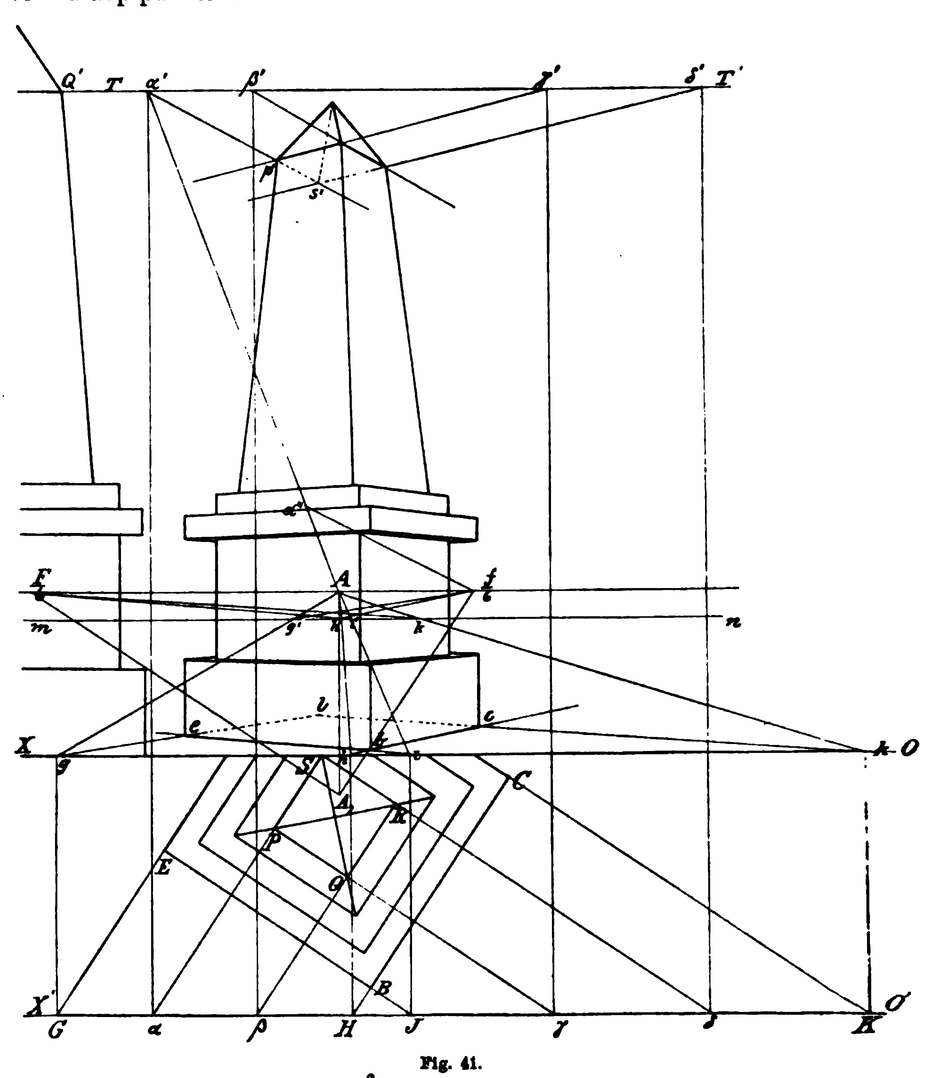


Fig. 41.

Wir ziehen nun $gl \parallel g'\frac{f}{6}$

$hc \parallel h'\frac{f}{6}$

ferner $ie \parallel i'\frac{F}{6}$

$kc \parallel k'\frac{F}{6}$

Durch diese Geraden erhalten wir die Abbildung b c l e der Grundfläche.

Um die Abbildung desjenigen Quadrates zu finden, dessen Horizontalprojektion PQRS ist, denken wir uns die Ebene desselben erweitert. Diese Ebene schneidet die Bildfläche in einer zur Achse parallelen Geraden TT′, welche in gleicher Höhe mit dem entsprechenden Eckpunkte Q′ des links in unserer Zeichnung angegebenen Aufrisses liegt. Auf TT′ liegen nun die Spuren α', β', γ', δ' der Seiten jenes Quadrates und zwar senkrecht über den Punkten α, β, γ, δ des Grundrisses. Verbindet man jetzt α' mit A durch die Gerade α'A und macht alsdann $\alpha''A = \frac{1}{6}\alpha'A$, zieht ferner zu $\alpha''\ \frac{f}{6}$ die Parallele $\alpha'p'$, so liegt in der Verlängerung der letzteren die Abbildung p′s′ der einen Quadratseite. In gleicher Weise konstruiert man die Abbildungen der übrigen Kanten.

Die Abbildungen der Eckpunkte derjenigen Quadrate, welche nahezu in gleicher Höhe mit dem Horizont liegen, werden wegen der spitzen Winkel, welche die Abbildungen der Seiten mit einander bilden, leicht undeutlich. Man kann in diesem Falle die ganze Horizontalprojektion des Gegenstandes perspektivisch abbilden, dann werden die gesuchten Ecken senkrecht über denjenigen dieser Abbildung liegen.

30) Um noch zu zeigen, wie man ohne Benutzung von Fluchtpunkten einzelner Kanten perspektivische Abbildungen konstruieren kann, betrachten wir die Abbildung eines auf der Horizontalebene stehenden rechtwinkligen Parallelepipedums, welches auf seiner oberen Grundfläche eine regelmässige vierseitige Pyramide trägt (Fig. 42).

Durch die Eckpunkte des Grundrisses ziehen wir die Geraden BB′, CC′, EE′ und FF′ senkrecht zur Achse O′X′ und bestimmen deren Spuren b′, c′, e′ und f′, welche senkrecht über B′, C′, E′, F′ auf OX liegen. Die Abbildungen dieser Geraden sind von b′, c′, e′, f′ nach dem Hauptpunkte A gerichtet. Um nun auf den letzteren die Abbildungen der Eckpunkte der Grundfläche zu bestimmen, stellen wir eine Ebene auf, welche senkrecht zur Achse OX steht und im Grundriss deshalb als die Gerade MN erscheint. Die Abbildung von MN ist von N nach A gerichtet und die Schnittlinie der Ebene mit der Bildfläche die zur Achse OX senkrechte Gerade NQ. Auf diese Ebene projicieren wir die Punkte B, C, E, F durch Geraden, welche parallel zur Achse O′X′ sind, nach b″, c″, e″, f″. Die Abbildungen b_2, c_2, e_2, f_2 dieser letzteren, welche auf NA liegen, werden nach (7) mit Hilfe des Punktes $\frac{D}{2}$ bestimmt. Zieht man jetzt die Geraden b_2b, c_2c e_2e, f_2f parallel zu OX, so stellen diese die Abbildungen der projicierenden Geraden Bb″, Cc″, Ee″, Ff″ dar, und sie bestimmen die Abbildungen b, c, e und f der Ecken der Grundfläche.

Projicieren wir nun die zur Horizontalebene senkrechten Kanten des Prismas ebenfalls auf die angenommene Seitenebene, so werden die oberen Endpunkte g_2, h_2, i_2, k_2 der Projektionen in einer Geraden lA liegen, welche man erhält, wenn man in N die wahre Länge Nl jener Kanten

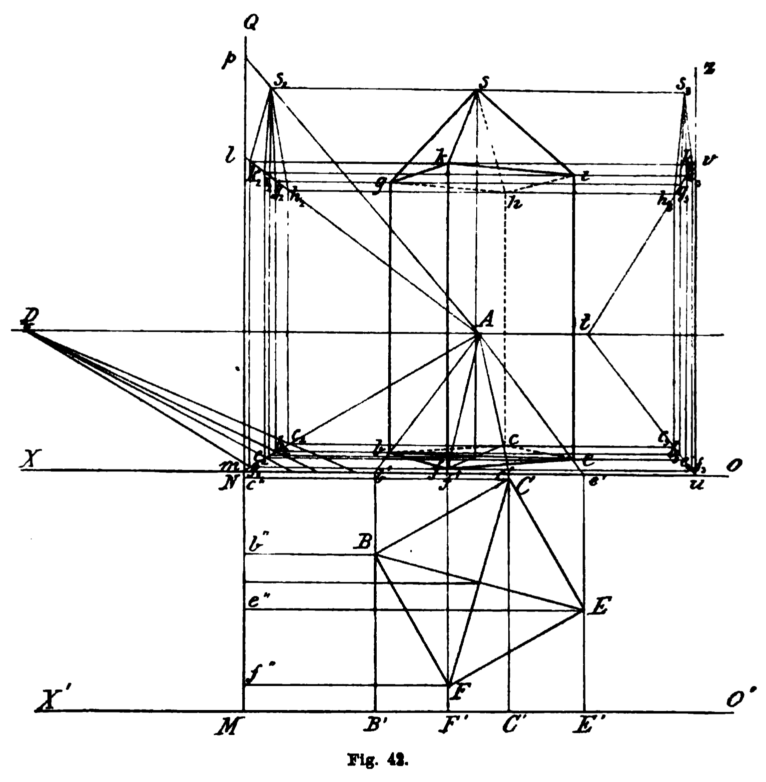


Fig. 42.

senkrecht zur Achse aufträgt und von l aus die Gerade lA zieht. Jetzt kann man die Abbildungen der vertikalen Kanten in b, c, e und f zeichnen und durch Parallelen zur Achse, welche von g_2, h_2, i_2, k_2 aus gezogen werden, die Eckpunkte g, h, i, k bestimmen. Auf gleiche Weise ergiebt sich die Abbildung der Spitze s. (In Fig. 42 ist die perspektivische Abbildung der Seitenprojektion vollständig angegeben).

Besonders brauchbar ist die Projektion auf eine Seitenebene, wenn sehr viele gleiche Höhen, welche in verschiedenen Entfernungen von der Bildfläche liegen, aufzutragen sind. Man vergl. die Anwendungen in den Fig. 83, 86, 88, und 89.

Sind die Punkte b, c, e und f bestimmt, so kann man diese auch auf eine beliebige zwischen Achse und Horizont liegende Gerade ut projicieren. In den Projektionen und in u errichtet man Senkrechten zur Achse und trägt auf diesen die Höhen perspektivisch ab (man mache also uv = Nl

und ziehe vt, wodurch auf jenen Senkrechten die gesuchten Strecken nach (18) des Abschnittes bestimmt werden). Durch Parallelen zur Achse, welche man von den so erhaltenen Punkten g_3, h_3, i_3, k_3 zieht, ergeben sich nun gleichfalls die Ecken des Parallelepipedums. Die Konstruktion ist aus Fig. 42 ersichtlich; man benutzt in diesem Falle die Projektion des zu zeichnenden Gegenstandes auf einer zur Horizontalebene senkrechten Ebene, welche jedoch nicht senkrecht zur Bildfläche steht. Die projicierenden Linien sind aber parallel zur Bildfläche und fassen demnach gleiche Höhen zwischen sich. Dies Verfahren ist anzuwenden, wenn im ersten Falle die Ecken der Seitenprojektion durch zu spitze Schnitte der Hilfslinien undeutlich werden sollten.

Man zeichne hiernach die perspektivische Abbildung des Gegenstandes Fig. 41.

Der Teilungspunkt.

31) Es sei BC Fig. 43 eine in der Horizontalebene liegende Gerade und bF ihre nach (26) bestimmte perspektivische Abbildung. Um auf der letzteren die gegebene Strecke BE von b aus perspektivisch darzustellen, machen wir

$$BG = BE$$

und suchen nun die Abbildung der Verbindungslinie der Punkte G und E. Wir ziehen also von dem niedergeklappten Hauptpunkte A′ aus die Gerade A′T parallel zu GE, dann ist T der Fluchtpunkt der letzteren.

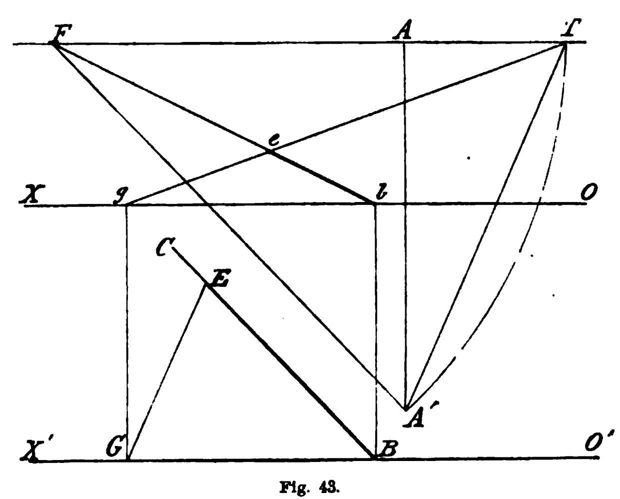


Fig. 43.

Durch die Senkrechte Gg zur Achse bestimmen wir die Spur g, dann erhält man in der Verbindungslinie der Punkte g und T die Abbildung der durch G und E gehenden Geraden. gT schneidet nun auf bF die Abbildung be der gegebenen Strecke BE ab.

Aus der eben angegebenen Konstruktion folgt, dass die Dreiecke A′FT und BEG ähnlich sind, weil ihre Seiten paarweise parallel liegen. Da nun das letztere Dreieck gleichschenklig ist (BG = BE), so ist auch in dem Dreieck A′FT:

$$A'F = FT.$$

Man kann deshalb den Punkt T auch mit Hilfe eines um den Flucht-

punkt F mit dem Halbmesser FA′ beschriebenen Kreises bestimmen. Ferner ist noch bg = BG = BE.

Hiernach lässt sich auf der gegebenen Abbildung einer beliebigen in der Horizontalebene liegenden Geraden eine bestimmte Strecke ohne Benutzung des Grundrisses von der Spur der Geraden aus perspektivisch abtragen. Man zeichnet um den Fluchtpunkt F der gegebenen Geraden bF mit dem Halbmesser FA′ einen Kreis, welcher den Horizont in T, dem sog. Teilungspunkt der Geraden, trifft. Die gegebene Strecke trägt man von der Spur b aus nach bg auf der Achse OX ab und zieht von g die Gerade gT nach dem Teilpunkte T. Diese Gerade schneidet auf bF die gesuchte Abbildung ab.

Alle in der Horizontalebene liegenden Geraden, welche zu GE parallel sind, haben den Fluchtpunkt T gemeinschaftlich und man sieht leicht, dass die Abbildungen aller dieser Geraden auf bF Strecken abschneiden, deren wahre Längen denjenigen Strecken gleich sind, welche die Geraden selbst auf der Achse (von b aus gerechnet) abschneiden. Wegen dieser Eigenschaft heisst T der Teilungspunkt der Geraden bF.

Man kann einen zweiten Teilungspunkt von gleicher Eigenschaft in demselben Abstande von F nach links auf dem Horizont abtragen.

Alle in der Horizontalebene liegenden Parallelen zu BC, deren Fluchtpunkt F ist, haben denselben Teilungspunkt T.

Für jede Gerade in der Horizontalebene, welche den Hauptpunkt zum Fluchtpunkt hat, ist jeder der Distanzpunkte ein Teilungspunkt.

Ist BC unter einem Winkel von 60° gegen die Achse geneigt, so ist nicht nur T der Teilungspunkt für alle nach F gehenden Geraden, sondern F ist auch der Teilungspunkt derjenigen in der Horizontalebene liegenden Geraden, welche T als gemeinschaftlichen Fluchtpunkt haben. Warum?

Um auf der Abbildung bF einer in der Horizontalebene liegenden Geraden, Fig. 44, von einem Punkte c derselben eine Strecke von gegebener Länge l perspektivisch abzutragen, ziehen wir vom Teilpunkte T der Geraden durch c die Linie Tc, und verlängern die letztere bis zum Durchschnitt e mit der Achse OX. Jetzt machen wir ge = l und ziehen gT, dann schneidet die letztere auf bF den Endpunkt h der gesuchten Strecke ab. Es ist nämlich nach dem früheren:

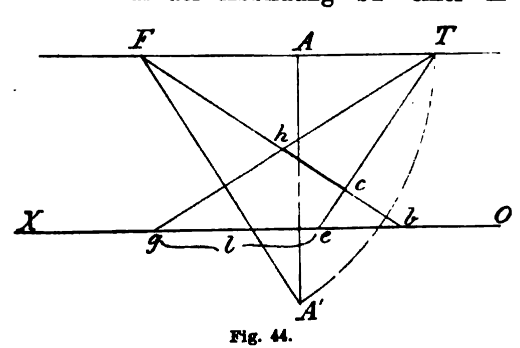


Fig. 44.

bg gleich der wahren Länge von bh

be „ „ „ „ „ bc

folglich ist auch bg — be = ge = l gleich der wahren Länge von bh — bc oder von ch.

Umgekehrt: Soll die wahre Länge einer in der Horizontalebene liegenden Strecke aus ihrer Abbildung ch bestimmt werden, so ziehen wir von dem Teilpunkte derselben die Geraden Tc und Th. Die Verlängerungen der letzteren begrenzen auf der Achse die Strecke ge, welche die gesuchte wahre Länge darstellt. Die Richtigkeit dieser Konstruktion ist aus Fig. 44 unmittelbar ersichtlich.

Die Aufgabe, auf der Abbildung einer in der Horizontalebene liegenden Geraden bF (Fig. 45) von einem bestimmten Punkte c derselben die gegebene Strecke l perspektivisch abzutragen, wollen wir noch für den Fall lösen, wenn der gegebene Punkt c so nahe dem Horizonte liegt, dass die Gerade, welche ihn mit dem Teilungspunkte verbindet, die Achse innerhalb der zur Verfügung stehenden Zeichenfläche nicht mehr treffen würde.

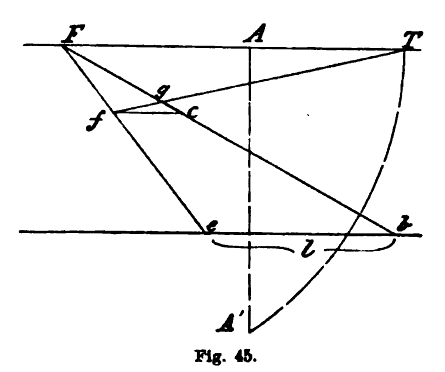


Fig. 45.

Wir tragen be = l von der Spur b aus auf der Achse OX ab; ziehen eF und durch c die Gerade cf parallel zu OX. Da nun eF und bF die Abbildungen zweier Parallelen mit dem gemeinschaftlichen Fluchtpunkte F sind, so ist bcfe die Abbildung eines Parallelogramms. Es ist also die wahre Länge der Seite cf = be = l. Ziehen wir nun die Gerade fT, so ist cfg die Abbildung eines gleichschenkligen Dreiecks, in welchem cf und cg die Abbildungen der beiden gleichen Seiten desselben sind. Folglich ist auch cg die Abbildung einer Strecke von der gegebenen Länge l.

Hiernach löse man die Aufgabe: Die wahre Länge einer in der Horizontalebene liegenden Geraden aus ihrer Abbildung zu finden.

32) Als Beispiel zur Anwendung der in 31) gegebenen Erläuterungen diene die Abbildung einer Reihe von Pfeilern mit quadratischen Grundflächen, welche auf der Horizontalebene stehen (Fig. 46). Durch den unter OX liegenden Teil des Grundrisses ist die Lage des ersten Pfeilers in Bezug auf die Bildfläche bestimmt. e sei die Entfernung je zweier Pfeiler von einander und h die gemeinschaftliche Höhe derselben.

Wir verlängern, wie in Fig. 46 angegeben ist, zwei parallele Seiten der Grundflächen bis zu ihren Spuren G und J und übertragen die letzteren durch Senkrechten zur Achse auf die perspektivische Abbildung nach g und i. Die Abbildungen dieser verlängerten Seiten sind alsdann nach dem auf bekannte Weise bestimmten Fluchtpunkte F zu ziehen (AA' = Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche und A'F parallel zu CG) und nun

bestimmen wir durch den um F als Mittelpunkt mit dem Halbmesser FA′ gezeichneten Kreisbogen den Teilungspunkt T für gF. Den Eckpunkt c findet man alsdann, wenn man gl = CG macht und die Gerade lT zieht, welche gF in c schneidet. Ferner tragen wir von l aus die Strecke lm =

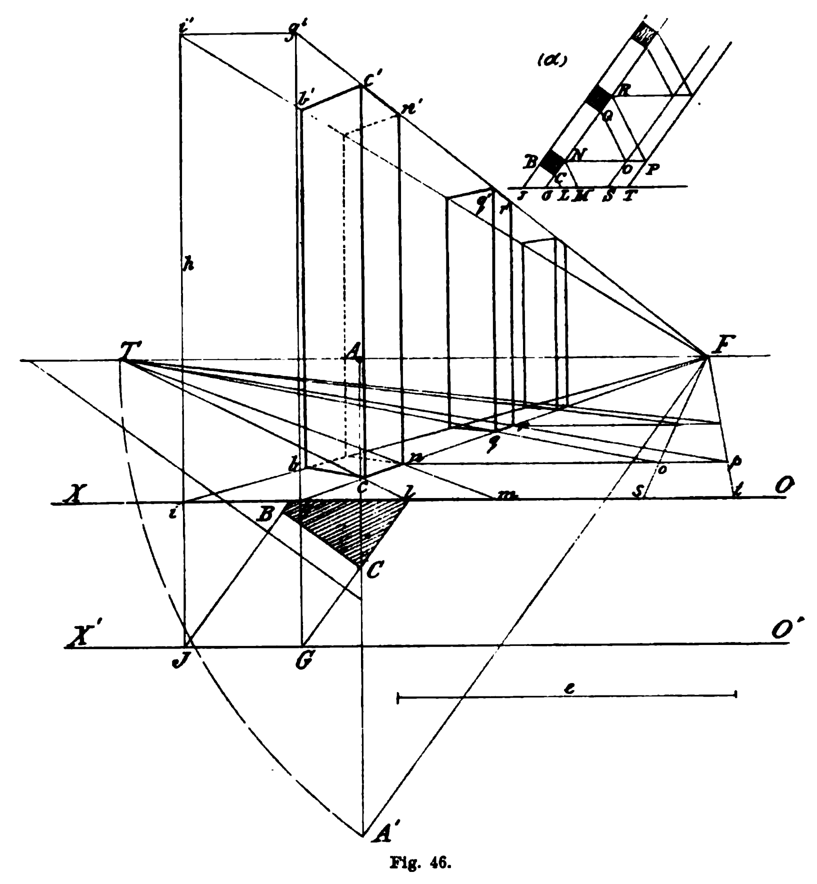


Fig. 46.

der Seite der Grundfläche eines der Pfeiler und ziehen von m eine Gerade nach T. Diese trifft gF in einem zweiten Eckpunkte n (vergl. Fig. 44).

Um die beiden auf gF liegenden Ecken der Grundfläche des folgenden Pfeilers zu bestimmen, trage man auf OX von g aus die Strecken gs = e und st = lm an; ziehe sF und tF, und durch den Eckpunkt n die Gerade np parallel zur Achse. Auf der letzteren werden durch sF und tF die Strecken no und op abgeschnitten, welche die Abbildungen von Geraden darstellen, deren wahre Längen gleich gs und st sind. Zieht man demnach von o und p Geraden nach dem Teilungspunkte T, so schneiden dieselben auf gF die gesuchten Eckpunkte q und r des nächsten Pfeilers ab. Von r aus kann man wie vorhin von m aus weitergehend die entsprechenden

Ecken des dritten Pfeilers bestimmen u. s. f. (s. Fig. 45). Das Auftragen der Höhen ist wie früher auszuführen.

In der Nebenfigur (α) ist der Grundriss in kleinem Massstabe dargestellt, mit denjenigen Hilfslinien, welche zur Bestimmung der Abbildungen der in der Horizontalebene liegenden Ecken gedient haben. Es ist $GL = CG$, $GM = GN$, $GS = e$, $ST = BC$; $PT \parallel SO \parallel GR$; $OQ \parallel PR \parallel MN$, $NP \parallel GT$ u. s. f. Man vergl. nun (α) mit dem perspektivischen Grundriss in Fig. 46.

Aufgaben.

32a) ab ist die Abbildung einer Geraden und c diejenige eines Punktes, welche beide in der Horizontalebene liegen. Es soll der senkrechte Abstand des Punktes c von der Geraden ab bestimmt werden.

32b) abc ist die Abbildung eines Dreiecks, welches senkrecht zur Horizontalebene steht und dessen Seite ac in dieser liegt. Man soll die wahre Gestalt des Dreiecks ermitteln.

33) Abbildung einer beliebig im Raume liegenden Geraden (Fig. 47).

Unsere nächste Aufgabe ist, zu zeigen, wie der Fluchtpunkt einer der Lage nach gegebenen Geraden Bc bestimmt werden kann. Bc treffe die Horizontalebene in B und BC sei die Horizontalprojektion der Geraden. Wir ziehen durch den Augenpunkt A_1 die Geraden A_1F parallel zu BC und A_1f parallel zu Bc. Da A_1F nun auch parallel zur Horizontalebene ist, so trifft sie die Bildfläche in einem Punkte F, welcher auf dem Horizont liegt und zugleich der Fluchtpunkt für BC ist, (s. I, 3). Legt man durch A_1f und A_1F eine Ebene, so ist dieselbe parallel mit der projicierenden Ebene BCc; sie steht also senkrecht zur Horizontalebene und schneidet die Bildfläche deshalb in einer Geraden Ff, welche senkrecht zur Achse steht. Hieraus geht hervor, dass A_1f die Bildfläche in dem senkrecht über F liegenden Punkte f schneidet. Nach Einleitung 3) ist aber f der Fluchtpunkt der Geraden Bc.

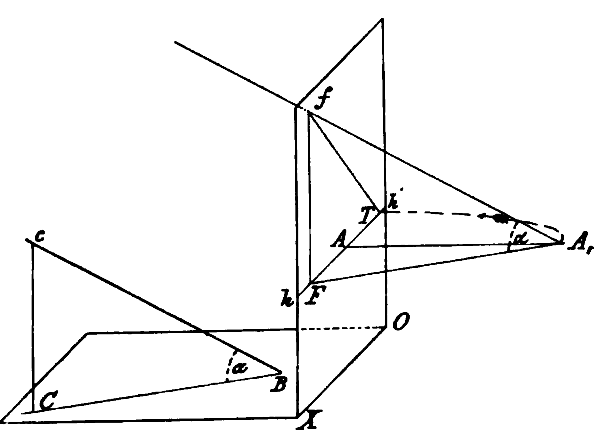


Fig. 47.

Anmerkung. Da $A_1F \parallel BC$, $A_1f \parallel Bc$, so ist $\angle cBC = \angle fA_1F$. Ferner ist $\angle BCc = \angle A_1Ff = 90°$. Folglich ist $\triangle BCc \sim \triangle A_1Ff$.

Man drehe das Dreieck A_1Ff um Ff, bis es in die Bildfläche fällt.

Da $\angle A_1Ff$ ein rechter Winkel ist, so fällt A_1F nach der Umklappung mit dem Horizont zusammen und A_1 gelangt nach T, wenn $FT = A_1F$ ist. Nach der Drehung hat das Dreieck die Lage FfT, und es ist $\angle FTf = \angle FA_1f = \angle cBC$. Aus der Konstruktion geht aber sofort hervor, dass T der Teilungspunkt für die Abbildung der Geraden BC ist.

Hiernach ist die Ausführung der Konstruktion auf der ebenen Zeichenfläche in Fig. 48 dargestellt. Die abzubildende Gerade ist gegeben durch ihre Horizontalprojektion BC, ihre wahre Länge B′C′ und ihren Neigungswinkel $C'B'C'' = \alpha$ gegen die Horizontalebene; in B schneide sie die letztere. Von dem in die Bildfläche niedergeklappten Augenpunkte A_1 ziehen wir die Gerade A_1F parallel zu BC, dann erhalten wir in F den Fluchtpunkt der Horizontalprojektion der gegebenen Geraden. Mit Hilfe eines um F als Mittelpunkt und FA_1 als Halbmesser gezeichneten Kreisbogens bestimmen wir alsdann den Teilpunkt T der Projektion BC. Die Spur E der letzteren übertragen wir durch die zur Achse Senkrechte Ee nach e, dann erhalten wir in der Verbindungslinie eF die Abbildung der Geraden, in welche diejenige der Projektion hineinfällt. Machen wir noch $e\beta = EB$, $e\gamma = EC$ und ziehen die Geraden βT und γT, so schneiden diese auf EF die Strecke bc′, nämlich die Abbildung der gegebenen Projektion BC ab.

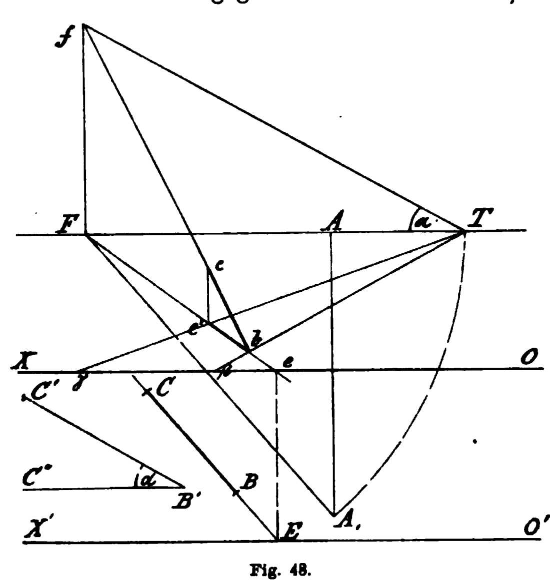


Fig. 48.

In T legen wir den Neigungswinkel $FTf = \alpha$ an den Horizont und ziehen Ff senkrecht zu dem letzteren, dann erhalten wir in dem Schnittpunkt f, wie sich aus Fig. 47 ergiebt, den Fluchtpunkt der gegebenen Geraden, deren Abbildung nun von b nach f gerichtet ist. Zieht man noch durch c′ die Gerade cc′ senkrecht zur Achse, so schneidet diese auf bF die gesuchte Abbildung bc ab.

Wenn die abzubildende Gerade in einer Ebene liegt, welche senkrecht zur Bildfläche und Horizontalebene zugleich steht, so liegt der Fluchtpunkt, wie man leicht sieht, in der durch A gehenden zum Horizont senkrechten Geraden.

Aufgaben:

34) Die Abbildung eines geraden dreiseitigen Prismas zu finden, welches mit einer Seitenfläche auf der Horizontalebene liegt, Fig. 49.

Das Prisma ist gegeben durch seine Horizontalprojektion BCEG und durch die wahre Gestalt seiner Grundfläche, welche durch das in die Horizontalebene niedergeklappte gleichschenklige Dreieck CEJ′ dargestellt wird (CJ′ = EJ′).

Nachdem die Abbildung bceg des Rechtecks BCEG gefunden ist, wird nach (31) der Teilpunkt T der Geraden bg und ce bestimmt. In T ist

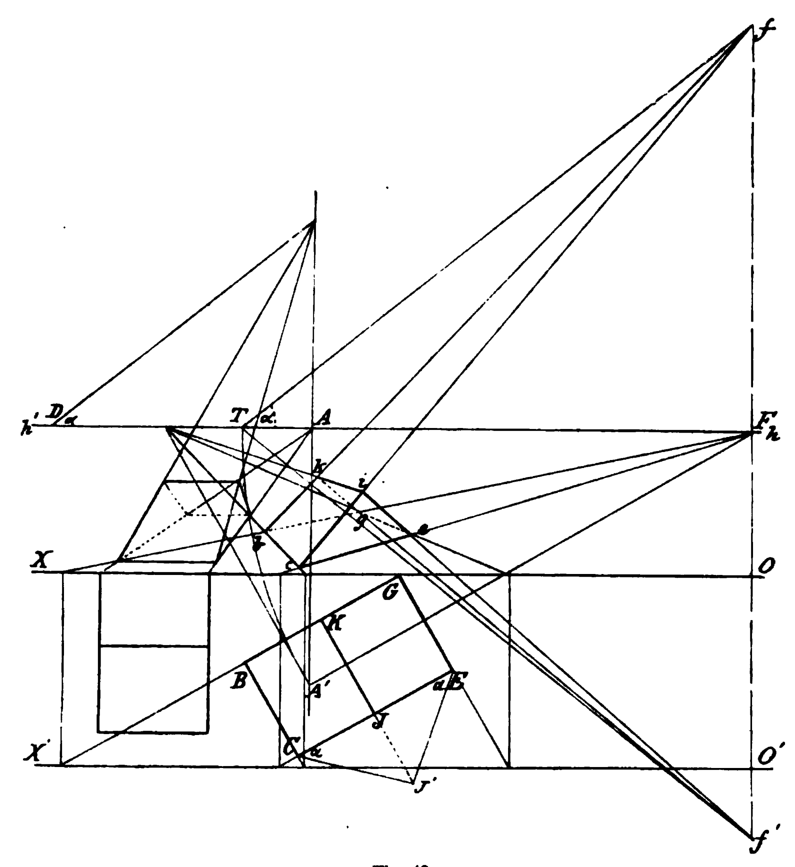


Fig. 49.

dann der Winkel α, welchen die gleichen Schenkel des Dreiecks CEJ′ mit der Grundlinie bilden, sowohl oberhalb, als auch unterhalb des Horizonts anzutragen. Die Schenkel treffen die in F zu hh′ gezogene Senkrechte in den Punkten f und f′, welche nun die bez. Fluchtpunkte der beiden zur Horizontalebene geneigten Kantenpaare des Prismas sind. Die Abbildungen des einen Paares sind von b und c nach f gerichtet, diejenigen des anderen Paares liegen in den Geraden von f′ durch e und g. Durch die Schnitt-

punkte k und i ergiebt sich endlich noch die Abbildung der letzten Kante i k.

In Fig. 49 ist links noch eine zweite Abbildung desselben Körpers dargestellt, wenn die Kanten BG und CE senkrecht zur Achse stehen. Die Fluchtpunkte der beiden Paare schräger Kanten liegen dann auf einer zur Achse OX senkrechten Geraden, welche durch den Hauptpunkt A geht. Man findet diese beiden Punkte leicht, wenn man in einem der Distanzpunkte den Winkel α sowohl oberhalb als auch unterhalb an den Horizont legt. Siehe die angegebene Konstruktion in Fig. 49.

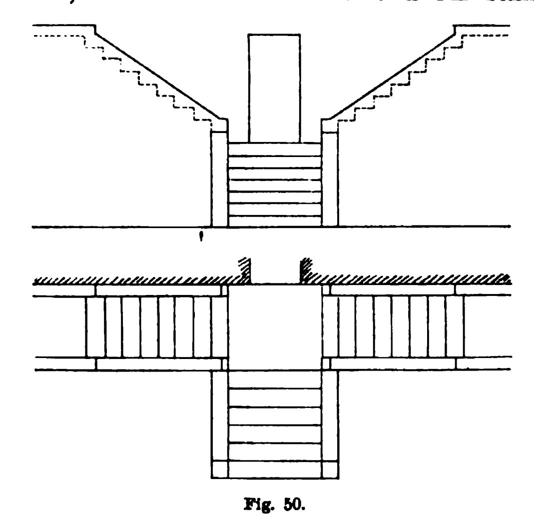


Fig. 50.

Zur eigenen Übung konstruiere man eine gerade sowohl als auch eine schiefe perspektivische Abbildung der in Fig. 50 durch Grundriss und Aufriss dargestellten Treppe. Der Studierende findet hierbei Gelegenheit, die meisten der bisher entwickelten Gesetze zur Anwendung zu bringen.

II. Abschnitt.

Allgemeine Darstellung gerader Linien und Ebenen in der Linearperspektive.

Durch die Lösung der Aufgabe, die Abbildung einer beliebigen Geraden zu finden, ist die Möglichkeit gegeben, die Abbildung eines jeden Gebildes, welches aus Geraden zusammengesetzt ist, herzustellen. Die Linearperspektive könnte man mit diesem Satze als abgeschlossen ansehen, da alles folgende (auch die punktweise zu bestimmenden Abbildungen krummer Linien) nur Anwendungen der bisher aufgestellten Gesetze und Konstruktionen sind. Es ist jedoch von Interesse, auch auf weitere Aufgaben über Punkt, gerade Linie und Ebene einzugehen. Wir fügen deshalb der Vollständigkeit wegen diesen Abschnitt besonders für diejenigen hinzu, denen ein tieferes Eindringen in die Gesetze der Linearperspektive erwünscht ist. Wenngleich diese Gesetze vorwiegend theoretisches Interesse beanspruchen, so werden wir doch später auch Fälle kennen lernen, in welchen dieselben praktisch mit Vorteil zu verwerten sind.

1) Die Abbildung einer unbegrenzten Geraden Bs ist bestimmt, sobald ihre Spur s und ihr Fluchtpunkt f bekannt sind. Ist A (Fig. 51 β) der Hauptpunkt, D der Distanzpunkt, so denke man sich in A (Fig. 51 α) eine

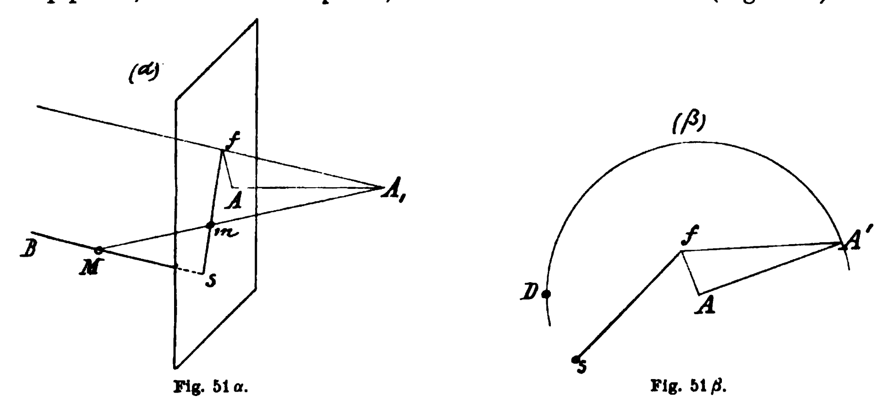


Fig. 51 α. Fig. 51 β.

Senkrechte AA_1 zur Zeichenfläche errichtet, so dass $AA_1 = AD$ ist, dann erhält man in A_1 den Augenpunkt. Diejenige Gerade, welche A_1 mit f verbindet, ist der Parallelstrahl zu der räumlichen Geraden Bs, deren Abbildung sf ist. Das bei A rechtwinklige Dreieck AA_1f können wir durch Drehung um Af in die Bildfläche niederlegen, so dass dasselbe in (β) die Lage AA′f annimmt (wo $AA' \perp Af$ und $= AD$ ist). Dann ist $\angle AfA'$ der Neigungswinkel des Parallelstrahles, also auch gleich demjenigen der Geraden Bs gegen die Bildfläche. Zugleich stellt A′f die wahre Länge des vom Augenpunkte ausgehenden Parallelstrahls zu Bs dar.

Es ist hieraus ersichtlich, dass die, durch Spur und Fluchtpunkt gegebene Abbildung einer Geraden, die Lage der letzteren im Raume bestimmt. Ist m die auf fs liegende Abbildung eines Punktes M der Geraden Bs, so sieht man leicht, dass die Lage von M durch m bestimmt ist. M ist der Schnittpunkt des durch m gehenden Sehstrahls mit Bs.

In den folgenden Entwicklungen ist eine Gerade G stets durch ihre Spur s und ihren Fluchtpunkt f gegeben, was wir kurz durch G (s, f) (d. h. die Gerade G, deren Spur s und Fluchtpunkt f ist) bezeichnen wollen. Ein Punkt M ist durch seine Abbildung m, und die Abbildung einer durch den Punkt gehenden Geraden G (s, f) bestimmt.

Anmerkung. Ein um den Hauptpunkt A als Mittelpunkt gezeichneter Kreis, welcher in der Bildfläche liegt und dessen Halbmesser gleich der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche ist, heisst der Distanzkreis. Jeder Strahl, welcher einen Punkt dieses Kreises mit dem Augenpunkte verbindet, bildet mit der Bildfläche einen Winkel von 45°. Daher liegen auf dem Distanzkreise die Fluchtpunkte aller unter 45° gegen die Bildfläche geneigten Geraden.

Darstellung der Ebenen.

2) Es sei V (Fig. 52) die Bildfläche, E eine beliebige Ebene, welche V in bc, der Spur der Ebene E, schneidet. Wir legen durch den Augenpunkt A_1 eine Ebene P, parallel zu E; dann ist die Schnittlinie ge der Ebenen P und V parallel zu bc. Soll eine in E liegende Gerade sm abgebildet werden, so zieht man zur Bestimmung des Fluchtpunktes derselben den zu sm gehörigen Parallelstrahl A_1f. Dieser liegt aber in der Ebene P und schneidet deshalb die Bildfläche in einem Punkte f. der Linie ge, welcher der Fluchtpunkt jener Geraden ist. Die Spur s der letzteren liegt auf der Spur bc und die Abbildung dieser Geraden ist dann sf. Da dasselbe für alle in E liegenden Geraden gilt, so folgt hieraus:

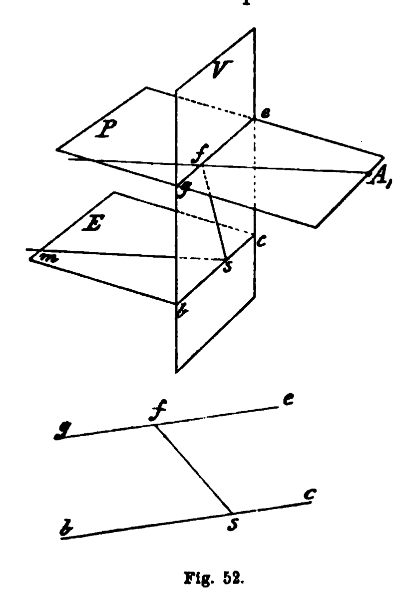


Fig. 52.

Die Fluchtpunkte aller Geraden der Ebene E liegen in ge, welche die Fluchtlinie der Ebene E genannt wird. Diese Linie enthält somit die Abbildungen aller unendlich fernen Punkte der Ebene E. Der Teil der Bildfläche, welcher zwischen der Spur bc und der Fluchtlinie ge der Ebene E liegt, stellt demnach die Abbildung desjenigen bis ins Unendliche erweiterten Teiles der Ebene E dar, welcher auf der dem Augenpunkte A_1 entgegengesetzten Seite der Bildfläche liegt. So ist z. B. der Horizont die Fluchtlinie der Horizontalebene. (Vergl. auch 3 u. 5 I. Abschnitt.)

Weil zu allen Ebenen, welche der Ebene E parallel sind, nur die eine Parallelebene P durch den Augenpunkt gelegt werden kann, so folgt daraus, dass ge die gemeinsame Fluchtlinie aller zu P oder E parallelen Ebenen ist, oder dass allgemein parallele Ebenen eine gemeinschaftliche Fluchtlinie haben. Und weil ferner alle zu ms parallelen Geraden auch parallel zur Ebene E sind und nach (Einleitung 4δ) denselben Fluchtpunkt haben, so folgt:

Ist eine Gerade G parallel zu einer Ebene E, so liegt der Fluchtpunkt der Geraden auf der Fluchtlinie der Ebene.

Folgende spezielle Gesetze ergeben sich leicht aus den obigen Entwickelungen. Die Fluchtlinien aller Ebenen, welche senkrecht zur Bildfläche stehen, gehen durch den Hauptpunkt.

Die Fluchtlinie einer Ebene, welche erweitert durch den Augenpunkt geht, fällt mit ihrer Spur zusammen. Die Abbildungen aller Geraden dieser Ebene liegen in der Spur derselben.

Die Fluchtlinie einer Ebene, welche zur Bildfläche und Horizontalebene zugleich senkrecht steht, geht durch den Hauptpunkt und steht senkrecht zur Achse.

Mit Hilfe dieser Gesetze können wir nun eine Reihe von Aufgaben über gerade Linien und Ebenen lösen. Bei allen Aufgaben, in denen es sich lediglich um Lagenbeziehungen handelt, braucht man den Hauptpunkt und die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche nicht zu kennen. Diese Stücke sind jedoch stets notwendig, wenn wahre Dimensionen aus der Abbildung ermittelt oder Masse perspektivisch abgetragen werden sollen.

Ist die Lage einer Ebene E durch ihre Spur S und ihre Fluchtlinie F gegeben, so deuten wir dies durch das Zeichen E (S, F) (d. h. die Ebene E, deren Spur S und Fluchtlinie F ist) an.

3) Die Abbildung der Durchschnittslinie der beiden Ebenen E_1 (S_1, F_1), E_2 (S_2, F_2) zu finden (Fig. 53).

Da die Spur s der Durchschnittslinie auf den Spuren S_1 und S_2 und der Fluchtpunkt f auf den Fluchtlinien F_1 und F_2 der gegebenen Ebene liegen muss, so ist die gesuchte Abbildung die Gerade sf, welche den Schnittpunkt von S_1 und S_2 mit demjenigen von F_1 und F_2 verbindet.

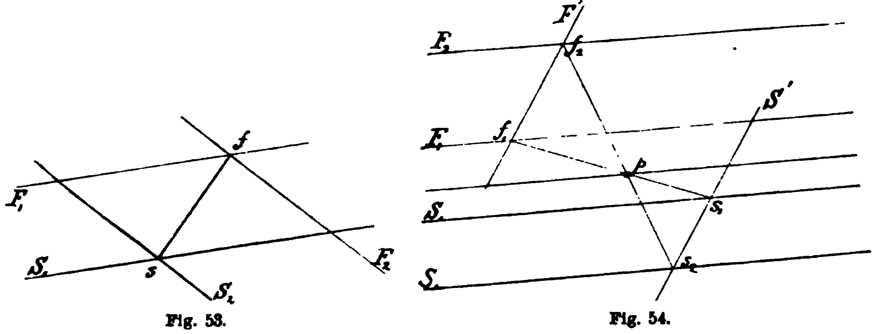


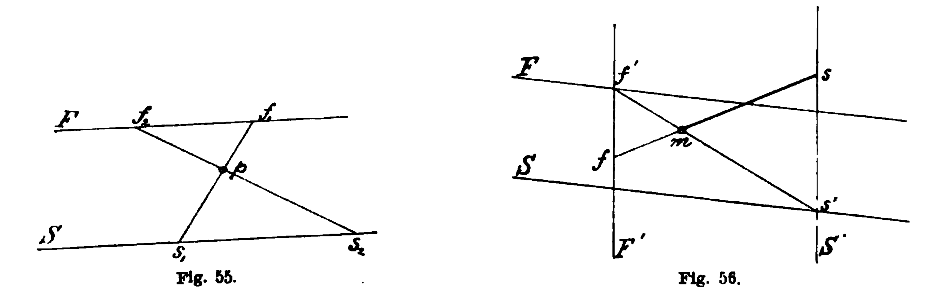
Fig. 53. Fig. 54.

4) Dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn die Spur und Fluchtlinie der einen Ebene E_1 parallel mit derjenigen der anderen Ebene E_2 sind (Fig. 54).

Wir nehmen eine Ebene E′ zu Hilfe, deren Spur S′ und Fluchtlinie F′ durch zwei beliebig zu ziehende Parallelen dargestellt werden können. Dann sind die Abbildungen der beiden Durchschnittslinien von E′ mit E_1 und E_2 bez. $s_1 f_1$ und $s_2 f_2$ und der Durchschnittspunkt p der letzteren liegt nun auf der gesuchten Abbildung mn der Schnittlinie von E_1 und E_2, welche in diesem Falle parallel zu S_1 und F_1 ist.

5) Sind s_1 und s_2 (Fig. 55) die Spuren zweier in einem Punkte P (dessen Abbildung p ist) sich schneidenden Geraden G_1 und G_2 und f_1 der Fluchtpunkt von G_1, so kann der Fluchtpunkt der Geraden G_2 ebenfalls leicht bestimmt werden. Die durch s_1 und s_2 gehende Gerade S stellt nämlich die Spur der Ebene dar, welche man durch G_1 und G_2 legen kann. Die

Fluchtlinie F dieser Ebene geht durch f_1 und sie ist parallel zu S. Dieselbe trifft s_2p in dem gesuchten Fluchtpunkte f_2.

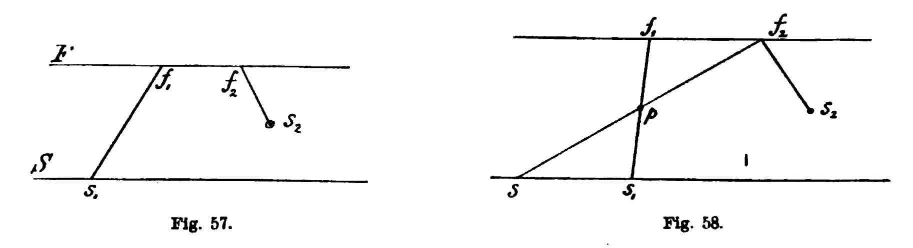

Fig. 55. Fig. 56.

6) Die Abbildung des Durchschnittspunktes der Geraden G (sf) mit der Ebene E (S, F) zu finden (Fig. 56).

Wir legen durch die Gerade G eine beliebige Ebene E′ (S′ F′). (S′ geht durch s und F′ durch f). Die Abbildung s′f′ der Durchschnittslinie der beiden Ebenen E und E′ trifft sf in dem gesuchten Punkte m.

7) Spur und Fluchtlinie einer Ebene zu finden, welche durch die Gerade $G_1(s_1f_1)$ geht und parallel zu der Geraden $G_2(s_2f_2)$ ist (Fig. 57).

Da G_1 in der gesuchten Ebene liegt, so gehen Spur und Fluchtlinie derselben durch s_1 bez. f_1. Ferner muss nach (1) der Fluchtpunkt f_2 der


Fig. 57. Fig. 58.

Geraden G_2 auf der Fluchtlinie der gesuchten Ebene liegen. Man ziehe demnach durch f_1 und f_2 die Fluchtlinie F, und durch s_1 die zu F parallele Spur S der Ebene.

8) Spur und Fluchtpunkt der Geraden G zu finden, welche durch den auf der Geraden G_1 (s_1f_1) liegenden Punkt P (p) geht und parallel zu der Geraden G_2 (s_2, f_2) ist (Fig. 58).

Die gesuchte Gerade G hat mit G_2 den Fluchtpunkt f_2 gemeinschaftlich, ihre Abbildung geht deshalb durch f_2 und p. Legen wir nun durch G und G_1 eine Ebene, so ist f_1f_2 die Fluchtlinie und die durch s_1 gehende Parallele s_1s die Spur derselben. Auf der letzteren liegt die Spur s der Geraden G.

9) Durch den Punkt P (p), welcher auf der Geraden G_1 (s_1f_1) liegt, und durch die Gerade G_2 (s_2f_2) eine Ebene zu legen (Fig. 59).

Wir ziehen durch p die Gerade $f_2 p$. Diese ist die Abbildung einer zu G_2 ($s_2 f_2$) parallelen Geraden. Ihre Spur ergiebt sich leicht mit Hilfe der durch die beiden in p sich schneidenden Geraden gelegten Ebene (S′F′) in s. Die Gesuchte Ebene geht nun durch die beiden Parallelen (sf_2) und (s_2, f_2). Ihre Spur ist also die durch s und s_2 bestimmte Gerade S und die Fluchtlinie F geht durch f_2.

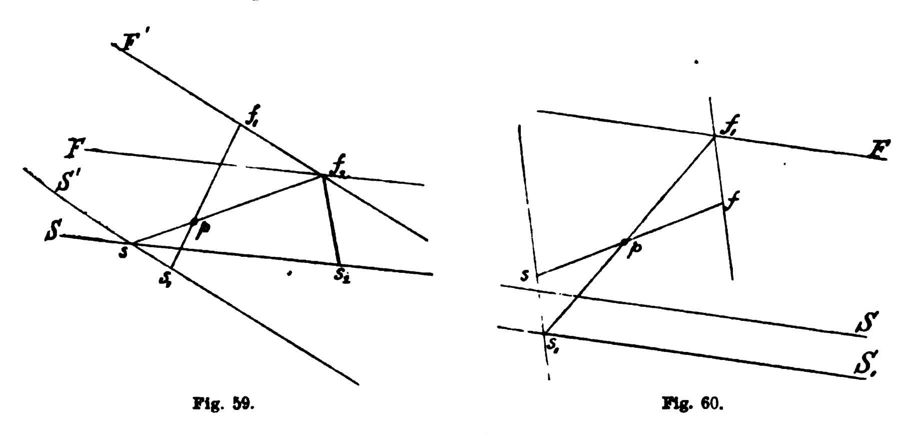


Fig. 59. Fig. 60.

10) Durch den auf der Geraden G (s, f) liegenden Punkt P (p) eine Ebene zu legen, welche der Ebene E (S, F) parallel ist (Fig. 60).

Wir ziehen durch P (p) eine Parallele zu der gegebenen Ebene E. Der Fluchtpunkt f_1 derselben kann auf F beliebig gewählt werden, dann ist pf_1 die Abbildung dieser Linie. Durch die letztere und durch die Gerade g legen wir eine Ebene, deren Fluchtlinie durch f und f_1 geht. Die Spur dieser Ebene geht durch s und ist parallel zu ff_1; sie schneidet pf_1 in der Spur s_1. Da nun ($s_1 f_1$) die Abbildung einer Geraden ist, welche in der gesuchten Ebene liegt, so geht die Spur S_1 der letzteren durch s_1 und zwar ist sie parallel zu F. Die Fluchtlinie der gesuchten Ebene fällt mit F zusammen (s. 2).

11) Spur und Fluchtpunkt der Geraden zu finden, welche durch die beiden Punkte P_1 (p_1) und P_2 (p_2) geht. P_1 liegt auf der Geraden G_1 ($s_1 f_1$), P_2 auf G_2($s_2 f_2$) (Fig. 61).

Nach 9) legen wir durch den Punkt P_2 (p_2) und die Gerade G_1 ($s_1 f_1$) die Ebene E (S, F). Da nun die beiden gegebenen Punkte in dieser Ebene liegen, so findet man durch Verlängerung der Geraden $p_1 p_2$ den Fluchtpunkt f und die Spur s derselben auf F bez. S.

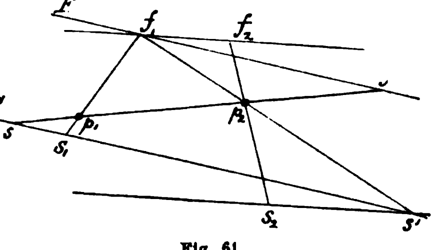


Fig. 61.

12) Die Abbildung der Geraden zu finden, welche durch den auf der Geraden $G_1(s_1 f_1)$ liegenden Punkt P (p) geht und die beiden gegebenen Geraden $G_2(s_2 f_2)$, $G_3(s_3 f_3)$ schneidet.

13) Die Abbildung (Spur und Fluchtpunkt) einer Geraden zu finden, welche zwei gegebene Geraden $G_1(s_1 f_1)$, $G_2(s_2 f_2)$ schneidet, und einer dritten gegebenen Geraden $G_3(s_3 f_3)$ parallel ist.

14) Spur und Fluchtlinie derjenigen Ebene zu finden, welche durch den Punkt P(p) . geht, und parallel zu den beiden Geraden $G_1(S_1 F_1)$, $G_2(S_2 F_2)$ ist.

15) Spur und Fluchtlinie der Ebene zu finden, welche durch die drei Punkte $P_1(p_1)$, $P_2(p_2)$ und $P_3(p_3)$ geht, wenn die letzteren bez. auf den drei Geraden $G_1(S_1 F_1)$, $G_2(S_2 F_2)$, $G_3(S_3 F_3)$ liegen.

Anleitung zur Auflösung. Man bestimme nach 11 die Spur und den Fluchtpunkt einer Geraden, welche durch zwei der gegebenen Punkte geht; dadurch wird die Aufgabe auf 9) zurückgeführt.

16) Den Winkel zu finden, welchen die Ebene E (S, F) mit der Bildfläche bildet (Fig. 62).

Die Ebene des gesuchten Neigungswinkels steht senkrecht zur Spur S. Legen wir dieselbe durch den Augenpunkt A_1 (welchen man sich auf der im Hauptpunkt A zur Zeichenfläche errichteten Senkrechten vorstellen muss), so fällt die Spur dieser Ebene in diejenige Gerade ff_1, welche durch A geht und senkrecht zu S und F steht. Durch A_1 und F ist nun die durch den Augenpunkt gehende Parallelebene zur Ebene E bestimmt, welche zu der Bildfläche unter dem gleichen Winkel wie E geneigt ist. Der gesuchte Winkel liegt demnach in dem rechtwinkligen Dreieck AA_1f, welches durch Umlegen in die Bildfläche die Lage AA_2f annimmt (AA_2 ist gleich der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche und steht senkreckt zu Af). Hiernach ist A_2fA der gesuchte Winkel. Ziehen wir A_2f_1 senkrecht zu A_2f und trifft A_2f_1 die Gerade Af in f_1, so ist f_1 offenbar der Fluchtpunkt aller zur Ebene E (S, F) senkrechten Geraden.

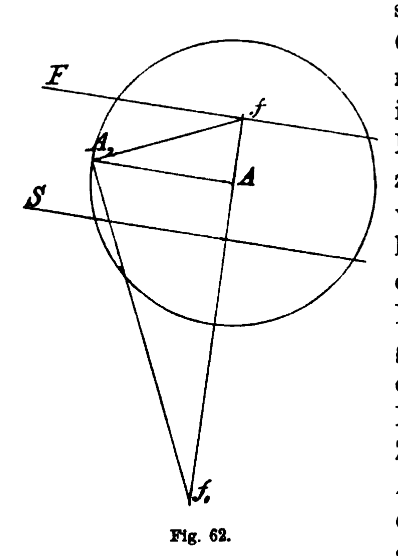


Fig. 62.

Zusatz. Die Fluchtlinien aller Ebenen, welche zur Ebene E (S, F) senkrecht stehen, gehen durch f_1.

17) Auf der Geraden G (s, f) ist von einem auf derselben gegebenen Punkte P (p) die gegebene Strecke m perspektivisch abzutragen (Fig. 63)

Wir legen durch die Gerade G eine Ebene, welche senkrecht zur Bildfläche steht. Ihre Fluchtlinie F geht durch f und den Hauptpunkt, die Spur S durch s.

Für die gegebene Gerade können wir nun wie in (I 31) einen Teilungspunkt konstruieren, welcher auf F liegt. Wir ziehen AA_2 senkrecht zu F und machen AA_2 gleich der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche. Um f zeichnen wir mit dem Halbmesser fA_2 einen Kreisbogen, welcher auf F den Teilpunkt T bestimmt. (Achse und Horizont bedeuten in I 31 Spur und Fluchtlinie der Horizontalebene). Ziehen wir nun Tp bis dieselbe S in c schneidet, machen $cd = m$ und ziehen alsdann die Gerade dT, so wird durch die letztere die Strecke pq bestimmt, welche die gesuchte Abbildung einer Strecke von der Länge m darstellt. Ist umgekehrt die Strecke pq auf sf gegeben, so sieht man leicht, wie die wahre Länge derselben gefunden werden kann.

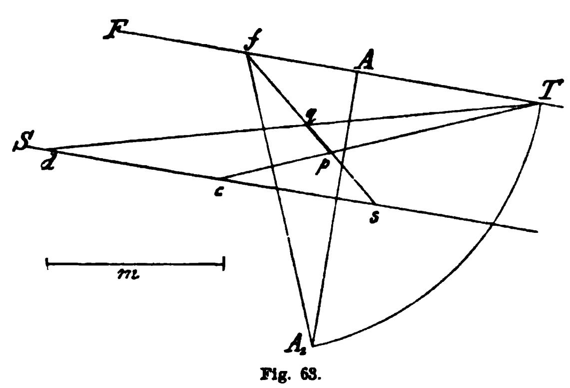


Fig. 63.

18) Den Abstand des auf der Geraden G (s, f) liegenden Punktes P (p) von der Ebene E (S, F) zu bestimmen (Fig. 64).

Wir bestimmen wie in 16) den Fluchtpunkt f′ der zur E senkrechten Geraden, ziehen pf′, welche die Abbildung des von P (p) auf E gefällten Lotes darstellt. Durch das letztere und G (s, f) legen wir eine Ebene, deren Fluchtlinie ff′ ist und deren Spur parallel zu ff′ ist und durch s geht. Diese trifft pf′ in ihrer Spur s_1. Um den Durchschnitt des Lotes mit der gegebenen Ebene zu finden, legen wir durch s_1f' eine zur Bildfläche senkrechte Ebene, deren Fluchtlinie somit die Gerade f′A, und deren

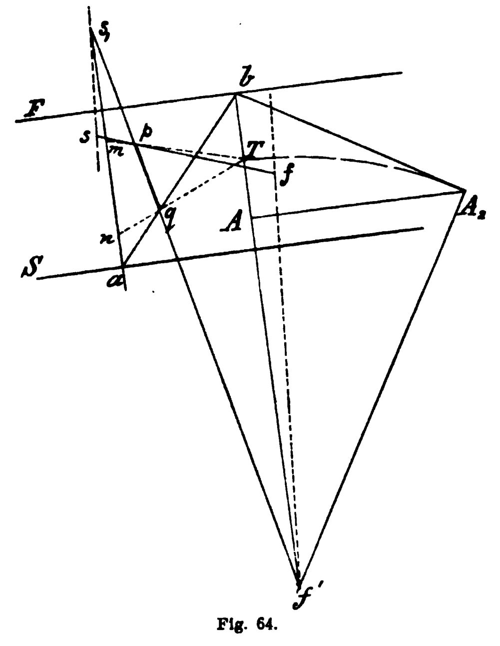


Fig. 64.

Spur parallel $f'A$ ist und durch s_1 geht. Die Abbildung der Schnittlinie beider Ebenen ist ab, und die letztere wird von $f'p$ in q getroffen; pq ist nun die Abbildung des gesuchten Abstandes. Man bestimmt mit Hilfe des um f' mit dem Halbmesser $f'A_2$ beschriebenen Kreisbogens A_2T den Teilpunkt T für $f'p$. Die von T durch p und q gezogenen Geraden schneiden alsdann auf der Spur as_1 die wahre Länge von pq in der Strecke mn ab.

19) Die Abbildung der Achse zweier windschiefen Geraden $G_1(s_1f_1)$. und $G_2(s_2f_2)$ zu finden (Fig. 65).

Wir legen durch G_2 die Ebene $E(S, F)$ parallel zu der Geraden G_1 (s. 7). Die Fluchtlinie F dieser Ebene ist f_1f_2, während ihre Spur S durch s_2 geht.

Jetzt bestimmen wir nach 16 den Fluchtpunkt f' aller zu E senkrechten Geraden; legen durch $G_1(s_1f_1)$ die Ebene $E_1(S_1F_1)$ senkrecht zur Ebene E. Nach 16) ist $f'f_1$ die Fluchtlinie, und die durch s_1 gehende Parallele s_1a zu $f'f_1$ die Spur dieser Ebene. Die Abbildung ihrer Schnittlinie mit der Ebene $E(F, S)$ erhält man in af_1, welche $G_2(s_2f_2)$ in c trifft. Zieht man nun durch c die Gerade bf', so ist bf' die Abbildung einer Geraden, welche senkrecht zur Ebene $E(F, S)$ (weil f' ihr Fluchtpunkt ist), folglich auch senkrecht zu der Geraden $G_2(s_2f_2)$ steht. Ferner trifft sie auch die Gerade $G_1(s_1f_1)$ in b, weil beide in derjenigen Ebene liegen, deren Spur und Fluchtlinie as_1 bez. $f'f_1$ sind. Endlich steht $f'b$ auch senkrecht auf $G_1(s_1f_1)$, weil letztere parallel zur Ebene $E(F, S)$ ist. Folglich ist bc die Abbildung der Achse der beiden Windschiefen. Die wahre Länge derselben kann wie in 18) bestimmt werden.

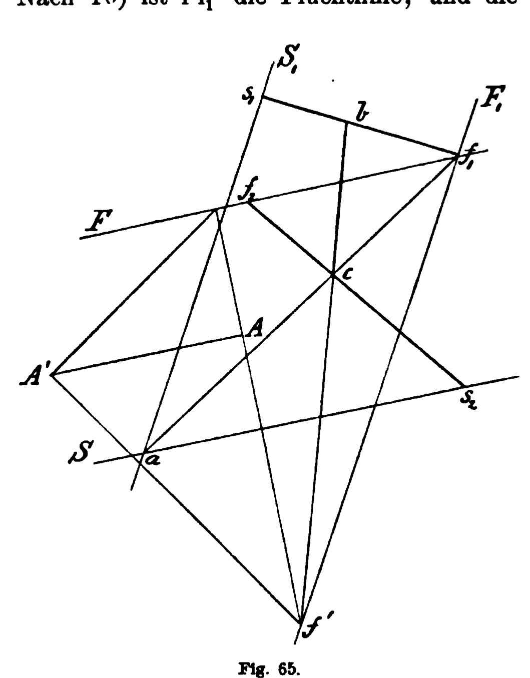


Fig. 65.

20) Durch den auf der Geraden $G_1(s_1f_1)$ liegenden Punkt $P(p)$ eine Ebene E zu legen, welche zu der Geraden $G_2(s_2f_2)$ senkrecht steht (Fig. 66).

Da E senkrecht zu G_2 stehen soll, so ist f_2 der Fluchtpunkt aller zu E senkrechten Geraden. Nach 16) kann man nun hieraus die Fluchtlinie der Ebene E finden. Ziehe f_2A, und mache AA_1 senkrecht zu f_2A und gleich der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche. Ferner zieht

man $A_1 f \perp A_1 f_2$, dann treffen sich $A_1 f$ und A_2 in dem Punkte f, durch welchen, wie der Vergleich mit Fig. 62 zeigt, die Fluchtlinie F der Ebene E gehen muss. Dieselbe steht senkrecht zu $f_2 f$. Da F die Fluchtlinie aller zu der Geraden $G_2 (s_2 f_2)$ senkrechten Ebenen ist, so ist zunächst F unabhängig von der Lage des gegebenen Punktes P (p), weshalb bis hierher p auch noch nicht benutzt worden ist. Wir ziehen jetzt durch p eine beliebige Gerade $G'(s'f')$, und nehmen ihren Schnittpunkt f' mit F als Fluchtpunkt an. Die Spur s' finden wir mittelst einer durch $(s_1 f_1)$ durch $(s'f')$ gelegten Ebene, deren Fluchtlinie $f'f_1$ und Spur die durch s_1 gehende Parallele $s_1 s'$ zu $f_1 f'$ ist. Nun ist $f's'$ die Abbildung einer Geraden, welche in der gesuchten Ebene E liegt, folglich ist die Spur der letzteren die Gerade S, welche durch s' parallel zu F gelegt werden kann.

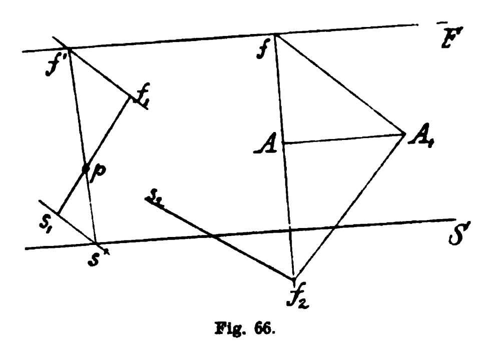


Fig. 66.

21) Den Abstand des auf der Geraden $G_1 (s_1 f_1)$ liegenden Punktes P (p) von der Geraden $G_2 (s_2 f_2)$ zu finden.

Anleitung zur Auflösung. Die Aufgabe kommt auf die vorige zurück. Es ist nur noch der Durchschnittspunkt der Geraden $G_2 (s_2 f_2)$ mit der in Fig. 66 gefundenen Ebene E (S F) zu bestimmen. Die Verbindungslinie dieses Punktes mit P (p) ist die von dem letzteren auf G_2 gefällte Senkrechte, deren wahre Länge nach 18) zu ermitteln ist.

22) Es sind die Abbildungen zweier sich schneidenden Geraden G_1 und G_2 gegeben, und zwar die Abbildung a ihres Schnittpunktes, ausserdem ihre Fluchtpunkte f_1 und f_2. Man soll die Abbildung der Halbierungslinie des Winkels der beiden Geraden bestimmen (Fig. 67 α).

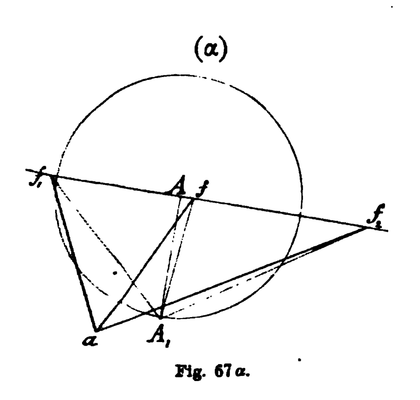


Fig. 67 α.

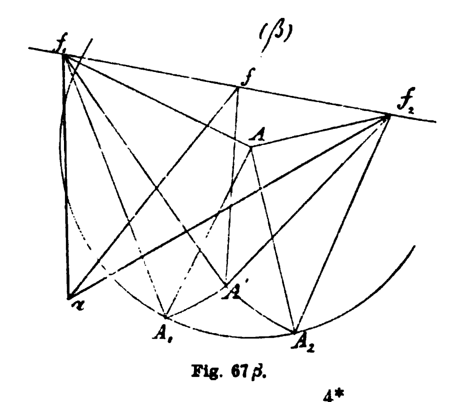


Fig. 67 β.

1. Fall. Der gegebene Winkel liege in einer zur Bildfläche senkrechten Ebene (Fig. 67 α).

In diesem Falle liegt der Hauptpunkt A auf der Fluchtlinie $f_1 f_2$ der Ebene des gegebenen Winkels. Zeichnen wir um A als Mittelpunkt den Distanzkreis und den Halbmesser AA_1 senkrecht zu $f_1 f_2$, dann sind die Geraden $A_1 f_1$ und $A_1 f_2$ die in die Bildfläche niedergeklappten Parallelstrahlen zu den Schenkeln des gegebenen Winkels, und somit $\angle f_1 A_1 f_2$ die wahre Grösse dieses Winkels. Durch die Gerade $A_1 f$ halbieren wir nun $\angle f_1 A_1 f_2$ dann ist, wie leicht zu sehen, f der Fluchtpunkt und af die gesuchte Abbildung der Halbierungslinie des Winkels der gegebenen Geraden.

2. Fall. Der gegebene Winkel liegt in einer beliebigen Ebene (Fig. 67 β).

Nach 1) des Abschnittes finden wir die wahren Längen der vom Augenpunkte ausgehenden, zu den Schenkeln des gegebenen Winkels gehörigen Parallelstrahlen, in den Hypothenusen der beiden bei A rechtwinkligen Dreiecke $A_1 A f_1$ und $A_2 A f_2$ (A_1 und A_2 liegen auf dem Distanzkreise). Machen wir deshalb $A' f_1 = A_1 f_1$ und $A' f_2 = A_2 f_2$, so ist $\angle f_1 A' f_2$ der in die Bildfläche niedergelegte Winkel. Seine Halbierungslinie trifft deshalb die Bildfläche in dem Fluchtpunkte f auf $f_1 f_2$. Folglich ist af die gesuchte Abbildung.

Anmerkung. Die Gerade durch A′ und A steht senkrecht zu $f_1 f_2$. Warum? Wie lässt sich die oben angegebene Konstruktion hiernach etwas einfacher ausführen?

23) Aus der Abbildung eines Quadrats, welches in einer zur Bildfläche senkrechten Ebene liegen soll, den Hauptpunkt und die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche zu finden (Fig. 68).

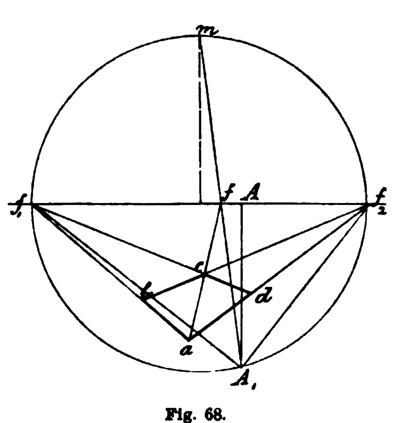


Fig. 68.

Es sei das beliebige Viereck abcd als Abbildung eines. Quadrats gegeben. Die beiden Paare gegenüberliegender Seiten schneiden sich in f_1 und f_2, den Fluchtpunkten derselben, und folglich ist $f_1 f_2$ die Fluchtlinie der . Ebene E des Quadrats.

Da ferner E nach Voraussetzung senkrecht zur Bildfläche steht, so liegt der Hauptpunkt A auf $f_1 f_2$. Die Strahlen, welche man vom Augenpunkt nach f_1 und f_2 zieht, sind aber parallel zu denjenigen Quadratseiten, welche f_1 und f_2 zu Fluchtpunkten haben, folglich bilden diese Strahlen beim Augenpunkte einen rechten Winkel miteinander. Denken wir uns den letzteren um $f_1 f_2$ in die Bildfläche gedreht, so fällt der Augenpunkt A_1 in

den Umfang des um $f_1 f_2$ als Durchmesser gezeichneten Kreises. Ferner ist der Schnittpunkt f von ac mit $f_1 f_2$ der Fluchtpunkt der Diagonale des Quadrats, folglich muss $A_1 f$ als Parallelstrahl derselben den rechten Winkel $f_1 A_1 f_2$ halbieren. Der Punkt A_1 muss auf dem Umfang des Kreises demnach so bestimmt werden, dass seine Verbindungslinie mit dem gegebenen Punkte f den Winkel $f_1 A_1 f_2$ halbiert. Ist m nun die Mitte des oberhalb $f_1 f_2$ liegenden Halbkreises, so ziehe man mf; diese schneidet verlängert den Umfang in A_1, denn $\angle f_1 A_1 m$ und $\angle f_2 A_1 m$ sind Peripheriewinkel, welche auf den gleichen Bögen $f_1 m$ und $f_2 m$ stehen. Der Hauptpunkt A wird durch die von A_1 zu $f_1 f_2$ gezogene Senkrechte $A_1 A$ gefunden; zugleich stellt $A_1 A$ die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche dar.

Die Spur der Ebene des Quadrats bleibt bei den gemachten Voraussetzungen unbestimmt, ebenso die wahre Grösse desselben. Denn abcd kann sowohl Abbildung eines Quadrats $\alpha\beta\gamma\delta$, als auch diejenige eines anderen Quadrats $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sein, dessen Ebene zu der des ersteren parallel ist und dessen Ecken mit denen des Quadrats $\alpha\beta\gamma\delta$ auf denselben Sehstrahlen liegen.

24) Es sei die Abbildung eines Rechtecks gegeben, welches in einer zur Bildfläche senkrechten Ebene liegt. Man soll den Hauptpunkt und die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche bestimmen, wenn das Verhältnis der Länge zur Breite des Rechtecks oder, was dasselbe ist, ein ähnliches Rechteck $\alpha\beta\gamma\delta$ gegeben ist (Fig. 69).

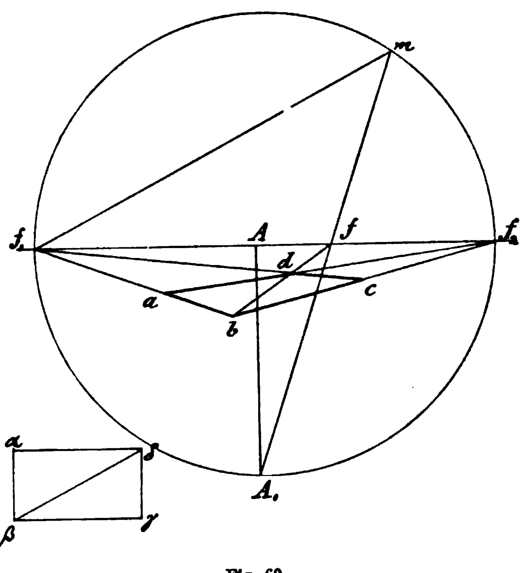


Fig. 69.

Wie in der vorigen Aufgabe verlängern wir zunächst die beiden Paare gegenüberliegender Seiten bis zu ihren Schnittpunkten f_1 und f_2, dann ist die Gerade $f_1 f_2$ die Fluchtlinie der Ebene des Rechtecks, auf welcher der gemachten Voraussetzung zufolge der Hauptpunkt A liegen muss. Verlängern wir noch bd bis f, so ist f der Fluchtpunkt der einen Diagonale des Rechtecks. Denkt man sich wieder den Augenpunkt wie in der vorigen Aufgabe in die Bildfläche niedergelegt, so dass derselbe in den Umfang des über $f_1 f_2$ als Durchmesser gezeichneten Kreises nach A_1

gelangt, so würden $A_1 f_1$, $A_1 f_2$ und $A_1 f$ die umgeklappten Parallelstrahlen zu den beiden Seiten des Rechtecks bez. zu der Diagonale desselben sein. Folglich müssen die Winkel $f_1 A_1 f$ und $f A_1 f_2$ den Winkeln $\alpha\beta\delta$ bez. $\delta\beta\gamma$ gleich sein. Man mache deshalb $\angle m f_1 f_2 = \angle \delta\beta\gamma$; verbinde den hierdurch erhaltenen Punkt m mit f durch eine Gerade, welche verlängert den Kreis in A_1 trifft. Man sieht dann leicht, dass $\angle m A_1 f_2$ ein mit $\angle m f_1 f_2$ auf demselben Bogen stehender Peripheriewinkel ist, woraus sich weiter ergiebt, dass auch $\angle m A_1 f_1 = \angle \alpha\beta\delta$ ist. Die Senkrechte von A_1 auf $f_1 f_2$ trifft letztere in dem gesuchten Hauptpunkte und $A_1 A$ ist gleich der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche.

Aus 23) und 24) geht hervor, dass ein beliebig gewähltes Viereck als Abbildung einer Quadrats oder auch eines Rechteckes von gegebenem Seitenverhältnis, welches in eines zur Bildfläche senkrechten Ebene liegt, angesehen werden kann. Hiervon kann man häufig bei der praktischen Ausführung perspektivischer Zeichnungen mit Vorteil Gebrauch machen. Man siehe (IV, 13).

Perspektivische Teilungen.

25) Die Konstruktionen der Abbildungen gleich langer Strecken, welche auf derselben Geraden liegen, sowie die Einteilung der gegebenen Abbildung einer Strecke in gleiche Teile oder in solche von gegebenem Verhältnis stützen sich auf den planimetrischen Satz, dass parallele Geraden auf anderen Geraden proportionierte Strecken abschneiden. Da nun die Abbildungen solcher Strecken, welche auf einer zur Bildfläche parallelen Geraden liegen, in wahren Längenverhältnissen erscheinen, so kann man solche auch zur perspektivischen Teilung anderer Geraden benutzen. Bemerkenswert ist, dass die Einteilung der gegebenen Abbildung einer Strecke stets unabhängig von der Lage des Hauptpunktes und der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche ausgeführt werden kann, sobald der Fluchtpunkt jener Strecke gegeben ist. Für die Bestimmung der Abbildung einer Strecke von gegebener Länge sind diese Stücke jedoch unentbehrlich.

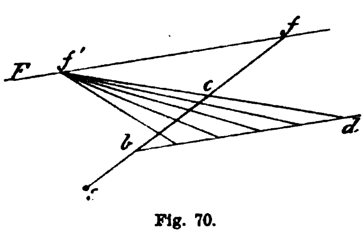


Fig. 70.

Auf der Geraden G (s, f) sind zwei Punkte b und c gegeben. Man soll die Strecke bc perspektivisch in n gleiche Teile teilen (Fig. 70). Wir legen durch die gegebene Gerade G eine Ebene E, deren Fluchtlinie die durch f beliebig gezogene Gerade F sein mag. Durch einen der Endpunkte der gegebenen Strecke, z. B. b, ziehen wir die Gerade bd parallel zu F, dann stellt bd die Abbildung einer zur Bildfläche parallelen Geraden dar, welche die gegebene Gerade schneidet und ebenfalls in E liegt. Auf bd tragen wir n gleiche Stücke ab, verbinden

den so erhaltenen Punkt d mit c und verlängern cd bis zum Schnittpunkt f′ mit F, dann ist f′ der Fluchtpunkt von cd. Ziehen wir nun von den Teilpunkten auf cd Geraden nach f′, so stellen diese die Abbildungen einer Schar von Parallelen mit dem gemeinsamen Fluchtpunkte f′ dar, welche bc in die verlangten Teile teilen.

Für die Abbildungen aller Geraden, welche in der Horizontalebene liegen oder parallel mit derselben sind, geht F in den Horizont über (s. I, 7).

III. Abschnitt.

Abbildungen des Kreises und der Umdrehungskörper.

Die Abbildungen krummer Linien werden, wie früher die Parallelprojektionen derselben, punktweise, oder durch eine Schar einhüllender Tangenten bestimmt. Liegt eine Kurve in einer zur Bildfläche parallelen Ebene, so ist die Abbildung eine ihr ähnliche Kurve; denn es sind in diesem Falle die Kurve und ihre Abbildung parallele Schnitte des von den Sehstrahlen gebildeten Kegelmantels.

1) Die Abbildung eines Kreises zu zeichnen, dessen wirkliche Grösse der in der Bildfläche liegende Kreis K (Fig. 71) darstellt, und dessen Mittelpunkt auf der vom Mittelpunkt c nach dem Hauptpunkte A gehenden Geraden in der Entfernung e von der Bildfläche liegt.

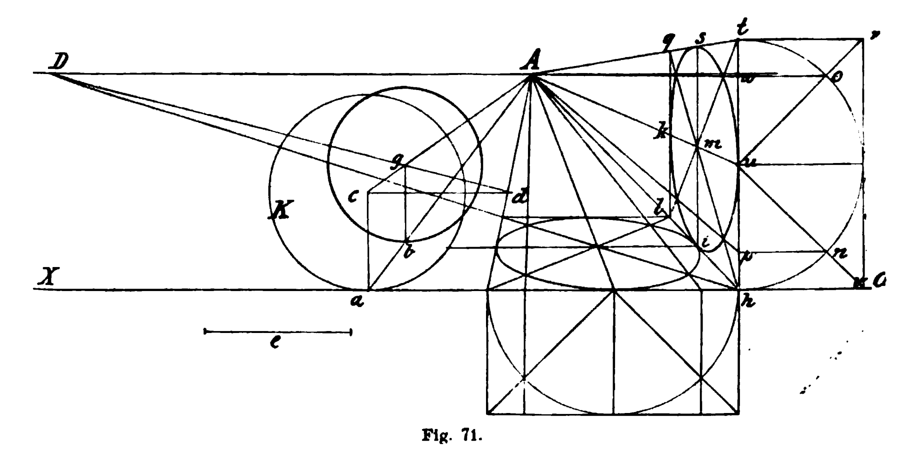


Fig. 71.

Wir ziehen durch c die Gerade cd = e parallel zur Achse OX und verbinden d mit dem Distanzpunkte D durch die Gerade dD. Die letztere

schneidet cA in der Abbildung g des gesuchten Mittelpunktes. Da der gemachten Voraussetzung zufolge die Abbildung des Kreises wieder ein Kreis sein muss, so ist nur noch der Halbmesser desselben zu bestimmen. Wir ziehen bg parallel zu ac und verbinden a mit dem Hauptpunkte durch die Gerade aA, dann schneidet diese auf bg die Grösse des gesuchten Halbmessers ab, wonach nun die Abbildung des Kreises gezeichnet werden kann.

2) Der abzubildende Kreis liege in einer zur Achse senkrechten Ebene, welche die Bildfläche in der Geraden ht ($\perp$ OX) durchschneidet (Fig. 71).

Es sei ht gleich dem Durchmesser des Kreises. Setzen wir voraus, dass der letztere die Bildfläche berührt, so bestimmen wir zunächst die Abbildung htql des den Kreis einschliessenden Quadrats, dessen eine Seite ht ist. Indem wir durch den Schnittpunkt m der beiden Diagonalen is parallel ht und uk nach dem Hauptpunkte A ziehen, erhalten wir auch die Abbildungen der vier Berührungspunkte, nämlich i, k, s und u. Bei sehr kleinen Dimensionen genügen diese Punkte und die vier Tangenten. Fällt die Abbildung grösser aus, so lassen sich leicht noch die auf den Diagonalen liegenden Punkte des Kreises bestimmen. Wir denken uns die eine Hälfte des Kreises und des einhüllenden Quadrats an ht in die Bildfläche gelegt, ziehen vom Mittelpunkt u die Geraden ur und uv nach den Ecken, dann sind o und n zwei Schnittpunkte des Kreises mit den Diagonalen des vollständigen Quadrats. Ziehen wir nun ow und np senkrecht zu ht, so finden wir als Abbildungen der ow und np entsprechenden Geraden die Linien wA und pA, welche die Diagonalen lt und hq in den Abbildungen von vier weiteren Punkten schneiden.

In Figur 71 sieht man noch die Abbildung eines ebenso grossen Kreises, welcher in der Horizontalebene liegt. Dieselbe wird auf gleiche Weise wie vorhin konstruiert; eine weitere Erläuterung ist deshalb unnötig.

3) Als zweites Beispiel für die Konstruktion der Abbildungen von Kreisen, deren Ebenen senkrecht zur Bildfläche stehen, diene Fig. 72. Es sind die Abbildungen zweier geraden Cylinder von gleicher Grösse dargestellt. Der Cylinder C_1 ruht auf der Horizontalebene; der Cylinder C_2 stützt sich auf die Horizontalebene und auf C_1. Um die Grundflächen beider sind Quadrate gezeichnet, für welche je ein Seitenpaar parallel zur Bildfläche angenommen ist. Die anderen Seitenpaare stehen senkrecht zur Bildfläche und haben deshalb den Hauptpunkt A als gemeinsamen Fluchtpunkt. Durch die Halbkreise, welche über den zur Bildfläche parallelen Durchmessern gezeichnet sind, bestimmt man wie in 2) die Abbildungen der Grundflächen. Die Cylinderflächen werden alsdann noch durch je zwei gemeinschaftliche Tangenten begrenzt, welche an die Abbildungen der Grundflächen gezogen werden können.

4) Liegt endlich der Kreis in einer beliebigen Ebene E (S, F), Fig. 73, so kann man leicht wieder die Abbildung des einhüllenden Quadrats abcd

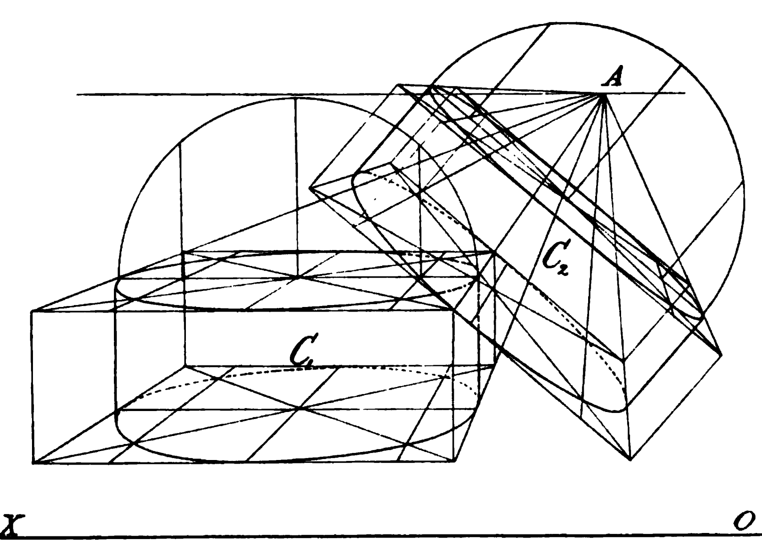


Fig. 72.

zeichnen, von welchem zwei Seiten mit der Bildfläche parallel sind. Die letzteren sind dann zugleich der Spur S parallel, während die Abbildungen der beiden anderen Quadratseiten nach dem Punkte f gerichtet sind, in welchem die von A auf die Fluchtlinie F gefällte Senkrechte die letztere trifft. Auch in diesem Falle bestimmt man durch einen über dem zur Bildfläche parallelen Durchmesser ge gezeichneten Halbkreis wie in den vorigen Fällen die Abbildungen derjenigen Punkte des Kreises, welche auf den Diagonalen des Quadrats liegen.

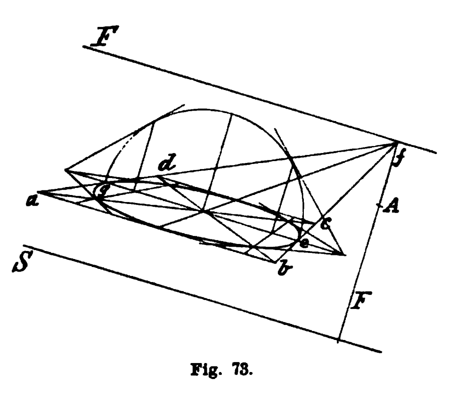


Fig. 73.

In den meisten Fällen genügen diese Punkte, um die Abbildung eines Kreises zeichnen zu können. Nur bei sehr grossen Dimensionen oder bei der Darstellung einer Kreiseinteilung wird man weiterer Punkte bedürfen.

5) Mit Hilfe eines den gegebenen Kreis umschliessenden Quadrats kann man aber leicht nach (IV, 23, I. Teil) beliebig viele Punkte der Abbildung eines Kreises konstruieren (Fig. 74).

Es sei abcd die Abbildung eines in der Horizontalebene liegenden Quadrats, ef und gh diejenigen der Verbindungslinien der Seitenmitten.

Man teilt nun mh und ch in dieselbe Anzahl gleicher Teile (welche auf der zur Bildfläche parallelen Geraden mh wirklich unter sich gleich erscheinen).

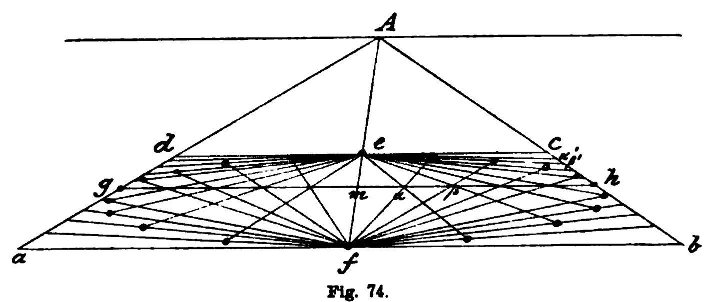


Fig. 74.

Zieht man nun von f aus Strahlen durch die Teilpunkte auf mh, und von e aus nach denjenigen auf ch, so schneiden sich $f\alpha$ und $e\alpha'$, $f\beta$ und $e\beta'$ u. s. f. in Punkten, welche der Abbildung des Kreises angehören.

Auf die Ausführung der Abbildungen eines Kreises ist stets die grösste Aufmerksamkeit und Sorgfalt zu verwenden. Fehlerhaft gezeichnete Abbildungen von Kreisen wirken ausserordentlich störend, selbst wenn dieselben nur an ganz nebensächlichen Teilen der Abbildung vorkommen. In dieser Beziehung erinnert sich der Verfasser eines Falles, der erwähnt zu werden verdient. Vor ungefähr 20 Jahren war in Hamburg eine Ausstellung sämtlicher (ca. 120) zum dortigen Rathausbau eingelieferten Konkurrenz-Pläne veranstaltet. Die den Entwürfen hinzugefügten durchweg vortrefflichen perspektivischen Ansichten zeigten im Vordergrunde eine Treppe, welche an der Schleusenbrücke in Hamburg gelegen, nach dem sog. kleinen Alsterbassin hinabführt, und deren Stufen in der Horizontalprojektion Viertelkreise bilden. Diese Treppe lag, wie erwähnt, im Vordergrunde und erschien deshalb in grossen Dimensionen, aber auffälligerweise war dieselbe fast auf allen Abbildungen verzeichnet. Der Fehler bestand vorwiegend in einer zu breit gezeichneten Aufsicht auf die horizontalen Flächen der Treppenstufen und der dadurch verursachten zu starken Krümmung der vielen an der Treppe vorkommenden Kreisbögen. Wenn nun auch der Gegenstand an und für sich von untergeordneter Bedeutung war, so trat der Fehler schon deshalb besonders auffällig hervor, weil derselbe eine beträchtliche im Vordergrund liegende Partie betraf. Die Wirkung war so störend, dass der Blick beim Betrachten jeder neuen Abbildung unwillkürlich zuerst auf die Treppe fiel, als hätte man gleichsam das Bedürfnis empfunden, doch endlich einmal einer richtigen Abbildung zu begegnen.

Abbildungen der Umdrehungskörper.

6) Abbildung der Kugel. Der scheinbare Umriss einer Kugel ist stets ein Kreis. Denn alle Strahlen, welche durch den Augenpunkt gehen

und die Kugel berühren, bilden die Mantelfläche eines geraden Kegels. Die Berührungslinie dieses Kegelmantels mit der Kugelfläche ist aber bekanntlich eine Kreislinie, deren Ebene senkrecht zu dem Strahl steht, welcher den Mittelpunkt der Kugel mit dem Augenpunkt verbindet (s. Einleitung 2).

Die Abbildung des scheinbaren Umrisses der Kugel ist nun der Durchschnitt jenes Strahlenkegels mit der Bildfläche, also im Allgemeinen eine Ellipse (s. I. Teil, IV, 4). Steht die Bildfläche senkrecht zur Achse des Strahlenkegels (welcher Fall nur dann eintritt, wenn der Mittelpunkt der Kugel auf dem Hauptstrahle liegt), dann geht die Abbildung in einen Kreis über. Die Fälle, wo der Strahlenkegel von der Bildfläche in einer Parabel oder Hyperbel geschnitten wird, kommen in der Linearperspektive niemals in Betracht.

Um die Abbildung einer Kugel zu zeichnen, wollen wir annehmen, es sei die Abbildung c (Fig. 75) ihres Mittelpunktes bereits bestimmt. Ist dann As die Abbildung der durch den Mittelpunkt gehenden, zur Bildfläche senkrechten Geraden, s die Spur der letzteren, so ziehen wir durch s und c Parallelen zur Achse. Die durch s gehende Parallele liegt in der Bildfläche; auf dieser machen wir die Strecke es gleich dem Halbmesser r der Kugel. Ziehen wir

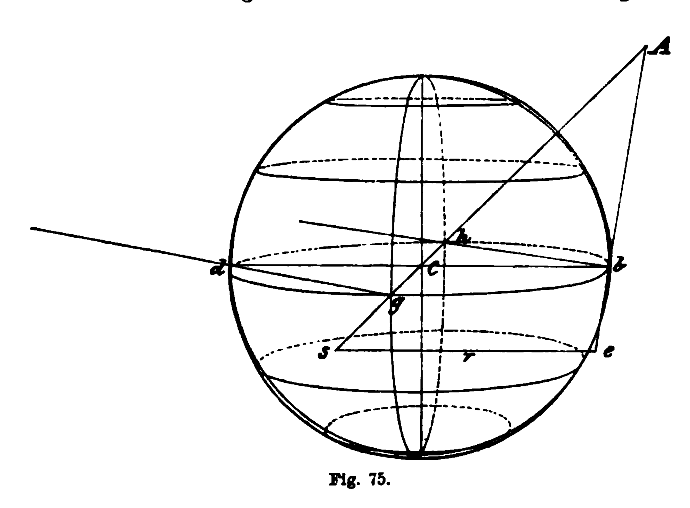


Fig. 75.

jetzt die Gerade eA, so schneidet sie auf cb den Halbmesser der Abbildung desjenigen grössten Kreises der Kugel ab, welcher parallel zur Bildfläche liegt. Dieser Kreis kann also mit dem Halbmesser bc um c als Mittelpunkt gezeichnet werden. Verlängern wir bc bis d, so ist bd auch der Durchmesser desjenigen grössten Kreises, welcher parallel zur Horizontalebene ist.

Die Abbildung des Durchmessers, welcher senkrecht zur Bildfläche steht, findet man leicht, wenn man die Geraden von b und d nach dem Distanzpunkte zieht; dieselben schneiden auf Ac die Endpunkten g und h ab. Hier-

nach kann man leicht die Abbildung dieses Kreises finden. Ebenso findet man die Abbildung des grössten Kreises, welcher senkrecht zur Achse steht. In Fig. 75 sind noch einige zu bgdh parallele Kreisschnitte der Kugel angegeben. Alle diese Kurven werden von einer Ellipse, der Abbildung des scheinbaren Umrisses der Kugel, eingehüllt.

Man kann den Umriss auch als Einhüllende der Abbildungen aller zur Bildfläche parallelen Kreisschnitte konstruieren, was noch einfacher als das vorige Verfahren ist (Fig. 76). Ist wieder bd die Abbildung des Durchmessers, welcher parallel zur Achse und gh diejenige des zur Bildfläche senkrechten Durchmessers, so können wir einen beliebigen Punkt k auf dem letzteren als Mittelpunkt eines Kreisschnittes annehmen. Ziehen wir die Gerade von k nach dem Distanzpunkte D, so schneidet dieselbe cd in einem Punkte i, dessen wirklicher Abstand von c dem Abstand des Punktes k von c gleich ist. Die Senkrechte il stellt nun die Grösse des Halbmessers eines Kreisschnittes dar, welcher vom Mittelpunkt der Kugel den Abstand ci = ck hat. Ziehen wir demnach km parallel il und von D durch l eine Gerade, so schneidet diese nun auf km den Halbmesser des Kreisschnittes ab, dessen Mittelpunkt k ist. Hiernach kann dieser Kreis um k gezeichnet werden. Hat man auf diese Weise eine hinreichende Anzahl von solchen Kreisschnitten bestimmt, so ist die Einhüllende leicht zu zeichnen.

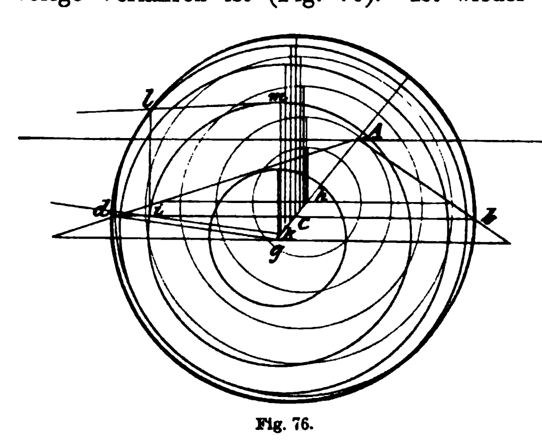


Fig. 76.

7) Die Abbildung einer Kugel ist besonders deshalb verhältnismässig einfach zu konstruieren, weil alle Schnitte derselben Kreise sind. Bei Umdrehungskörpern sind dies im allgemeinen nur diejenigen Schnitte, welche senkrecht zur Drehachse stehen. Es bleibt deshalb auch nichts anderes übrig, als die Abbildungen einer Reihe solcher Schnitte zu konstruieren und alsdann die Einhüllende derselben zu zeichnen. Da dies Verfahren stets auf die Bestimmung der Abbildungen von Kreisen zurückkommt, so ist eine weitere Erläuterung unnötig und wir geben deshalb nur in den Figuren 77 und 78 noch ein paar ausgeführte Beispiele an.

In Fig. 78 α und β ist die Ringfläche dargestellt, α) wenn die Drehachse senkrecht zur Bildfläche, und bei (β), wenn dieselbe senkrecht zur Horizontalebene steht. In dem ersteren Falle ist der Umriss als Einhüllende von Kreisschnitten gezeichnet, welche mit der Bildfläche parallel sind, im

zweiten Falle als Einhüllende der Abbildungen einer Reihe von Meridianschnitten.

Die Kurven, welche die Umrisse der gezeichneten Schnitte einhüllen, enden zuweilen scheinbar, ohne sich zu schliessen. Wir sehen dies an den Stellen a und b der Figuren 77 und 78. (Man vergleiche auch die Darstellungen Fig. 137 und 138, I. Teil.) In Wirklichkeit hört aber die Kurve in diesen Punkten nicht auf, sondern dieselbe schliesst sich (allerdings nicht sichtbar), wie dies durch die punktierte Linie angedeutet ist. Wäre die Fläche durchsichtig, so würde das Auge diesen Teil der Einhüllenden eben-

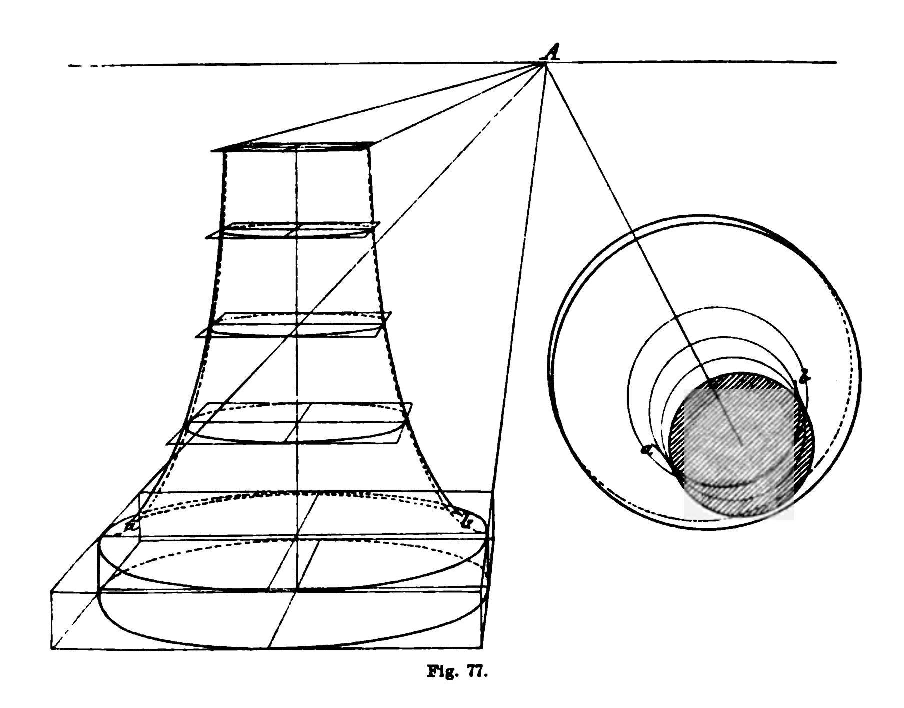


Fig. 77.

falls wahrnehmen. Das scheinbare Aufhören des sichtbaren Teiles rührt davon her, dass die Kurve in dem betreffenden Punkte eine Richtung hat, welche mit dem Sehstrahl zusammenfällt, d. h. in diesem Punkte ist die Tangente der Kurve nach dem Augenpunkte gerichtet.

Man könnte die Abbildungen der scheinbaren Umrisse der Umdrehungskörper auch punktweise konstruieren. In diesem Falle würden vom Augenpunkte aus Berührungsebenen an die Oberfläche des abzubildenden Gegenstandes zu legen und dann die Abbildungen der Berührungspunkte zu bestimmen sein. Für unsere vorwiegend praktischen Zwecke müssen wir jedoch von dieser viel zu umständlichen Konstruktion gänzlich absehen.

Weitere Übungen über die Abbildungen krummer Linien und Flächen findet man in folgendem Kapitel, welches die Anwendung der bisher entwickelten Gesetze auf die Herstellung perspektivischer Zeichnungen enthält.

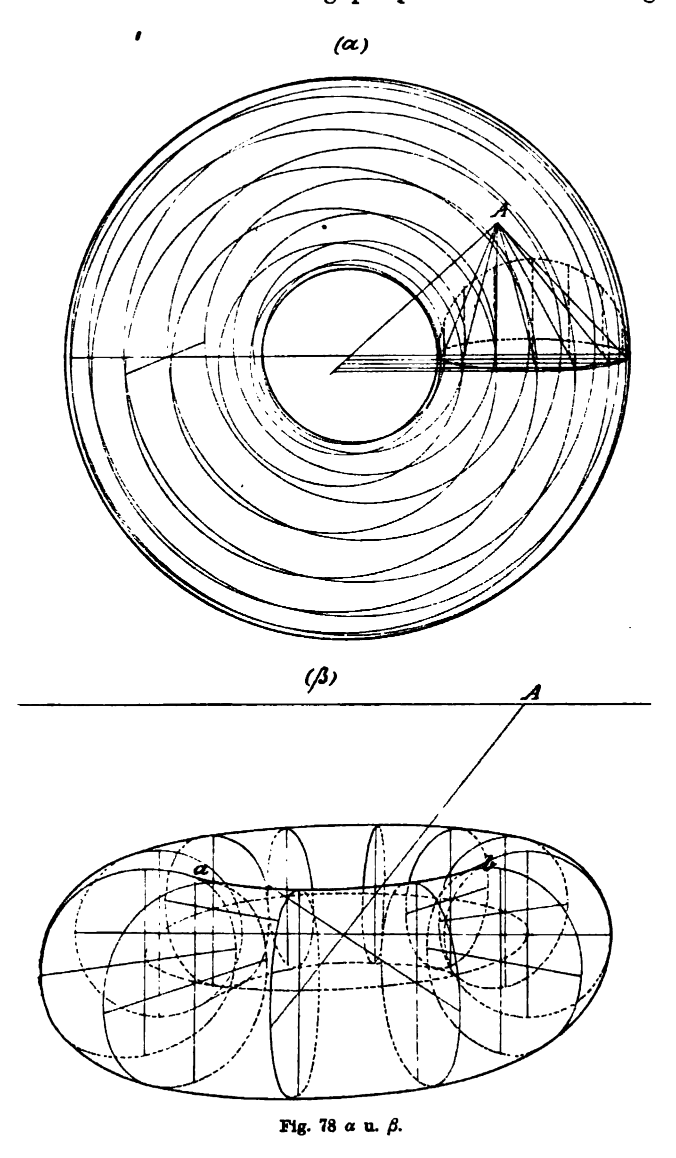


Fig. 78 α u. β.

IV. Abschnitt.

Anwendung der perspektivischen Gesetze bei der Ausführung grösserer Abbildungen.

Bevor wir zu den Anwendungen der perspektivischen Gesetze übergehen, mögen einige allgemeine Bemerkungen über die Lage des Augenpunktes, seine Entfernung von der Bildfläche u. s. w. Platz finden. Man sieht leicht ein, dass es zunächst Sache der Erfahrung und des praktischen Blickes ist, den Standpunkt, von dem aus ein Gegenstand abgebildet werden soll, günstig zu wählen. Der Anfänger wird bei der ersten Zeichnung perspektivischer Abbildungen bemerkt haben, dass dieselben trotz richtig ausgeführter Konstruktion oft auffällige Verzerrungen zeigen, welche die Richtigkeit der Zeichnung zweifelhaft erscheinen lassen. Eine solche Abbildung macht aber auf das Auge einen vollkommen richtigen Eindruck, sobald man diese aus dem Punkte betrachtet, für welchen sie konstruiert ist. Man macht den Versuch am besten, wenn man in ein Blatt steifen Papiers eine kleine Öffnung schneidet, letztere an die Stelle des Augenpunktes bringt und nun durch diese Öffnung die Zeichnung betrachtet. Die anscheinenden Verzerrungen verschwinden dann gänzlich und die Abbildung macht einen vollständig befriedigenden Eindruck.

Die Hauptursache der anscheinend zu krassen Verzerrungen liegt einmal in der zu kleinen Entfernung des Augenpunktes von dem Gegenstand und der Bildfläche und ferner darin, dass man das Bild in der Regel nicht aus dem Punkte betrachtet, für welchen es konstruiert ist. Nimmt man den Augenpunkt entfernter von der Bildfläche an, so wird die Abbildung auch dann noch einen befriedigenden Eindruck machen, wenn sich das Auge nicht genau in dem zugehörigen Augenpunkte befindet. Sie wird infolgedessen auch nicht scheinbar zu starke Verzerrungen aufweisen. Den Grund hiervon können wir uns etwa in folgender Weise klar machen.

1) Es sei P (Fig. 79α) der Grundriss eines rechtwinkligen Parallelepipedums, die Gerade V sei die Horizontalprojektion der Bildfläche, A_1 diejenige des Augenpunktes. Ziehen wir einmal die Strahlen von A_1 nach den sichtbaren Ecken a, b und c und dann auch von einem anderen Punkte A_2 aus die Strahlen nach denselben Ecken, so erkennen wir leicht, dass die Schnittpunkte der Sehstrahlen mit der Bildfläche durch eine Verlegung des Augenpunktes von A_1 nach A_2' erhebliche Veränderungen erleiden. Es kann

also die für A_1 konstruierte Abbildung von A_2 aus gesehen nicht mehr den richtigen Eindruck machen.

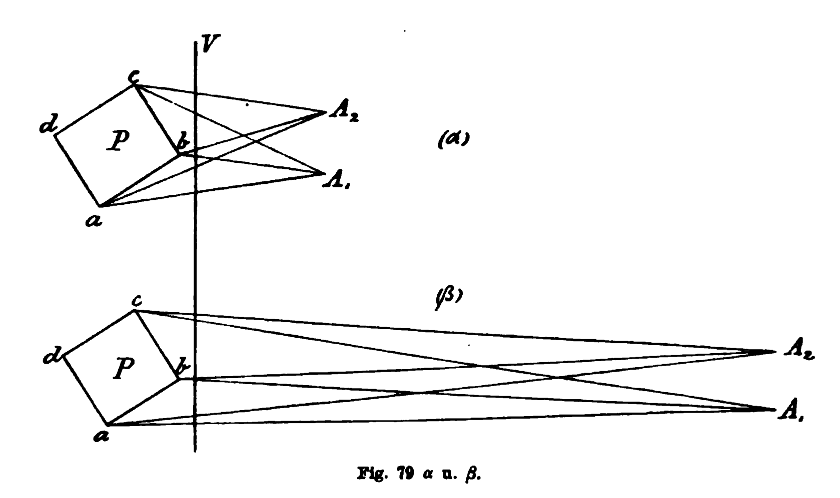


Fig. 79 α u. β.

Liegt dagegen A_1 in grösserer Entfernung von der Bildfläche (s. β), so sieht man, dass eine gleich grosse Verschiebung des Augenpunktes die Schnittpunkte der Sehstrahlen mit der Bildfläche nur sehr wenig verändert. Es würde also das in Bezug auf A_1 konstruierte Bild auch dann noch nahezu denselben Eindruck machen, wenn es von A_2 aus betrachtet wird. Da nun in der Regel das Auge beim Betrachten einer Abbildung sich nicht genau in dem richtigen Augenpunkte befinden wird, so ergiebt sich hieraus die Notwendigkeit, die Entfernung des Augenpunktes, für welchen die Abbildung konstruiert werden soll, so gross zu nehmen, dass eine kleine Veränderung der Lage des Augenpunktes das Bild nicht erheblich ändern würde.

Indessen darf man hieraus nicht schliessen, dass die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche beliebig vergrössert werden könne. Je grösser die Distanz gemacht wird, um so mehr nähern sich die projicierenden Strahlen der parallelen Lage und das Bild nähert sich mehr und mehr einer Parallelprojektion. Da nun das Zusammenlaufen der Abbildungen paralleler Kanten in diesem Falle viel weniger hervortritt, so erhält die Zeichnung dadurch einen einförmigen Charakter, welchem der lebendigere Linienfluss fehlt. Hier ist es nun Sache der Erfahrung und des guten Geschmackes, die günstigste Lage des Augenpunktes zu finden; der Zeichner wird aber leicht darauf geführt, wenn er mehremale zur eigenen Übung Abbildungen desselben Gegenstandes für verschiedene Lagen des Augenpunktes konstruiert und diese miteinander vergleicht.

Noch ein anderer Umstand, welcher Einfluss auf die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche hat, ist zu berücksichtigen. Da wir beim

Betrachten der Abbildung das Auge nach dem Augenpunkte zu bringen haben, um den richtigen Eindruck zu erhalten, so soll man auch aus diesem Punkte die Abbildung vollständig, d. h. mit einem Blick, ohne Drehen des Kopfes bequem übersehen können. Nun weiss Jedermann aus Erfahrung, dass, wenn man einen Gegenstand deutlich mit dem Auge erkennt, andere in der Nähe befindliche Gegenstände beiläufig mitgesehen, aber nicht mehr so scharf und deutlich wahrgenommen werden. Alle innerhalb eines Strahlenkegels liegende Objekte können im allgemeinen ohne Drehen oder Wenden des Kopfes noch bequem übersehen werden, wenn dessen gegenüberliegende Seitenlinien höchstens einen Winkel von 50° miteinander bilden, und hieraus folgt, dass die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche mindestens gleich der grössten Dimension der Abbildung sein muss.

Ferner ist wohl einleuchtend, dass in der Regel der Hauptpunkt in der Mitte oder doch in der Nähe der Mitte der Abbildung liegen wird. Um den Hauptpunkt wird der Zeichner hauptsächlich dasjenige gruppieren, was die Aufmerksamkeit des Beschauers in erster Linie in Anspruch nehmen soll. Abweichungen hiervon können aber eintreten, wenn man z. B. bei geraden Innenansichten eine vollkommene Symmetrie der Zeichnung in Bezug auf die Mitte, welche eintönig wirkt, vermeiden will. Derartige Fälle werden nun in den nachfolgenden Anwendungen gehörige Berücksichtigung finden.

A. Gerade Ansichten.

2) Abbildung eines Tonnengewölbes (Fig. 80).

Es sei (α) Grundriss und Querschnitt eines halbkreisförmigen Tonnengewölbes in verkleinertem Massstabe. In Zwischenräumen, welche dem Durchmesser des Gewölbes gleich sind, befinden sich Wandpfeiler, verbunden durch sog. Gurtbögen. Hiernach ist der Raum zwischen zwei Paaren aufeinanderfolgender Wandpfeiler, wie z. B. $b\,c\,c_1\,b_1$ ein Quadrat. Die Bildfläche stehe senkrecht zur Längenrichtung, dann werden die vorkommenden Kreise parallel zur Bildfläche sein und deshalb in der Abbildung wieder als Kreise gezeichnet werden können. Den Hauptpunkt nehmen wir ein wenig seitwärts von der Mitte an, damit die Abbildungen der Seitenwände nicht völlig gleich erscheinen. Endlich liege der Horizont etwa in $\frac{1}{4}$ der Höhe des Gewölbes über der Grundfläche und die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche nehmen wir so gross an, dass nur noch $\frac{D}{4}$ auf der Zeichenfläche angegeben werden kann.

Um die Konstruktion in einfachster Weise deutlich zu machen, zeichnen wir einen Teil des Grundrisses, welcher die Grundflächen eines Paares einander gegenüberliegender Pfeiler enthält, unterhalb der Achse OX. Dann

sei noch O'X' die Achse für den Grundriss, so dass hieraus die Entfernung dieses Pfeilerpaares von der Bildfläche sich ergiebt. Ferner ist senkrecht über dem Grundriss ein Querschnitt des Gewölbes mit der Ansicht der Wand-

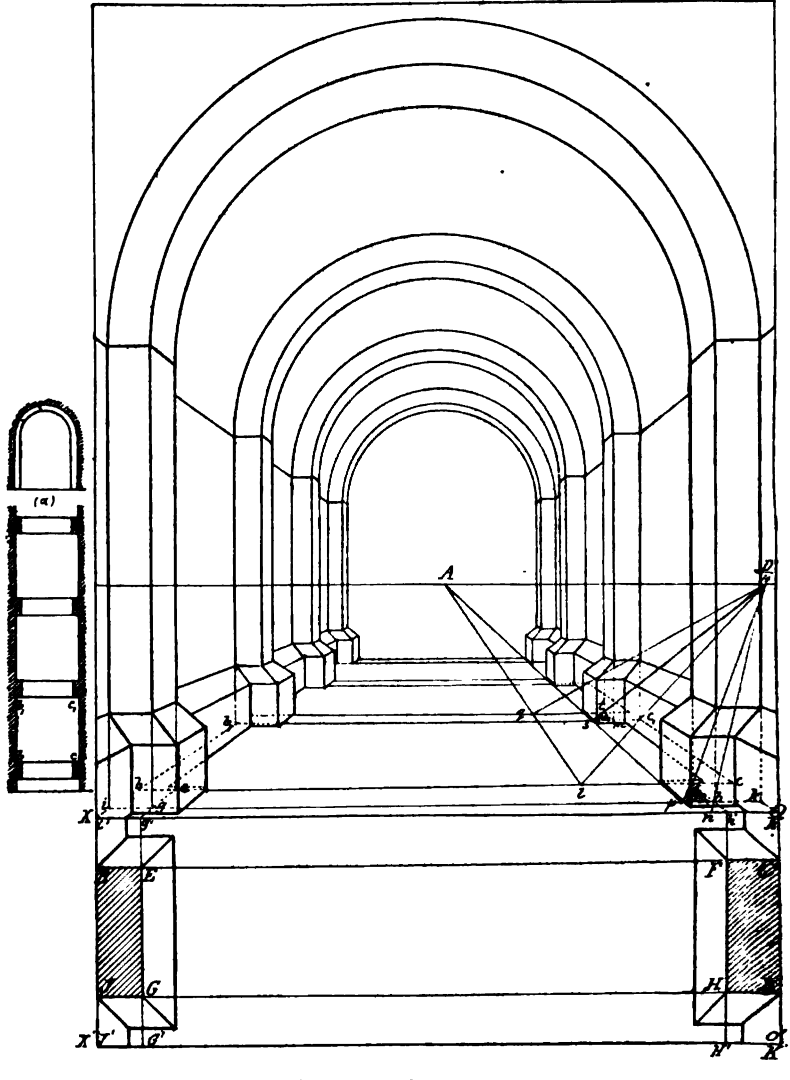


Fig. 80.

pfeiler und des dieselben verbindenden Gurtbogens angegeben, wodurch auch die Höhen bestimmt sind.

Zunächst ist nun der Grundriss perspektivisch abzubilden. Wir projicieren aus demselben die Spuren aller zur Bildfläche senkrechten Geraden

auf die Achse OX und ziehen von den so erhaltenen Punkten i′, g′, h′ und k′ gerade Linien nach A. Um die Abbildung des Punktes H zu finden, machen wir h′n gleich $\frac{1}{4}$ des Abstandes HH′, und ziehen die Gerade $n\frac{D}{4}$, dann schneidet diese h′A in h, der Abbildung von H. (Vergl. I, 13). Ebenso wird f als Abbildung von F bestimmt. Durch f und h zieht man nun Parallelen zur Achse OX, dadurch ergeben sich cfhk und begi als Abbildungen der Grundflächen des ersten Pfeilerpaares. Die Grundflächen des zweiten Paares werden ebenfalls nach (I, 13) gefunden. Man macht $cl = \frac{1}{4}bc$ und zieht die Gerade $l\frac{D}{4}$; diese trifft k′A im Punkte c_1. Es ist dann nach (I, 13) die wahre Länge von cc_1 gleich derjenigen der Geraden bc, und wenn man durch c_1 die Gerade b_1c_1 parallel zur Achse zieht, so liegen in dieser die Abbildungen der vorderen zu OX parallelen Grundkanten des zweiten Pfeilerpaares. Durch p ziehen wir die Gerade pA; dieselbe schneidet auf b_1c_1 die Strecke sm ab, deren wahre Länge gleich der von ph ist. Ziehen wir nun noch $s\frac{D}{4}$, so entsteht das auf der Horizontalebene liegende Dreieck mst, welches demjenigen Dreieck, dessen Abbildung fhp ist, kongruent sein muss. Folglich stellt auch tm die Breite des nächsten Pfeilers dar; durch die Gerade $q\frac{D}{4}$ erhält man den Punkt r u. s. f. Hieraus ergiebt sich, wie alle folgenden Pfeilerstellungen gefunden werden können. Das Auftragen der Höhen geschieht in bekannter Weise, und die Mittelpunkte und Halbmesser der Kreise, durch welche die Abbildungen der Gurtbögen gefunden werden, ergeben sich dann von selbst.

Sind die Pfeiler und Gurtbögen bestimmt, so füge man noch den Sockel hinzu.

3) Abbildung eines Kreuzgewölbes.

Ein quadratischer Raum, in dessen Ecken 4 Pfeiler mit quadratischen Grundflächen stehen, ist von zwei sich rechtwinklig durchschneidenden Tonnengewölben überwölbt (Fig. 81 α). Die Querschnitte der letzteren seien gleich grosse Halbkreise, dann sind die Schnittlinien der Gewölbeflächen (die sog. Gratbögen) Ellipsen, deren Horizontalprojektionen mit den beiden Diagonalen BG und CE zusammenfallen. Man soll die Abbildung dieses Gewölbes zeichnen, wenn die Bildfläche parallel mit dem Querschnitte eines der Tonnengewölbe ist.

Sind M und N die Grundflächen der beiden vordersten Pfeiler, O′X′ die Achse für den Grundriss, so kann man zunächst die perspektivische Abbildung des Grundrisses des ganzen Gewölbes ähnlich wie in 2) konstruieren. Um die Gratbögen zeichnen zu können, bestimmt man die Durchschnittspunkte solcher

Seitenlinien der beiden sich schneidenden Tonnengewölbe, welche je in gleicher Höhe über der Horizontalebene liegen. Betrachten wir den in verkleinertem Maſsstabe gezeichneten Grundriss der Nebenfigur (α), welcher aber nur den Teil des Gewölbes darstellt, welcher über dem Quadrat BCGE

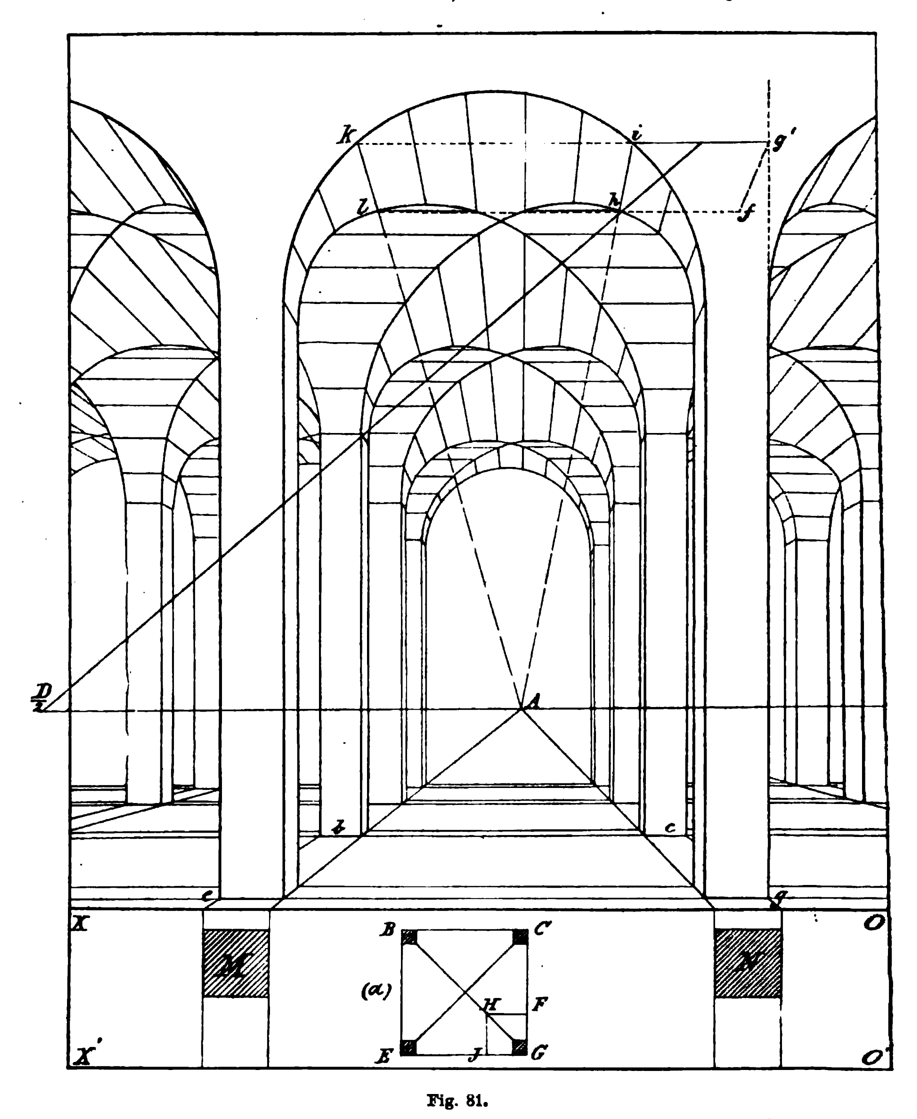


Fig. 81.

liegt, und denkt man sich nun oberhalb des Bogenanfanges einen horizontalen Schnitt durch das Gewölbe gelegt, so wird die Horizontalprojektion ein dem wirklichen Schnitte gleiches Quadrat GJHF sein. Der Eckpunkt H gehört dem Gratbogen an.

Wir suchen nun die perspektivische Abbildung eines solchen Schnittes auf. Von einem Punkte i des vordersten Halbkreises ziehen wir die Gerade ig' parallel zur Achse bis zu der durch den Eckpunkt g gehenden senkrechten Pfeilerkante. ig' betrachten wir nun als die eine Seite des zu konstruierenden quadratischen Schnittes. Die beiden anderen von i und g' ausgehenden Seiten sind als Geraden, welche senkrecht zur Bildfläche stehen, nach dem Hauptpunkte A gerichtet. Die Länge der Seite ig' ist nun perspektivisch auf iA abzutragen; wir ziehen zu diesem Zwecke entweder die Diagonale von g' nach dem Distanzpunkte D, oder wenn, wie in Fig. 81, nur $\frac{D}{2}$ zugänglich ist, von der Mitte der Seite ig' nach $\frac{D}{2}$. Jede dieser Geraden schneidet iA in dem gesuchten Eckpunkte h.

Ist k der zweite Punkt des vorderen Kreises, welcher mit i in gleicher Höhe über der Horizontalebene liegt, so findet man auf kA einen dem h entsprechenden Punkt l des anderen Gratbogens, wenn man durch h eine Parallele zur Achse OX zieht. Die weitere Ausführung kann dem Studierenden überlassen bleiben.

In Fig. 81 sind auch die teilweisen Einblicke in die seitlich liegenden Gewölbe mit angegeben.

4) Abbildung des Durchschnittes zweier halbkreisförmigen Tonnengewölbe von verschiedenen Durchmessern (Fig. 82).

Beide Gewölbe durchkreuzen sich unter rechtem Winkel; die Bildfläche ist senkrecht zur Längenrichtung des grösseren Gewölbes angenommen. Die Abbildungen der in der Zeichnung vorkommenden Geraden können nach dem früheren leicht konstruiert werden; wir nehmen deshalb an, dass die Punkte a und c, in welchem der gesuchte Durchschnitt beginnt, bereits gefunden sind.

Es sei nun der Halbkreis afdb parallel zur Bildfläche und sein Durchmesser ab dem des kleineren Gewölbes gleich, welches der Fall ist, wenn bc nach dem rechts liegenden Distanzpunkte D geht (in Fig. 82 liegt derselbe ausserhalb der Zeichenfläche). Ist d_1 die Projektion eines beliebigen Punktes d des Halbkreises auf ab, so kann man auf der Abbildung ac des kleineren Gewölbedurchmessers den entsprechenden Punkt h_1 durch die nach D gehende Gerade d_1h_1 finden. Zieht man noch hh_1 senkrecht zur Achse und dh nach D, so ist der Schnittpunkt h dieser beiden Geraden ein Punkt des über ac stehenden kreisförmigen Querschnittes des kleineren Gewölbes. Man konstruiert auf diese Weise so viele Punkte dieses Querschnittes, dass die Gestalt desselben deutlich zu erkennen ist (in Fig. 82 punktiert angegeben). Um den gesuchten Durchschnitt zu finden, ziehen wir auf beiden Gewölbflächen Seitenlinien, welche in gleichen Höhen über der Horizontalebene liegen. Wir legen demnach durch h die Gerade Ai und verlängern dieselbe, bis sie die senkrechte Kante uv in i trifft. Ai liegt dann in der Ebene

der rechts liegenden Seitenwand. Durch i ziehen wir ik parallel zur Achse, dann liegt k mit i und h in gleicher Höhe über der Horizontalebene. Legen wir demnach durch k die nach A gerichtete Seitenlinie kl und durch h die parallel zur Achse laufende Seitenlinie hl der kleineren Gewölbfläche, so treffen dieselben sich in einem Punkt l der gesuchten Durchschnittskurve.

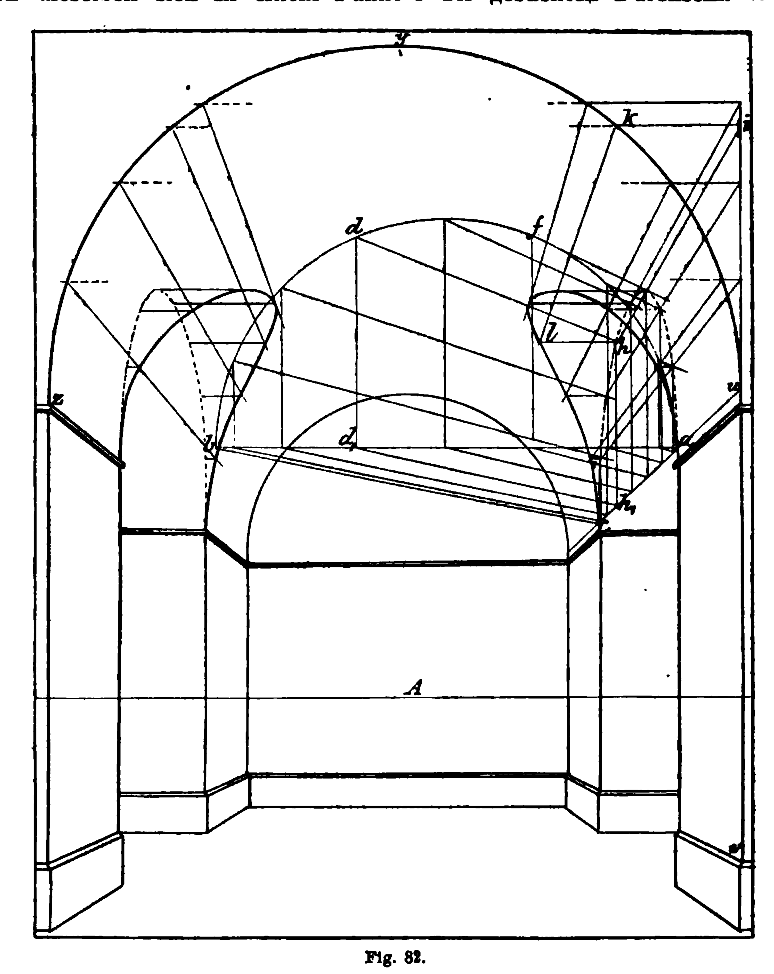


Fig. 82.

Hiernach ist die ganze Durchschnittsfigur konstruiert, welche dann auch leicht auf die linke Seite des Gewölbes übertragen werden kann.

5) Abbildung einer Wendeltreppe (Fig. 83).

Das Motiv hierzu bildet die Treppe auf dem Michaelisturm in Hamburg, welche zur Kuppel desselben führt. Die Treppe windet sich um eine freistehende Säule. In unserer Figur ist unterhalb der Achse die Hälfte des Grundrisses angegeben. Die perspektivische Abbildung desselben ist zuerst zu

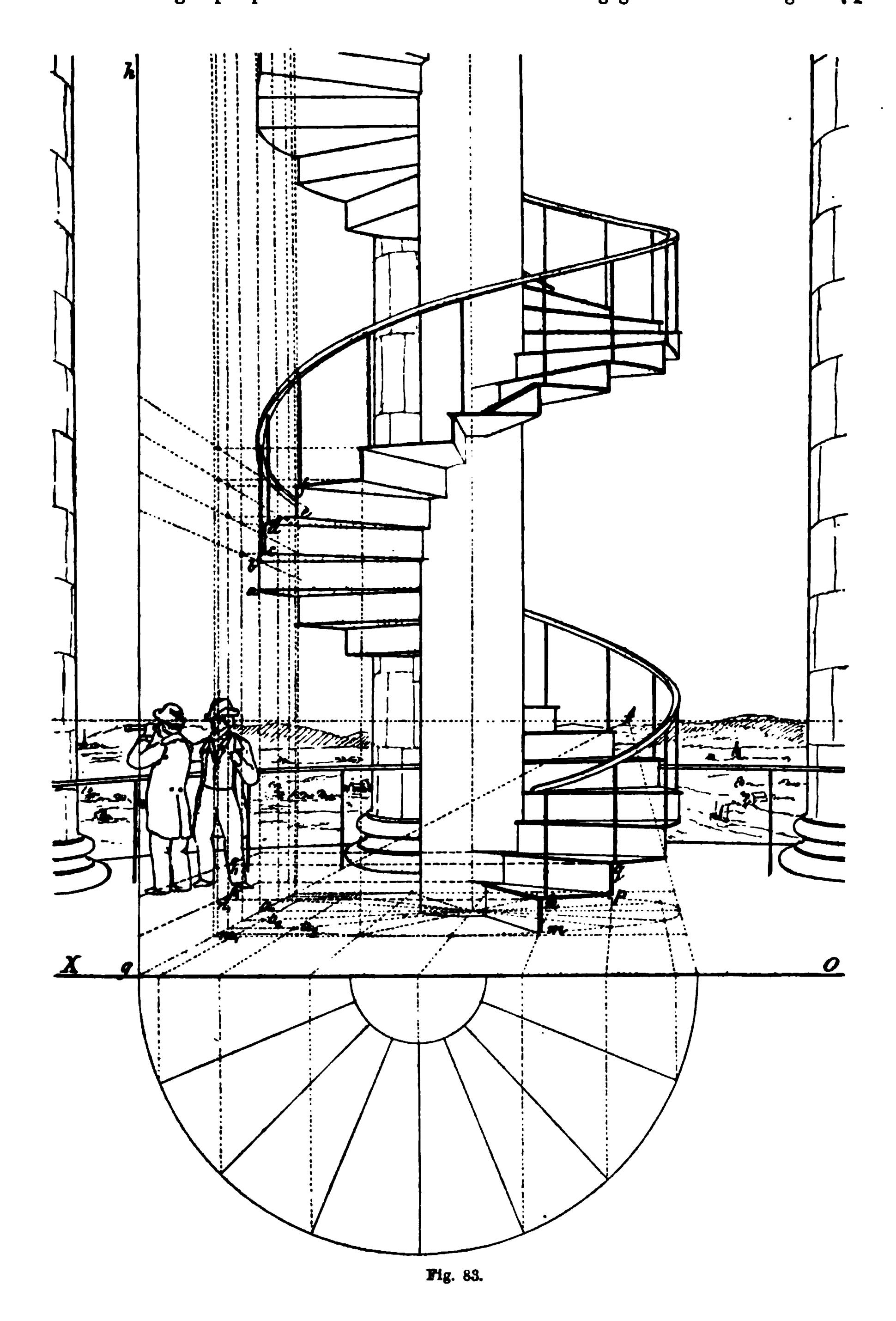


Fig. 83.

bestimmen, indem man durch die Teilpunkte auf dem Umfang des Kreises Geraden zieht, welche senkrecht zur Bildfläche, und auch solche, welche unter 45° gegen die Achse OX geneigt sind (s. I, 7).

Die äusseren senkrechten Kanten der Stufen liegen senkrecht über den Teilpunkten des perspektivischen Grundrisses; so z. B. liegt ab senkrecht über a_1, cd senkrecht über a_2, ef senkrecht über a_3 u. s. f. Um die Höhen zu bestimmen, benutzen wir die Projektion der Treppe auf einer zur Achse senkrechten Ebene, deren Spur gh ist und deren Schnittlinie mit der Horizontalebene die Gerade gA zur Abbildung hat (vgl. I, 30). Auf die letztere projicieren wir durch Parallelen zur Achse die sämtlichen Teilpunkte des Grundrisses und errichten in den Projektionen Senkrechten zur Achse. Ferner tragen wir auf der Spur gh von g aus die Höhen der Stufen ab und verbinden die so erhaltenen Punkte durch gerade Linien mit A. Diese letzteren schneiden auf den vorhin gezogenen Senkrechten die gesuchten Höhen ab. So finden wir die Höhe der ersten im Teilpunkte m stehenden Senkrechten mn auf der Seitenebene in m_1n_1, welche die Seitenprojektion von mn darstellt. Ebenso ist die Seitenprojektion von pq die Gerade p_1q_1 u. s. f. Durch Parallelen zur Achse werden die Höhen aus der Seitenprojektion übertragen.

Von den so bestimmten Punkten gehen die Kanten der Stufen nach den Teilpunkten auf der Achse der Wendeltreppe, welche, wie in der Figur angedeutet ist, auf gleiche Weise aus der Seitenprojektion bestimmt werden. Die Kanten treffen die Säule, um welche die Treppe sich windet, senkrecht über denjenigen Punkten, in welchen die Projektionen der Kanten die Grundfläche der Säule schneiden.

Die bei dem Geländer vorkommende Schraubenlinie wird ebenfalls mit Hilfe der Horizontalprojektion und der Seitenprojektion bestimmt. Die Dicken der Treppenstufen und diejenigen der Geländerstangen u. s. w. fügt man schliesslich nach dem Augenmafse hinzu.

6) Abbildung eines Gesimses (Fig. 84).

Fig. 84α zeigt den Grundriss eines Gesimses, welches um einen durch Schraffierung angedeuteten Pfeiler von rechteckiger Grundfläche läuft. Die perspektivische Abbildung des Pfeilers ist leicht zu finden; die Kante BC ist senkrecht zur Bildfläche angenommen, weshalb ihre Abbildung bc nach dem Hauptpunkte A gerichtet ist. Wir zeichnen nun einen zur Bildfläche parallelen Durchschnitt (Profil) des Gesimses, dessen Abbildung in wahrer Gestalt ekpqf erscheint. Durch die Eckpunkte dieses Profils können wir die Abbildungen der Kanten des Gesimses nach dem Hauptpunkte A ziehen. Ferner geht aus der Betrachtung des Grundrisses (α) hervor, dass die Projektionen der Gesimsecken (Gehrungen oder Gehrschnitte) die geraden Linien BR und CS sind, welche die rechten Winkel an den Ecken B und C halbieren. Diese Projektionen müssen deshalb in der perspektivischen Abbil-

dung nach den beiden Distanzpunkten gerichtet sein. In unserer Zeichnung sind zu beiden Seiten des Hauptpunktes noch $\frac{D}{8}$ und $\frac{D_1}{8}$ angegeben; man macht deshalb $\beta A = \frac{1}{8}$ Ab und $\gamma A = \frac{1}{8}$ Ac, zieht br parallel zu $\beta \frac{D}{8}$ und cs parallel zu $\gamma \frac{D_1}{8}$, dann sind br und cs als Projektionen der beiden Gehrungen anzusehen. Diese Projektionen liegen in einer durch bc gehenden zur Horizontalebene parallelen Ebene.

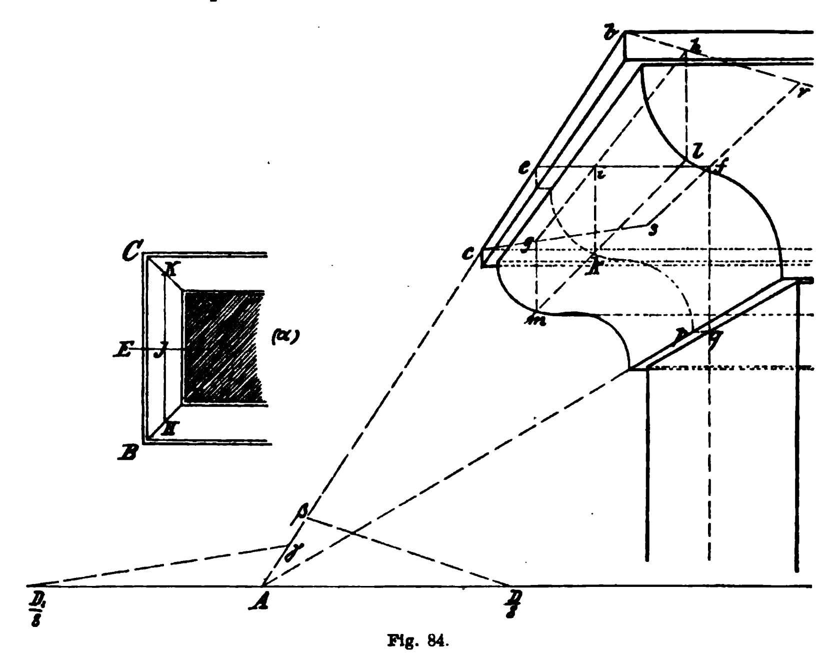


Fig. 84.

Die Abbildung eines Punktes des Gehrschnittes ergiebt sich nun leicht auf folgende Weise. Man zieht durch einen beliebigen Punkt k des Profils eine auf der cylindrischen Fläche des Gesimses liegende Seitenlinie, deren Abbildung von k nach A gerichtet ist. Jetzt wird k auf ef projiciert und durch die Projektion i zieht man nun die Projektion gh jener Seitenlinie, welche ebenfalls nach A gerichtet ist. Die Abbildungen m und l der Endpunkte der Seitenlinie liegen senkrecht unter den Punkten g und h, in welchen gh die Projektionen der Gehrungen trifft.

Auf diese Weise lassen sich beliebig viele Punkte der Gehrschnitte bestimmen. Besondere Aufmerksamkeit erfordern auch die Richtungen der Tangenten in den Anfangs- und Endpunkten der Bögen, sowie bei den etwaigen Wendepunkten derselben.

B. Schräge Ansichten.

Wir verstehen, wie schon in I, 25 angegeben, unter schräger Ansicht, die Abbildung eines Gegenstandes bei beliebiger Stellung der Bildfläche. Es wird also vorausgesetzt, dass bedeutsame Flächen, z. B. Frontflächen von Gebäuden u. s. w. nicht parallel zur Bildfläche sind. Innenansichten, wie die in den Figuren 80—83 dargestellten, eignen sich schon eher zu einer Darstellung in gerader Ansicht, dagegen wird man bei frei stehenden Gebäuden der schrägen Ansicht ihres ungezwungenen und lebendigen Charakters wegen den Vorzug geben. Wir wollen nun an einigen grösseren Beispielen die Herstellung solcher Abbildungen unter Anwendung der früher entwickelten Gesetze näher erläutern.

7) Abbildung einer Kirche (Fig. 85).

Aus dem unterhalb der Achse $O''X''$ angegebenen Grundriss erkennt man die Lage des Gebäudes gegen die Bildfläche. Machen wir nun AA_1 senkrecht zum Horizont und gleich der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche, ziehen alsdann A_1f parallel zu BE, so erhalten wir in f den Fluchtpunkt aller zu BE parallelen Geraden. Ferner bestimmen wir noch durch den um f als Mittelpunkt gezeichneten Kreisbogen A_1T den zugehörigen Teilungspunkt. Mit Hilfe der beiden Punkte f und T kann man nun leicht die Abbildung des Grundrisses konstruieren. Weil aber wegen der geringen Höhe des Horizonts über der Achse OX die Abbildungen der Seiten dieser Grundfläche sehr spitze Winkel miteinander bilden, so können die Eckpunkte hiernach nicht mit der nötigen Genauigkeit bestimmt werden.

Es sei die zu OX parallele Gerade $O''X''$ die Spur einer tiefer liegenden Horizontalebene E, deren Fluchtlinie demnach wieder der Horizont ist. Wir konstruieren nun die perspektivische Abbildung der Grundfläche des Gebäudes in bekannter Weise, als wenn dieselbe in E läge. Ist $m'f$ die Abbildung der Geraden, in welcher BE liegt, und b' die Abbildung von B, so hat die Abbildung der entsprechenden Geraden in der ersten Horizontalebene ebenfalls f zum Fluchtpunkt und ihre Spur m liegt senkrecht über der Spur m' (und selbstverständlich auch senkrecht über M).

Auf mf liegt nun die Abbildung b des Eckpunktes B und zwar ebenfalls senkrecht über b'. Da in der perspektivischen Abbildung die Ecken des tiefer liegenden Grundrisses deutlich genug werden, so kann man hieraus dieselben mit Sicherheit entnehmen. Die Höhen sind dann nach I, 18 aufzutragen.

Wir bemerken noch, dass die Abbildung einer Ecke z. B. B nach I, 31 mit Hilfe des Teilpunktes bestimmt werden kann. Hiernach ist $m'n' = MB$ zu machen, dann schneidet die Gerade $n'T$ die Linie $m'f$ in der Abbildung b' des Punktes B.

Sind die in unserer Figur angegebenen Hauptumrisse konstruiert, so wird ein geübter Zeichner hinreichenden Anhalt haben, um die noch fehlen-

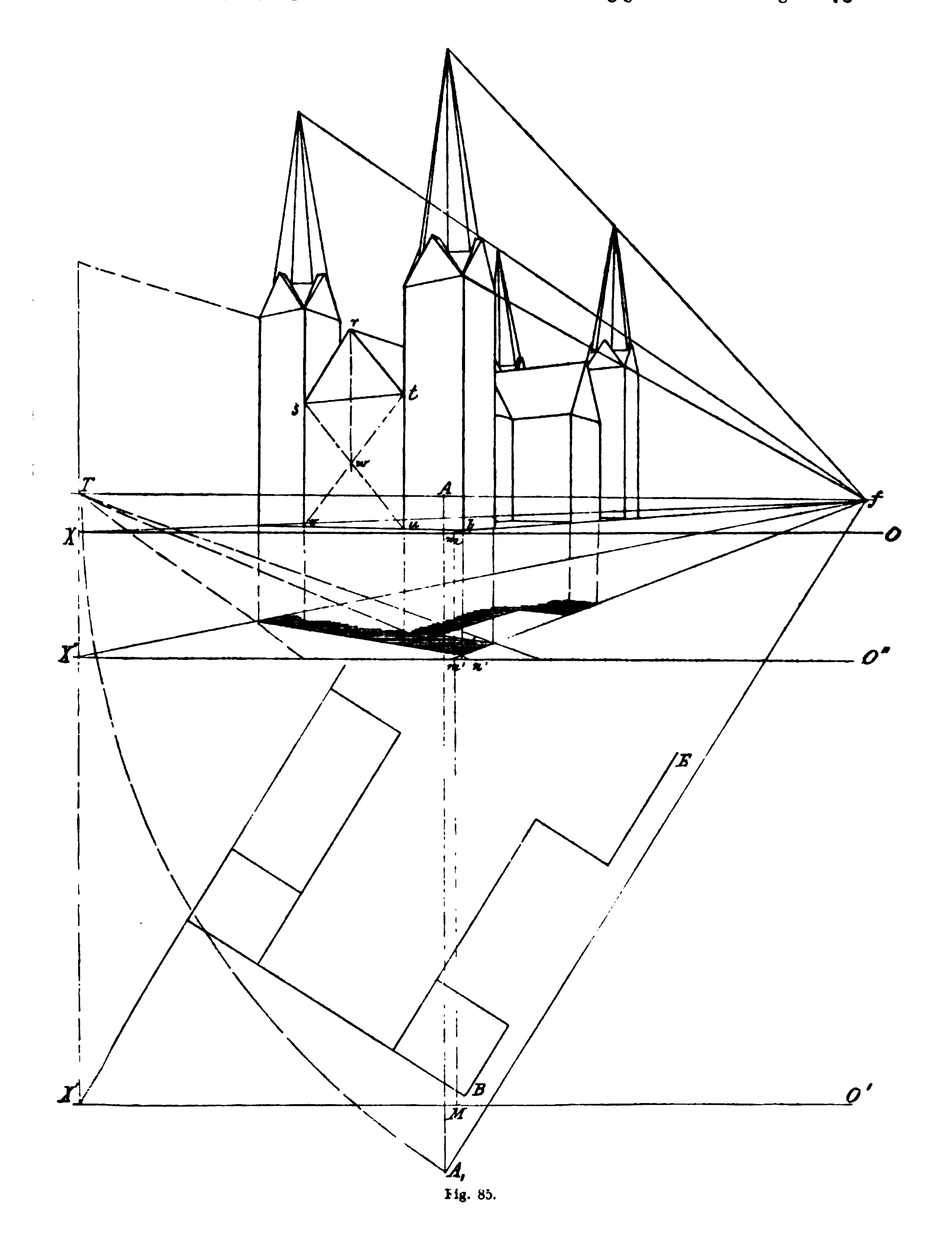


Fig. 85.

den Einzelheiten auch ohne viele Konstruktionslinien nach dem Augenmafse hinzufügen zu können. Ist die Zeichnung in sehr grossem Mafsstabe angefertigt, so wird man allenfalls noch die Breiten der Fenster und Thüren durch eine perspektivische Einteilung feststellen. Das häufig vorkommende Halbieren von Linien ist sehr einfach zu machen, weil diese an Gebäuden in der Regel als Rechteckseiten auftreten. Soll z. B. zur Bestimmung der Giebelspitze r, welche senkrecht über der Mitte von st liegt, die letztere perspektivisch halbiert werden, so zieht man in dem Rechteck, dessen Abbildung stuv ist, die beiden Diagonalen su und vt, und legt durch den Schnittpunkt w die zur Achse OX senkrechte Gerade wr. Diese geht durch die perspektivische Mitte von st.

8) Abbildung eines romanischen Würfelkapitäls (Fig. 86).

Die Hälfte der Vertikalprojektion des Kapitäls ist links angegeben, um die nötigen Höhen festzustellen, und durch einen Teil des Grundrisses ist die Lage des Kapitäls gegen die Bildfläche näher bestimmt. Horizont und Hauptpunkt liegen unter dem Kapitäl, wie dieses in der Regel der Wirklichkeit entspricht. Die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche ist so gross angenommen, dass nur $\frac{D}{8}$ als erreichbar vorausgesetzt wird. Die Fluchtpunkte der beiden Kanten bc und be liegen deshalb weit ausserhalb der Grenzen der Zeichenfläche; die Abbildungen aller zu diesen parallelen Kanten können aber leicht, wenn auch etwas umständlich, nach I, 28 bestimmt werden. Einfacher und übersichtlicher wird aber die Konstruktion, wenn man, wie in I, 30, eine Seitenprojektion des Kapitäls zu Hilfe nimmt. Es genügt, wenn man die geraden Kanten und etwa die horizontalen und vertikalen Tangenten der Kreisbögen auf die Seitenebene projiciert. Dagegen kann man die Projektionen der Kreise selbst entbehren.

Hat man die Abbildung der Seitenprojektion ähnlich wie in I, 30 bestimmt, so findet man leicht die Abbildungen der Eckpunkte. Es liegen z. B. die Punkte c und e auf den durch die Seitenprojektionen c′ bez. e′ gezogenen Parallelen zur Achse und auf zweien zur Bildfläche senkrechten Geraden. deren Abbildungen Am bez. An sind. Die Spuren m und n finden wir aus dem Grundriss durch Hinaufprojicieren der Punkte M bez. N. (Die durch b gehende Gerade mn, welche parallel zu OX ist, stellt die Spur der obersten horizontalen Begrenzungsebene des Kapitäls dar, wenn wir annehmen, dass der Eckpunkt b in der Bildfläche liegt.)

Um die Abbildungen der Halbkreise zu zeichnen, suchen wir für jeden Kreis die Tangente, welche mit dem horizontalen Durchmesser desselben parallel ist, und ausserdem die vertikalen Tangenten in den Endpunkten der Durchmesser. Diese Tangenten bilden mit den vier Durchmessern die Kanten eines halben Würfels, dessen Abbildung ebenfalls mit Hilfe der Seiten-

projektion gefunden wird. Bei kleineren Dimensionen sind diese Tangenten völlig ausreichend, um darnach die Abbildungen der Kreise zeichnen zu können. Für eine Zeichnung in grossem Maſsstabe bestimmt man noch die Abbildungen der Punkte, in welchen die nach den Schnittpunkten zweier

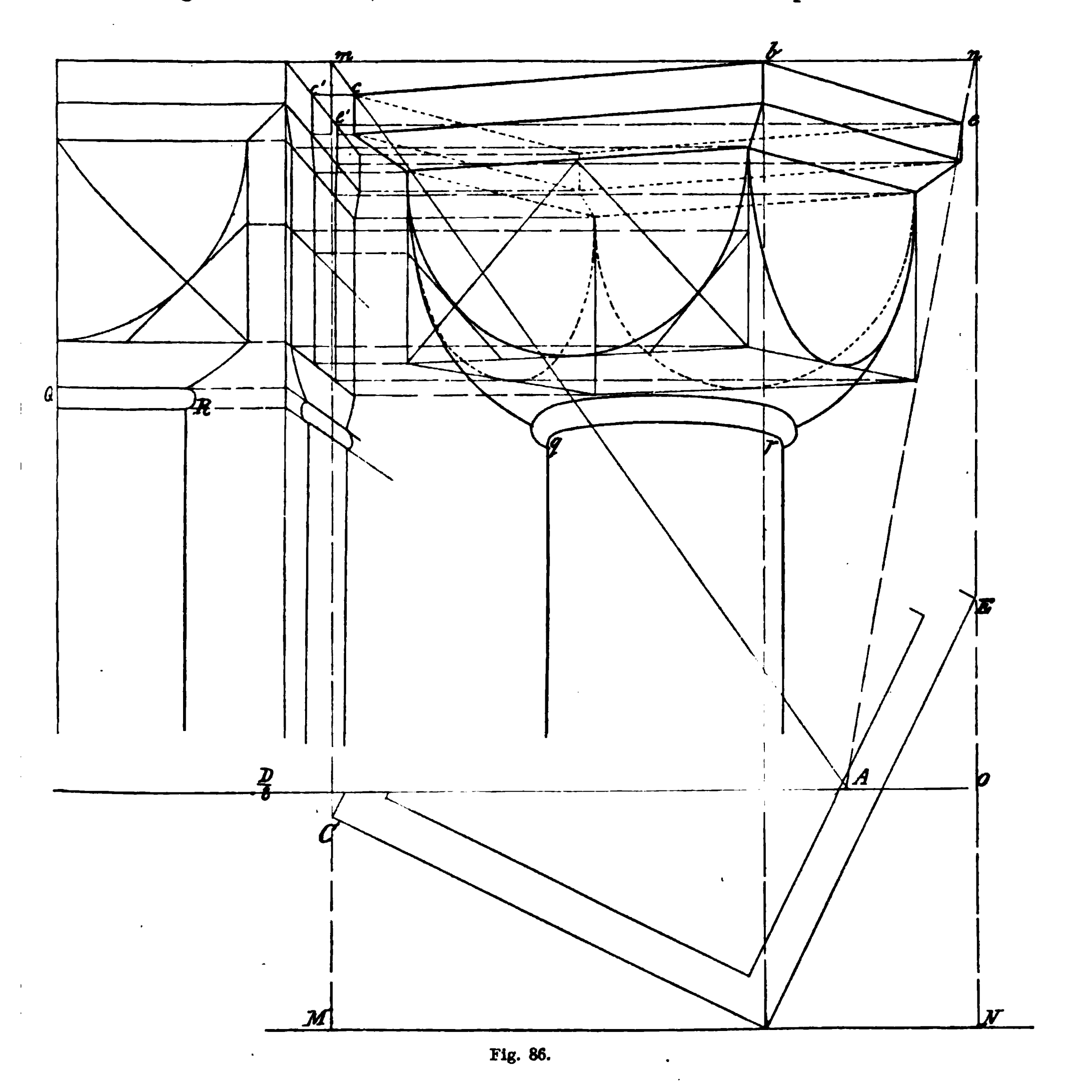


Fig. 86.

Tangenten gerichteten Radien die Kreise treffen und etwa noch die Abbildung der Tangenten für diese Punkte. Alle diese Linien ergeben sich, wie man aus Fig. 86 sieht, leicht mit Hilfe der Seitenprojektion. Um den Säulenschaft zeichnen zu können, konstruieren wir die Abbildung qr des kreisförmigen Querschnittes QR nach III; und ziehen an die Ellipse qr zwei senk-

rechte Tangenten als sichtbare Begrenzungslinien der Abbildung des Schaftes. Nimmt aber der Durchmesser des Schaftes nach unten zu, so zeichnet man noch mehrere Querschnitte, wodurch sich dann leicht die Gestalt der äusseren Grenzlinien ergiebt.

Zwischen den Halbkreisen des Würfelkapitäls und dem Wulst liegt ein Teil einer Kugelfläche, deren Umriss am einfachsten, wie in Fig. 76, bestimmt wird. Diese Andeutungen werden genügen, um darnach die Konstruktion der ganzen Abbildung ausführen zu können.

9) Abbildung des Mittelschiffes einer romanischen Kirche (Fig. 87).

Die Abbildung stellt das Innere der Ruine Paulinzella in Thüringen nach einer Skizze des Verfassers dar. Um die Pfeiler mehr zum Vorschein zu bringen, ist nur die eine Seite des Mittelschiffes und zwar in schiefer Ansicht dargestellt. Der Fluchtpunkt aller mit der Längenrichtung parallelen Kanten liegt in f, eben ausserhalb der Grenzen der Abbildung, aber für den Gebrauch noch bequem zu erreichen. Der Horizont ist in der Höhe des menschlichen Auges über dem Erdboden angenommen. Dementsprechend sind die als Staffage dienenden menschlichen Figuren, welche sich auf dem nach dem Hintergrunde führenden Fusswege befinden, so gezeichnet, dass der Horizont nahezu durch die Augen jeder derselben geht. Man sieht, wie hierdurch die Grösse der menschlichen Figur für jede beliebige Stellung auf der Horizontalebene bestimmt ist.

Die Zeichnung der Kapitäle ist aus Fig. 86 bekannt. Die Form weicht etwas von der daselbst dargestellten ab, indem die vorkommende Kugelfläche etwas länger gestreckt ist und deshalb mehr ellipsoidisch erscheint. Die Einteilungen für die Säulenstellungen und Fensteröffnungen lassen sich leicht auf bekannte Weise bestimmen.

10) Abbildung eines Tunnels (Fig. 88 u. 89).

In Fig. 88 ist der Grundriss und ein Querschnitt des Tunnels in kleinem Mafsstabe dargestellt. A ist der Hauptpunkt, A_1 der in die Bildfläche niedergelegte Augenpunkt. Auf dem Horizont ist noch $\frac{D}{3}$ als erreichbar angenommen. Der Querschnitt BC sei parallel zur Bildfläche (oder liege in derselben). Seine Abbildung bqc erscheint dann in wahrer Gestalt. KL sei die Projektion eines zweiten Querschnittes. Durch K ziehen wir die zur Bildfläche senkrechte Gerade KM, deren Abbildung mA ist; machen jetzt $mn = \frac{1}{3} KM$ und ziehen die Gerade $n \frac{D}{3}$. Diese letztere bestimmt auf mA in k die Abbildung des Punktes K. Auf gleiche Weise finden wir l als Abbildung von L, und erhalten dadurch in der Geraden kl die Abbildung der Horizontalprojektion des neuen Querschnittes. Da der Tunnel nicht

geradlinig, sondern kreisförmig verläuft, so sind auch die horizontalen Lagerfugen Kreisbögen; und wenn man die Punkte, in welchen eine Lagerfuge

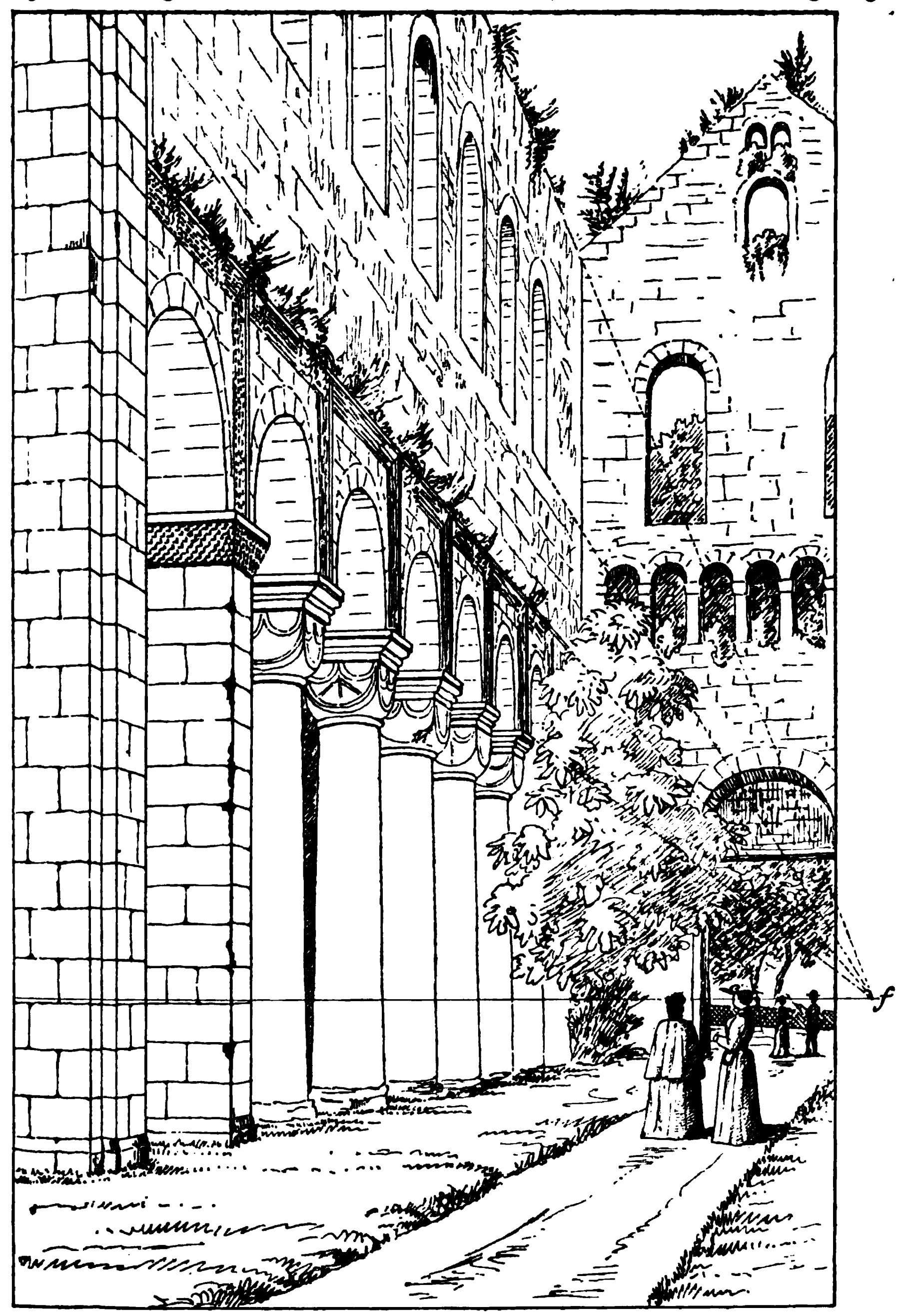


Fig. 87.

die beiden Querschnitte BC und KL schneidet, durch eine Gerade verbindet, so ist dieselbe der Sehne BK parallel. Wir bestimmen deshalb durch die zu BK Parallele A_1f den Fluchtpunkt f jener Sehne und ziehen durch eine

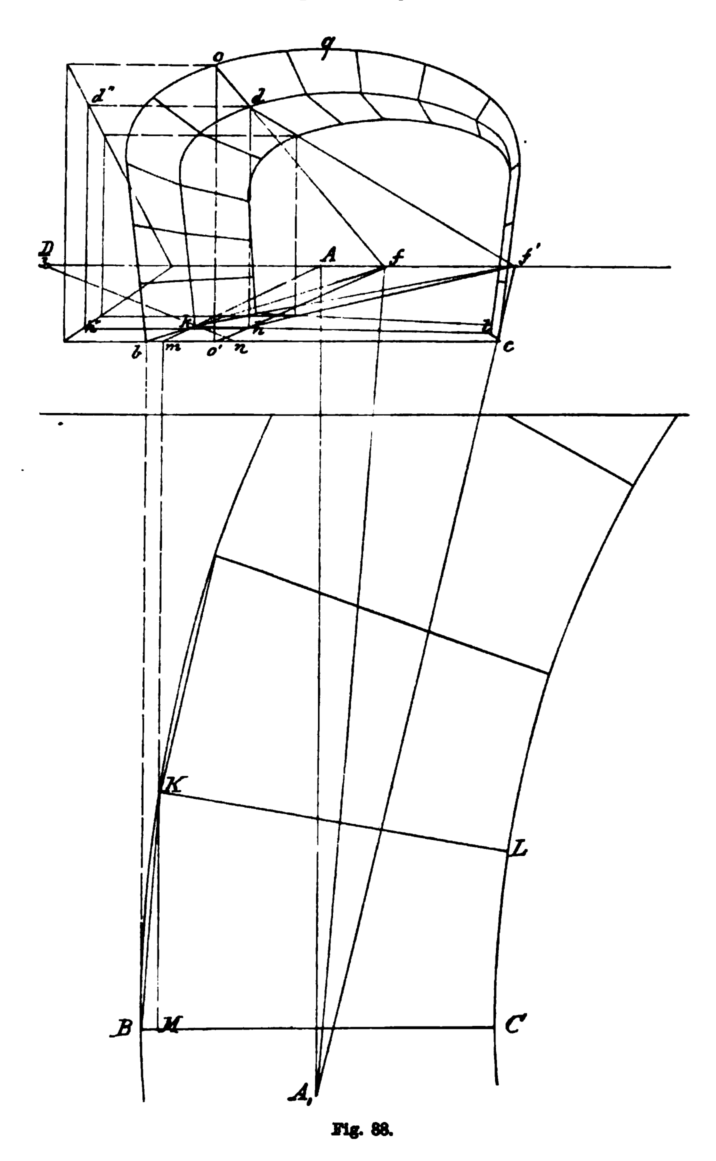


Fig. 88.

Anzahl von Punkten des Querschnittes bqc Geraden nach f. of sei eine der letzteren, o'f die Abbildung ihrer Horizontalprojektion; dann liegt senkrecht über dem Punkte h, in welchem o'f die Gerade kl trifft, der Punkt d auf of. Folglich ist d die Abbildung eines Punktes des zweiten Quer-

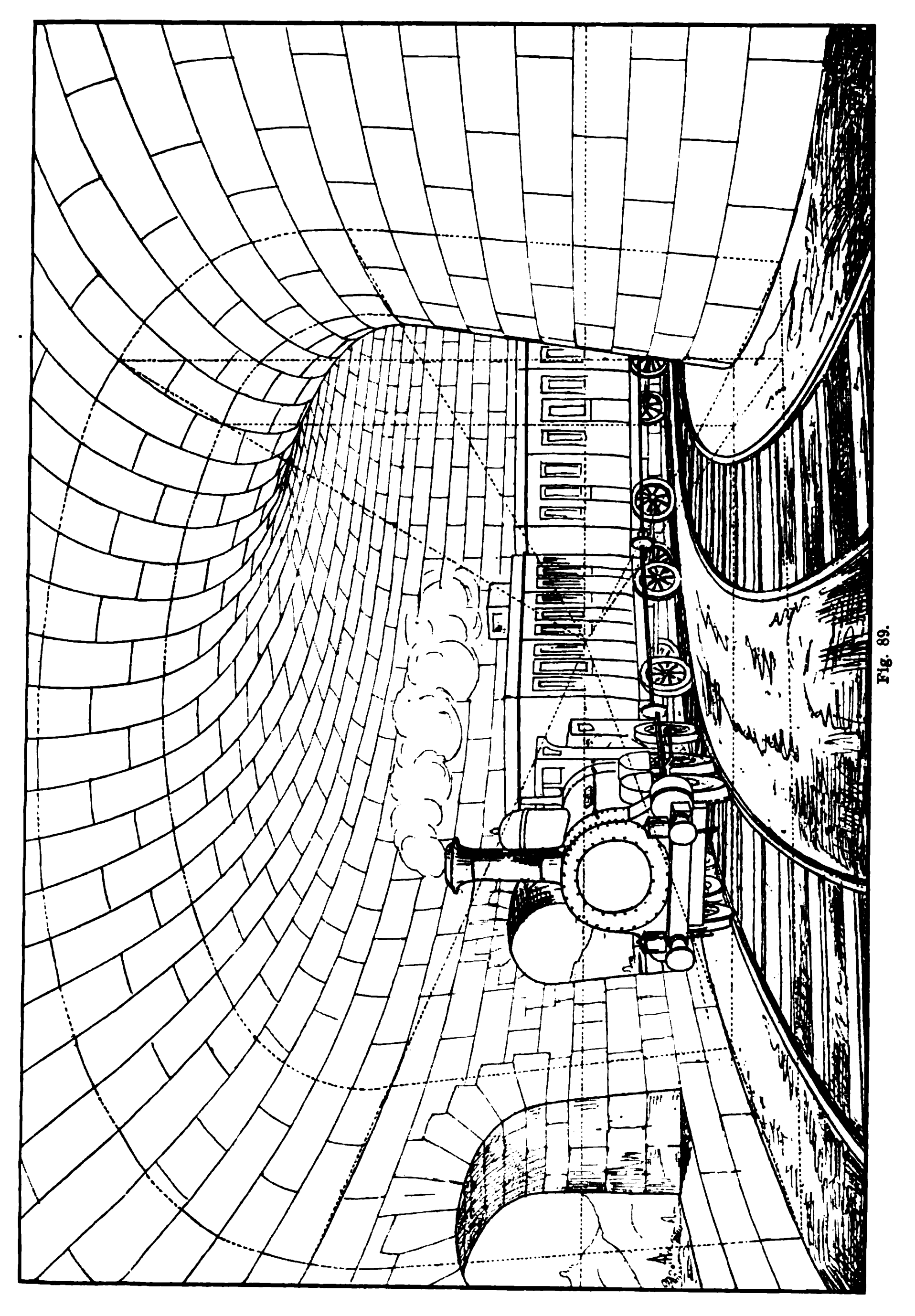


Fig. 89.

schnittes. Auf gleiche Weise ergeben sich die übrigen Punkte. Nähern sich die Abbildungen der Sehnen der zum Horizont senkrechten Lage, so bestimmt man die Höhe aus einer Seitenprojektion. Dasselbe ist ebenfalls in Fig. 88 angedeutet und bedarf wohl keiner Erläuterung, da wir schon mehrfach Gebrauch davon gemacht haben.

Sind nun die Abbildungen einer hinreichenden Zahl von Querschnitten gezeichnet, so lassen sich hiernach die Lagerfugen mit Hilfe der wie oben konstruierten Punkte angeben. Für alle Punkte des Querschnittes b q c sind die Tangenten der Lagerfugen nach dem Hauptpunkte gerichtet, und für die Punkte, welche auf anderen Querschnitten liegen, kann man die Fluchtpunkte der zugehörigen Tangenten leicht aus dem Grundriss bestimmen. Beim Zeichnen der Stossfugen (d. h. derjenigen Fugen, welche senkrecht zu den Lagerfugen stehen), können wir uns nach den konstruierten Querschnitten richten; es wird genügen, diese zwischen den letzteren nach dem Augenmafse zu zeichnen. An der rechten Seite werden die Lagerfugen von dem oben in der Gewölbefläche scheinbar plötzlich abbrechenden Umriss eingehüllt. Man s. Fig. 89, welche die ausgeführte Abbildung darstellt.

Das Motiv ist der Sömmeringbahn entlehnt. Diese besitzt Tunnels oder Schutzgallerien mit seitlichen Öffnungen, welche Ausblicke ins Freie gestatten.

11) Abbildung eines Korridors und Treppenhauses (Fig. 90).

Das Motiv ist einer Skizze des Verfassers von einem Korridor der Technischen Hochschule zu Karlsruhe entnommen. Die Lage des Augenpunktes und der Bildfläche ist in dem in kleinem Mafsstabe beigefügten Grundriss (Fig. 90α) angedeutet. Die Bildfläche steht nicht senkrecht zur Längenrichtung; es haben deshalb alle nach rückwärts laufenden Kanten, auch diejenigen der Treppenstufen, welche der Längenrichtung parallel sind, ihren Fluchtpunkt F links vom Hauptpunkt. Durch diese Anordnung wird der Durchblick auf das Treppenhaus zu grösserer Entwickelung gebracht. Die Konstruktion wird allerdings umständlicher als bei gerader Ansicht, weil hauptsächlich die vielen Fugen des Fussbodens, sowie die Verbindungslinien der Bogenanfänge, welche senkrecht zur Längenrichtung stehen, ihren Fluchtpunkt weit ausserhalb der Zeichenfläche haben. Wollte man nun diese Linien nach I, 28 konstruieren, so würde eine ausserordentlich grosse Zahl von Hilfslinien erforderlich sein; deshalb kann man für diesen und ähnliche Fälle das folgende praktische Näherungsverfahren anwenden.

Nachdem die äussersten dieser Linien, nämlich bc und ef, durch genaue Konstruktion bestimmt sind, verlängert man diese Geraden bis zu den beiden senkrechten Randlinien der Zeichnung. Trifft nun e f in m und n die beiden Randlinien, so teile man die zwischen ef und dem Horizont liegenden Abschnitte mp und nq in dieselbe Anzahl gleicher Teile; dann gehen

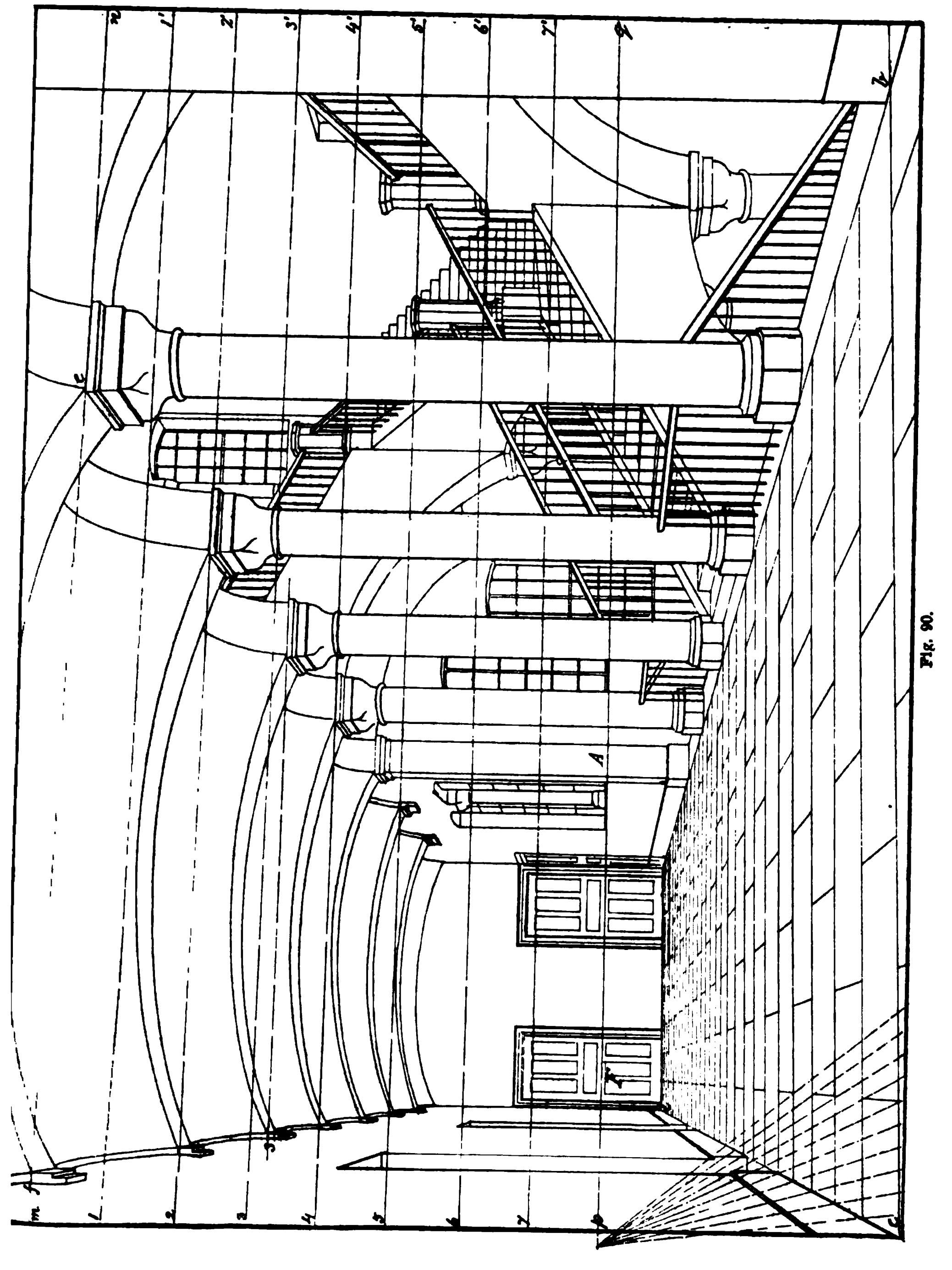


Fig. 90.

die Verbindungslinien gleichvielster Teilpunkte, wie z. B. 11′, 22′ u. s. f. sämtlich nach dem Fluchtpunkte aller zu ef parallelen Geraden. Ist nun durch irgend einen Punkt, z. B. durch s eine Gerade nach diesem Fluchtpunkte zu ziehen, so wird die Richtung derselben durch die benachbarten Geraden 33′ und 44′ so deutlich bezeichnet, dass man dieselbe auch mit hinreichender Genauigkeit nach dem Augenmafse hinzufügen kann. Gleiches gilt für die Fugen auf dem Fussboden, welche nach demselben Fluchtpunkte gehen. Dieselben werden auch auf diese Weise bestimmt, nachdem man zuvor ihre Schnittpunkte mit cF durch eine in Fig. 90 teilweise angedeutete perspektivische Teilung ermittelt hat.

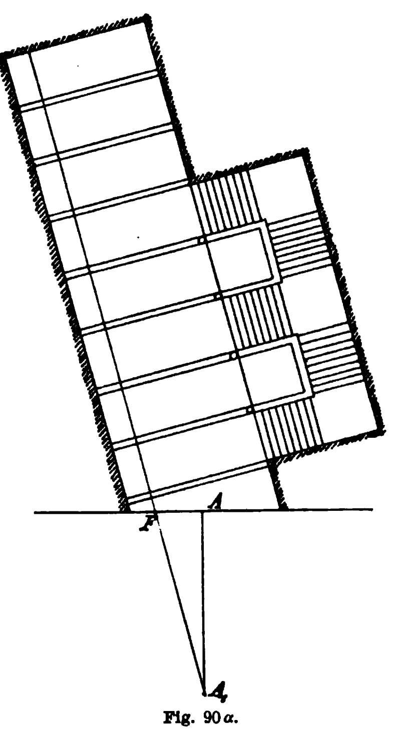


Fig. 90 a.

Nimmt man bei unserer Abbildung an, der Zeichner habe seinen Standpunkt auf dem Fussboden des Korridors gehabt, so müsste der Horizont in Augenhöhe über demselben liegen. Dies ist aber in Fig. 90 keineswegs der Fall, da ein Blick auf die Lage des Hauptpunktes in der im Hintergrunde befindlichen Thür zeigt, dass der Horizont erheblich hinabgerückt ist. Indessen wird, wenn Horizont und Hauptpunkt aus der Zeichnung beseitigt sind, dieser Umstand nicht leicht wahrgenommen werden. Das Hinabrücken des Horizonts bei Innenansichten lässt den abgebildeten Raum höher erscheinen, wie man leicht aus dem Vergleich der beiden in Fig. 91 dargestellten Abbildungen desselben Korridors für zwei verschiedene Horizonthöhen ersieht.

Man wird beim Betrachten der ersteren Abbildung aus der grösseren Untersicht des Gewölbes auf eine tiefere Lage des Augenpunktes schliessen, und da man die letztere unwillkürlich mit der Höhe der menschlichen Figur vergleicht, so beurteilt man auch die Höhe des dargestellten Innenraumes nach dieser. Wenn also eine menschliche Figur darzustellen wäre, welche z. B. ihren Standpunkt zwischen den beiden vorderen Wandpfeilern hätte, so würde diese für die in Fig. 91 dargestellten Fälle sehr verschiedene Grössen haben müssen. Im ersten Falle würde hiernach das Gewölbe etwa die 5fache, im zweiten Falle aber nur die ca. 2½fache Höhe dieser Figur zeigen.

Im übrigen ist auch für die Abbildung Fig. 90 die Möglichkeit einer

so niedrigen Lage des Horizontes nicht ausgeschlossen. Sie entspricht etwa der Augenhöhe des Zeichners beim Sitzen auf einem niedrigen Stuhle.

Betrachten wir ferner in Fig. 90α (Grundriss) die Lage der Bildfläche und des Augenpunktes in Bezug auf die links liegende Seitenwand, so ist schon hieraus ersichtlich, dass die letztere in der perspektivischen Abbildung starke Verzerrungen aufweisen muss. Dennoch wirken diese nicht so auffällig, weil das Hauptinteresse von den vier Säulen und der Durchsicht auf das Treppenhaus in Anspruch genommen wird.

Innenansichten, Strassenprospekte u. s. w. können manchmal an den Rändern starke Verzerrungen enthalten, ohne dass dieselben störend wirken. Bei den Abbildungen frei stehender Gebäude machen starke Verzerrungen in den meisten Fällen einen unangenehmen Eindruck. Nun kann man aber,

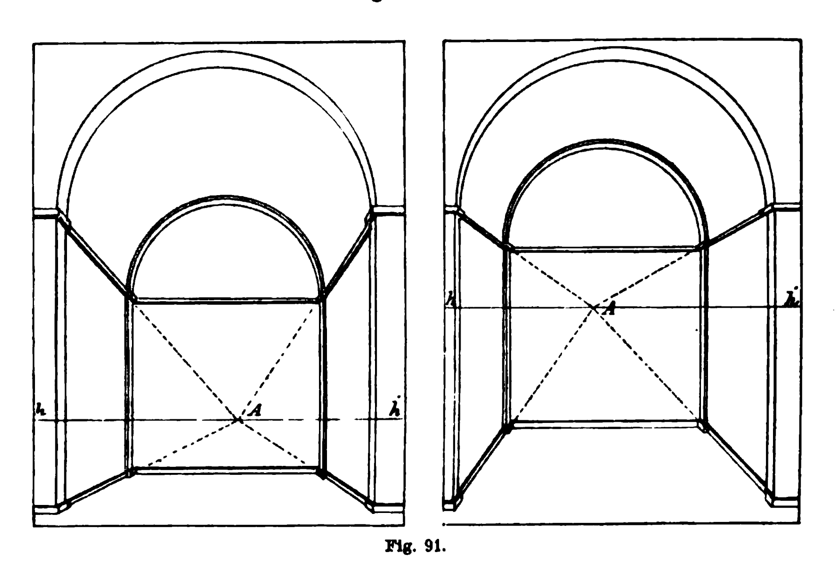


Fig. 91.

wie wir bei einem folgenden Beispiel sehen werden, von der vollkommen exakten perspektivischen Darstellung in solchen Fällen abweichen, wo bedeutsame Teile mehr hervorzuheben, oder allzu starke Verzerrungen zu mildern sind, wenn der begannene Fehler ohne Nachmessen gar nicht wahrgenommen werden kann.

12) Abbildung des Inneren einer Kirchenruine (Fig. 92).

Die vorliegende Abbildung, welche nach einer Skizze des Verfassers vom Jahre 1889 angefertigt ist, stellt das Innere der Ruine der St. Katharinenkirche zu Wisby auf der Insel Gotland dar. Da die vorderen achteckigen Pfeiler dem Augenpunkte sehr nahe liegen, so müssten die Kapitäle starke Verzerrungen erhalten. Um dies zu vermeiden, ist der Fluchtpunkt für die parallel mit der Längenrichtung laufenden Kanten für die oberen

Teile der Pfeiler hinaufgerückt nach F, während für die Pfeilerbasen der Fluchtpunkt f in der richtigen Augenhöhe (senkrecht unter F) beibehalten ist. Der dadurch begangene Fehler ist namentlich, nach Beseitigung aller Hilfslinien, kaum zu bemerken und wird dem unbefangenen Beschauer nicht

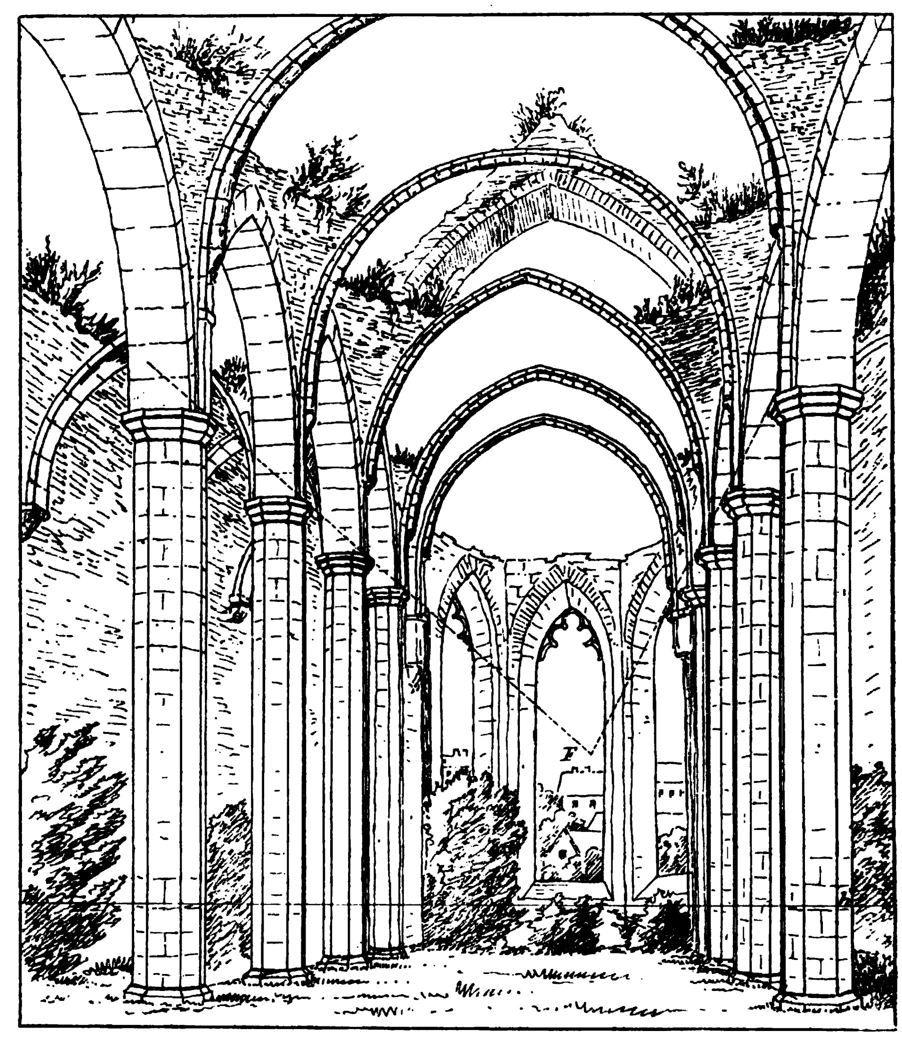


Fig. 92.

leicht auffallen. Wir schliessen daraus, dass dies Mittel wohl zulässig ist. wenn der Zweck, unschöne Verzerrungen zu beseitigen, dadurch in unauffälliger Weise erreicht werden kann.

13) Abbildung der Elbbrücke bei Hamburg (Fig. 93).

Die Abbildung dieser grossen Brücke ist nicht streng aus Grund- und

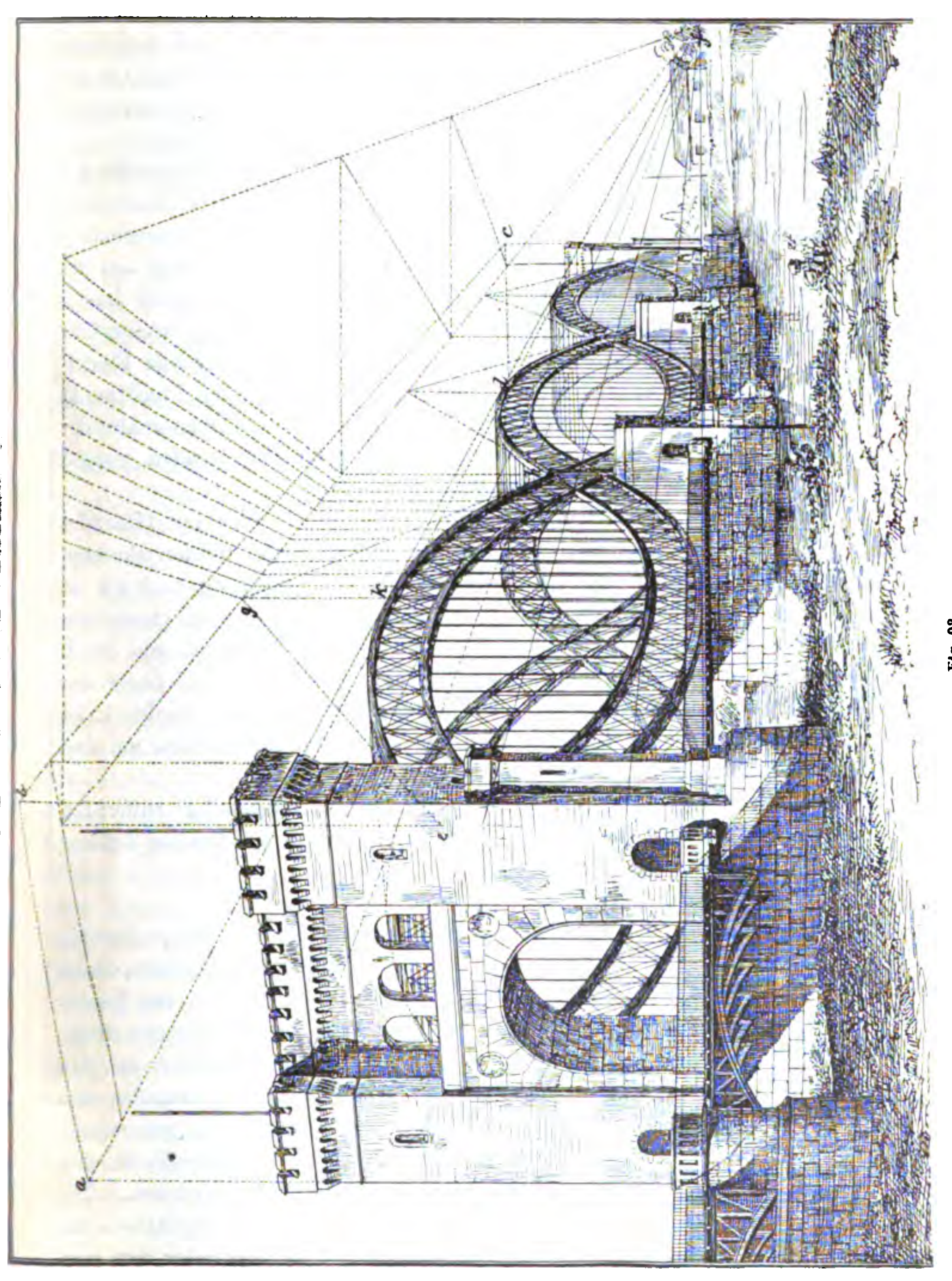


Fig. 93.

Aufriss konstruiert, sondern nach der Natur gezeichnet und dann, namentlich in den vielfach vorkommenden Einteilungen perspektivisch berichtigt. Hierbei ist nun von II, 24 Gebrauch gemacht, wonach der rechteckige Grundriss durch irgend ein Viereck dargestellt werden kann, dessen gegenüberliegende Seiten sich paarweise auf dem Horizont schneiden. Diesen Grundriss, dessen Seitenverhältnisse möglichst genau nach dem Augenmaſse gezeichnet sind, bringt man ähnlich wie in Fig. 85, in grösserer Entfernung vom Horizont an (in Fig. 93 durch abcd oberhalb des Horizonts angedeutet).

Die Einteilungen sind, wie schon früher gezeigt, unabhängig von der Lage des Hauptpunktes, und können, da es sich nur um horizontale Linien handelt, ausgeführt werden, sobald der Horizont bekannt ist. Derselbe fällt in Fig. 93 mit der Brückenbahn zusammen. Der rechts liegende Fluchtpunkt f der Längenrichtung ist noch zugänglich, während der Fluchtpunkt der zur Breite der Brücke parallelen Geraden links, weit ausserhalb der Zeichenfläche, liegt. Die nach diesem Punkte gehenden Geraden werden nach dem in 11) angegebenen Verfahren bestimmt.

Die Bögen, welche bei den Trägern vorkommen, werden mit Hilfe der Tangenten in den Endpunkten, und in den höchsten und tiefsten Punkten gezeichnet. Die Höhe des Schnittpunktes der Tangenten eg und gh ist nach dem Augenmaſse geschätzt und hiernach die Linie fg gezeichnet. Ferner ist die perspektivische Mitte zwischen e und h bestimmt und durch dieselbe die Gerade gk senkrecht zum Horizont gezogen und auf dieser der Scheitel k des Bogens festgelegt. Die Tangente im höchsten Punkte k ist nach dem Fluchtpunkte f gerichtet. Diese Tangenten reichen hin, um den Bogen ekh mit Sicherheit zeichnen zu können.

Die Abbildungen der senkrechten, gleichweit voneinander entfernten Tragstangen sind, wie aus Fig. 93 ersichtlich, durch perspektivische Teilung nach dem Früheren bestimmt worden.

Meereshorizont.

14) Kommt auf einer Abbildung eine Wasserfläche vor, so ist dieselbe als eine horizontale Ebene zu betrachten, deren Fluchtlinie der Horizont ist. Von der Kugelgestalt der Erde kann hierbei gänzlich abgesehen werden. Es können demnach die Abbildungen von Wasserflächen niemals über den Horizont hinausgehen, und streng genommen, auch bei Abbildungen der Meeresfläche den Horizont nicht einmal völlig erreichen. Die scheinbare Grenzlinie der Meeresfläche, der sog. Meereshorizont, liegt stets unter dem perspektivischen Horizont; die Abweichung beider hängt von der Höhe des

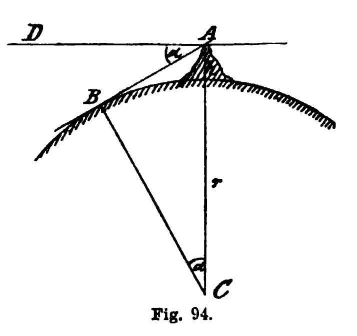


Fig. 94.

Augenpunktes A über der Meeresfläche ab. Ist die letztere gleich h (Fig. 94) und ziehen wir durch den Augenpunkt A die Gerade AD senkrecht zum Halbmesser r, legen ferner von A die Tangente AB an die Erdkugel, so heisst der Winkel $DAB = \alpha$ die Depression des Meereshorizontes. Ziehen wir noch den Halbmesser von C nach dem Berührungspunkte B, so ist auch $\angle ACB = \angle BAD = \alpha$ und hieraus ergiebt sich

$$\cos \alpha = \frac{r}{r + h}.$$

Der Erdhalbmesser ist nun ca. 6377350 m. Hieraus ergiebt sich leicht, dass für $h = 100$ m die Depression α des Meereshorizontes ca. $19' 10''$ beträgt.

Nimmt man den Abstand des Augenpunktes von der Bildfläche gleich 1 m an, so liegt hiernach der Meereshorizont bei so grosser Höhe des Augenpunktes nur ca. $5\frac{1}{2}$ mm unter dem perspektivischen Horizont.

Für $h = 10$ m ergiebt sich bei denselben Annahmen die Tiefe des Meereshorizontes unter dem perspektivischen Horizont gleich 1,5 mm.

Aus diesen Zahlen geht deutlich hervor, dass man bei allen Abbildungen der Meeresfläche, den Meereshorizont mit dem perspektivischen Horizont ohne irgend welchen erheblichen Fehler zusammenfallen lassen kann. Fig. 95 ist eine hierher gehörige Abbildung nach einer Skizze des Verfassers. Dieselbe stellt einen Teil der noch erhaltenen Ringmauer der alten Hansastadt Wisby auf der schwedischen Insel Gotland dar. Der Augenpunkt lag etwa 45 m über dem Ostseespiegel, infolgedessen reicht auch der Horizont (und der mit demselben zusammenfallende Meereshorizont) fast bis zur halben Bildhöhe. Alle horizontalen Kanten und Fugen an den Türmen und Mauern haben ihre Fluchtpunkte auf dem Horizont. Deshalb werden die unterhalb desselben liegenden Geraden nach dem Hintergrunde zu aufwärts, die oberhalb liegenden scheinbar abwärts, gerichtet sein. Das Terrain ist nach dem Hintergrunde zu fallend, was sich namentlich durch den Gegensatz der horizontalen Kanten und Fugen, wo solche auftreten, bemerkbar macht. Dasselbe kann man auch aus den oberen Begrenzungsflächen der nahezu gleich hohen Türme schliessen, welche weiter nach rückwärts tiefer unter den Meereshorizont sinken.

Das Fallen des Terrains nach dem Hintergrunde zu wird ferner noch durch sog. Überschneidungen, wo kleine Bodenerhebungen die dahinter liegenden tieferen Partien teilweise verdecken, deutlich. Man sieht z. B. in unserer Abbildung von der Landstrasse, welche durch den ersten Turm in die Stadt führt, rechts nur ein kleines Stückchen, und von der Thoröffnung nur den obersten Teil des Spitzbogens. Beide werden durch eine geringe Bodenerhebung teilweise verdeckt, welche aber in der Zeichnung die Landstrasse tiefer liegend als den Vordergrund der Zeichnung erscheinen lässt.

Durch die letzte Reihe von Beispielen wird dem Studierenden einleuch-

tend, dass zur Herstellung einer guten Abbildung keineswegs jede Linie konstruiert zu werden braucht. Wie schon in B, 7) dieses Abschnittes angedeutet ist, wird man die eigentliche Konstruktion auf die grossen Haupt-

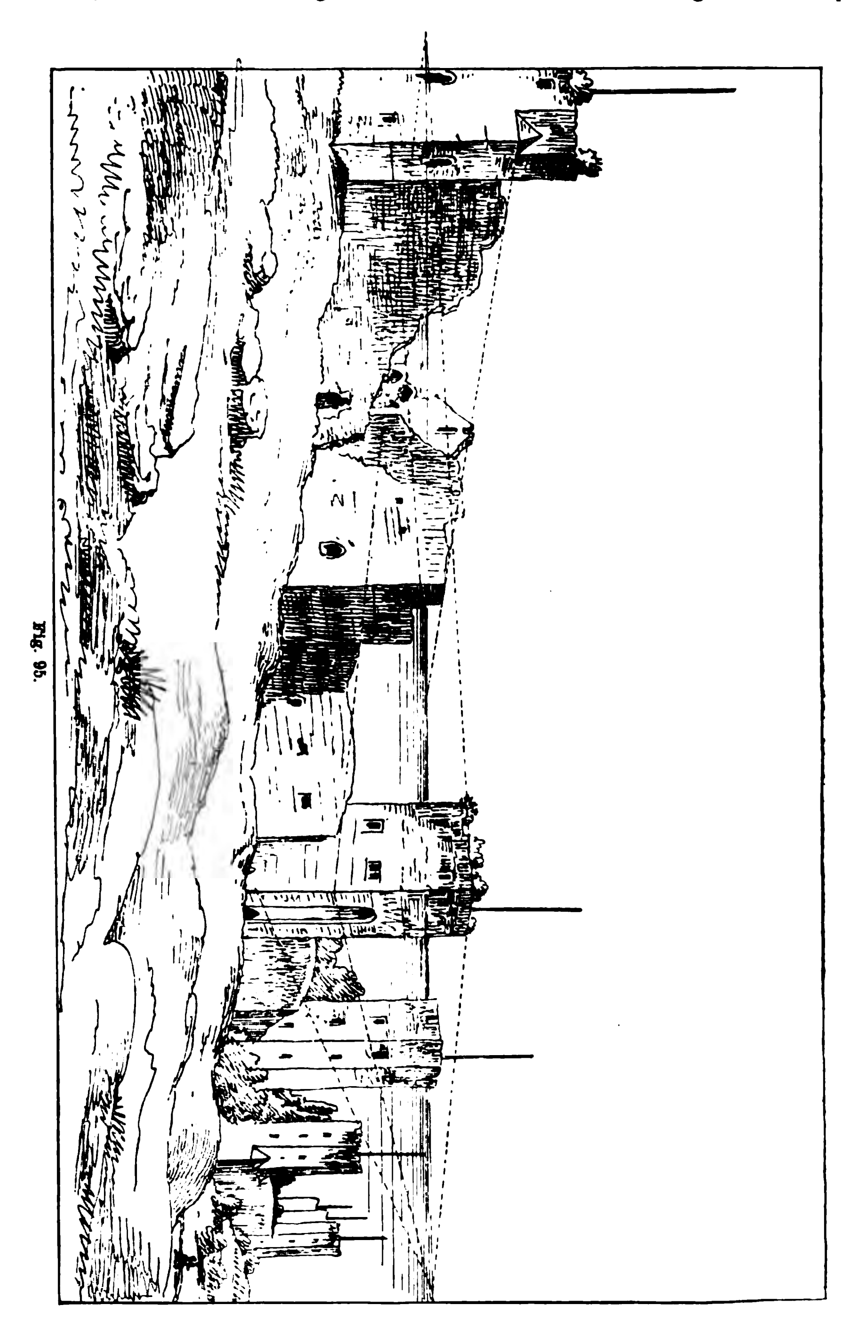


Fig. 95.

umrisse beschränken, und sie ausserdem nur noch da anwenden, wo man beim Zeichnen nach dem Augenmafse leicht erheblichen Fehlern ausgesetzt sein würde. Macht die fertige Zeichnung einen guten und richtigen Eindruck, so wird der Beschauer jedenfalls nicht auf den Einfall kommen, diesen Eindruck noch durch Nachmessen mit dem Zirkel erhöhen zu wollen. Doch ist zu dem freien Zeichnen das vollkommene Verständnis der perspektivischen Gesetze und der Hilfsmittel zur Konstruktion erforderlich. Erst wenn man diese selbständig zu handhaben weiss, wird man auch Einzelheiten einer grösseren perspektivischen Zeichnung den konstruierten Hauptumrissen mit Sicherheit aus freier Hand hinzufügen können.

V. Abschnitt.

Schattenkonstruktion.

1) Als natürliche Lichtquelle nehmen wir bei der Bestimmung der Schlagschatten die Sonne an. Wegen der ungeheuren Entfernung derselben können wir alle Lichtstrahlen als parallel betrachten (s. II. Teil, Einleitung), wenn auch das Sonnenbild dem Auge keineswegs als Punkt erscheint. Die äussersten Strahlen, welche wir vom Augenpunkt an den Sonnenrand ziehen können, bilden noch einen Winkel miteinander, welcher ungefähr $\frac{1}{2}$ Grad (genauer 31′16″) beträgt. Wir werden indessen hiervon absehen, und den Einfluss des scheinbaren Durchmessers der Sonne auf die Schlagschatten später kurz in Betracht ziehen.

Die Konstruktion der Schlag- und Eigenschatten ist nach den schon im II. Teil angegebenen Grundsätzen auszuführen. Wir gebrauchen dazu vor allen Dingen die Abbildungen der Lichtstrahlen.

Wird durch die Gerade BE (Fig. 96 α) die Richtung eines Strahles und durch CE seine gerade Projektion auf der Horizontalebene angedeutet, und zieht man nun vom Augenpunkte A_1 die Gerade $A_1 S$ parallel zu BE, so schneidet dieselbe die Bildfläche in S, dem Fluchtpunkte der Lichtstrahlen.

Nun ist $A_1 S$ auch als derjenige Strahl anzusehen, welcher vom Augenpunkte nach der (unendlich fernen) Lichtquelle, d. h. nach dem Mittelpunkte der Sonne geht, folglich bedeutet S die Abbildung dieses Punktes. Fällt man von S das Lot Ss auf den Horizont HH′, so ist der Fusspunkt s nach (I, 33) der Fluchtpunkt der Horizontalprojektionen aller Lichtstrahlen.

Der Schatten E eines Punktes B, welcher auf die Horizontalebene fällt, liegt im Durchschnitt des durch B gehenden Strahles und seiner Horizontal-

projektion. Ist die Gerade BC senkrecht zur Horizontalebene, so fällt ihr Schatten mit der Horizontalprojektion des Lichtstrahles zusammen (s. Einleitung 4, II. Teil).

In (β) ist die Konstruktion perspektivisch dargestellt. Die Strahlenrichtung ist durch den Fluchtpunkt S (Abbildung des Sonnenmittelpunktes) gegeben, s ist der Fluchtpunkt der Horizontalprojektionen der Strahlen. Ist also bc die Abbildung der in (α) angenommenen Geraden BC, c die Abbildung ihres Schnittpunktes mit der Horizontalebene, so stellen Sb und sc die Abbildungen des durch b gehenden Strahles und seiner Horizontalprojektion dar. Folglich ist der Schnittpunkt e die Abbildung des Schattens von b. Der Schatten der gegebenen Geraden erscheint in (β) als die Gerade ce. Ebenso findet man den Schatten einer anderen zur Horizontalebene senkrechten Geraden fg in fk. Die auf die Horizontalebene fallenden Schatten von Geraden, welche senkrecht zu derselben stehen, sind demnach alle nach s gerichtet.

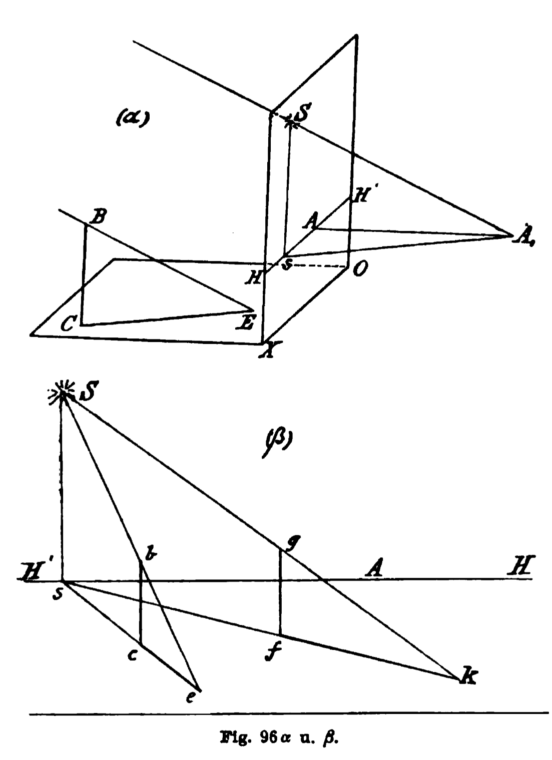


Fig. 96 α u. β.

In Fig. 96 ist die Voraussetzung gemacht, dass der Zeichner von A_1 aus die Sonne vor sich hat, ihre Abbildung demnach in die Bildfläche nach S fällt. Es gelten aber die oben gemachten Bemerkungen auch für den Fall, wenn der Zeichner die Sonne hinter sich hat (Fig. 97).

Der durch A_1 gehende Parallelstrahl schneidet die Bildfläche dann wiederum in dem Fluchtpunkte L der Lichtstrahlen, nur ist dieser Punkt wohl als die Centralprojektion des Sonnenmittelpunktes, aber nicht als wirklich vorhandene Abbildung desselben zu betrachten. Der Fluchtpunkt der Horizontalprojektionen liegt in dem Fusspunkte l des Lotes von L auf den Horizont. Bei dieser letzten Annahme liegt der Fluchtpunkt L stets unter dem Horizont. Ist in (β) L und damit auch l gegeben, so finden wir den Schatten einer zur Horizontalebene senkrechten Geraden bc wie vorhin. Wir

zeichnen den Strahl bL und dessen Horizontalprojektion cl. Der Schnittpunkt e bezeichnet den Schatten des Punktes b und ce den Schatten der Geraden bc. Auf gleiche Weise findet man den Schatten der Geraden fg in fk.

Hiernach lassen sich schon eine Reihe von Schattenkonstruktionen ausführen, da wir hier auch die Kenntnis derselben für die Parallelprojektionen als bekannt voraussetzen können.

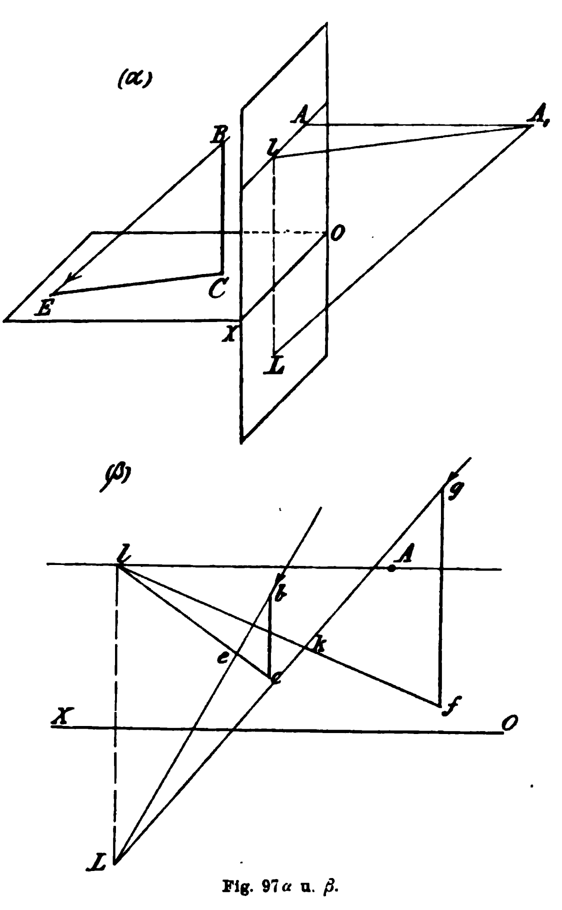


Fig. 97 α u. β.

2) Es ist die Abbildung einer auf der Horizontalebene liegenden rechtwinkligen Platte und diejenige eines darauf stehenden rechtwinkligen Parallelepipedums in Frontstellung gegeben. Man soll die hierbei vorkommenden Schatten konstruieren, wenn die Abbildung S des Sonnenmittelpunktes in die Bildfläche fällt (Fig. 98).

Durch die Senkrechte Ss zum Horizont bestimmen wir zuerst den Fluchtpunkt s der Horizontalprojektionen der Lichtstrahlen. Trifft nun die Kante bb_1 verlängert die Horizontalebene in g, so finden wir den Schatten der Kante in gk, der Projektion des durch b gehenden Strahles Sk. Die Schatten der übrigen senkrechten Kanten sind ebenso zu bestimmen, dieselben sind sämtlich nach s gerichtet. Da die Kante ce die Abbildung einer zur Horizontalebene parallelen Geraden ist, so ist ihr Schatten mn parallel zur Kante. Deshalb muss mn ebenso wie ce nach dem Hauptpunkt gerichtet sein. Durch b_1 und e_1 gehen noch die Schatten der Kanten bb_1 und ee_1, welche auf der oberen Fläche der Platte liegen. Diese Schatten sind, als Projektionen der durch b und e gehenden Strahlen auf eine horizontale Ebene, nach s gerichtet. Man findet auch leicht hieraus diejenigen Flächen, welche im Eigenschatten liegen.

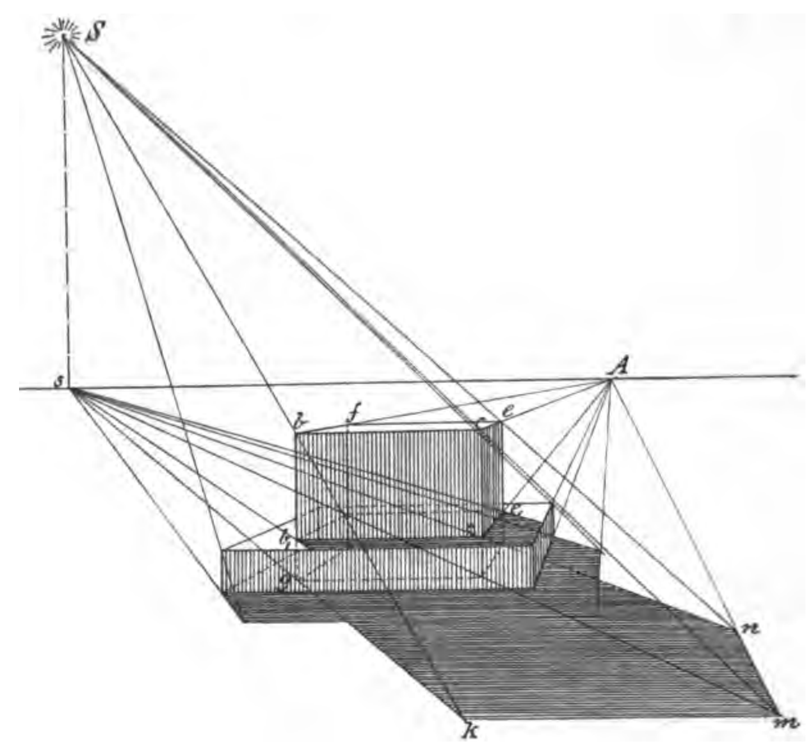


Fig. 98.

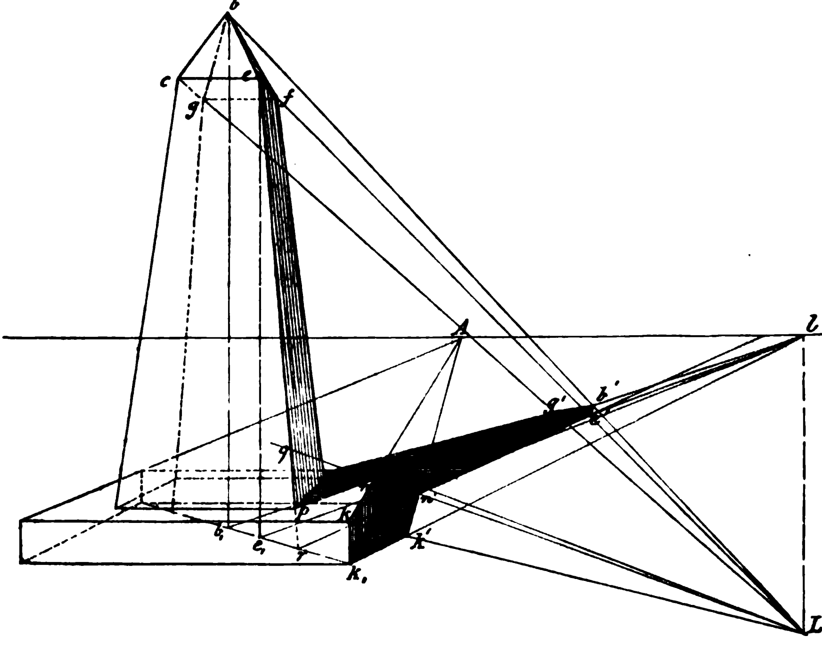


Fig. 99.

3) Die Schlagschatten und Eigenschatten bei der durch perspektivische Abbildung gegebenen Pyramide auf quadratischer Platte zu finden. Die Sonne habe der Zeichner hinter sich, so dass der Fluchtpunkt L der Strahlen unter dem Horizont liegt (Fig. 99).

Um den Schatten eines Eckpunktes der Pyramide, z. B. e, zu ermitteln, bestimmt man zunächst die Horizontalprojektion e_1 desselben. Ziehe nun den Strahl eL und zeichne seine Projektion e_1 l, dann ist der Schnittpunkt e′ dieser beiden der Schatten von e. In gleicher Weise sind die Schatten aller übrigen Ecken zu finden. Der Schatten einer der zur Horizontalebene nicht senkrechten Kanten der Pyramide, z. B. ep, wird dadurch bestimmt, dass man ep bis zum Schnittpunkt r mit der Horizontalebene verlängert. Alsdann ist e′r der Schatten dieser Kante. Man kann hier auch mit Vorteil das im II. Teil unter II, 8 angegebene Verfahren anwenden, um den Teil des Schattens der Kante ep zu finden, welcher noch auf die obere Grundfläche der Platte fällt. Man zieht durch den Schnittpunkt n′ der beiden Schattengrenzen k′n′ und n′e′ den Strahl Ln′ und verlängert denselben bis n, dann ist pn der gesuchte Schatten. Der Strahl n′L würde nämlich die beiden schattenwerfenden Kanten ep und kn in q bez. n schneiden müssen, folglich ist n auch als Schatten von q zu betrachten, woraus sich ergiebt, dass pn der Schatten von pq ist.

4) Konstruktion des auf eine vertikale Wand fallenden Schattens eines gotischen Strebepfeilers (Fig. 100).

Die Wandfläche stehe senkrecht zur Bildfläche und Horizontalebene, dann geht ihre Fluchtlinie F durch den Hauptpunkt A und letztere steht senkrecht zum Horizont (s. II, 2). s′ sei die Projektion des Punktes S auf F, dann ist s′ auch der Fluchtpunkt der Projektionen der Lichtstrahlen auf der Wandfläche. Um den Schatten des Punktes c zu bestimmen, ziehen wir den Strahl Sc, projicieren c durch die zum Horizont parallele Gerade cc_1 auf die Wandfläche nach c_1; dann ist $s'c_1$ die Projektion des Strahles Sc, welcher dieselbe in c′, dem Schatten des Punktes c, trifft. Auf gleiche Weise können die Schatten aller anderen Ecken bestimmt werden. Übrigens kann man auch, wenn c′ gefunden ist, die Kante bc verlängern, bis sie in t die Wand trifft, dann erhält man die Gerade c′t als Schatten von ct. Verlängern wir ebenso ce bis u, so ist c′u der Schatten von cu. Die Strahlen Sb und Se treffen alsdann c′t bez. c′u in b′ bez. e′, welches nun die Schatten der Punkte b und e sind, u. s. f. Die sehr einfache Konstruktion, welche in Fig. 100 vollständig angegeben ist, bedarf hiernach weiterer Erläuterungen nicht.

Die Beispiele Fig. 101 und 102 möge der Schüler hiernach zur eignen Übung benutzen.

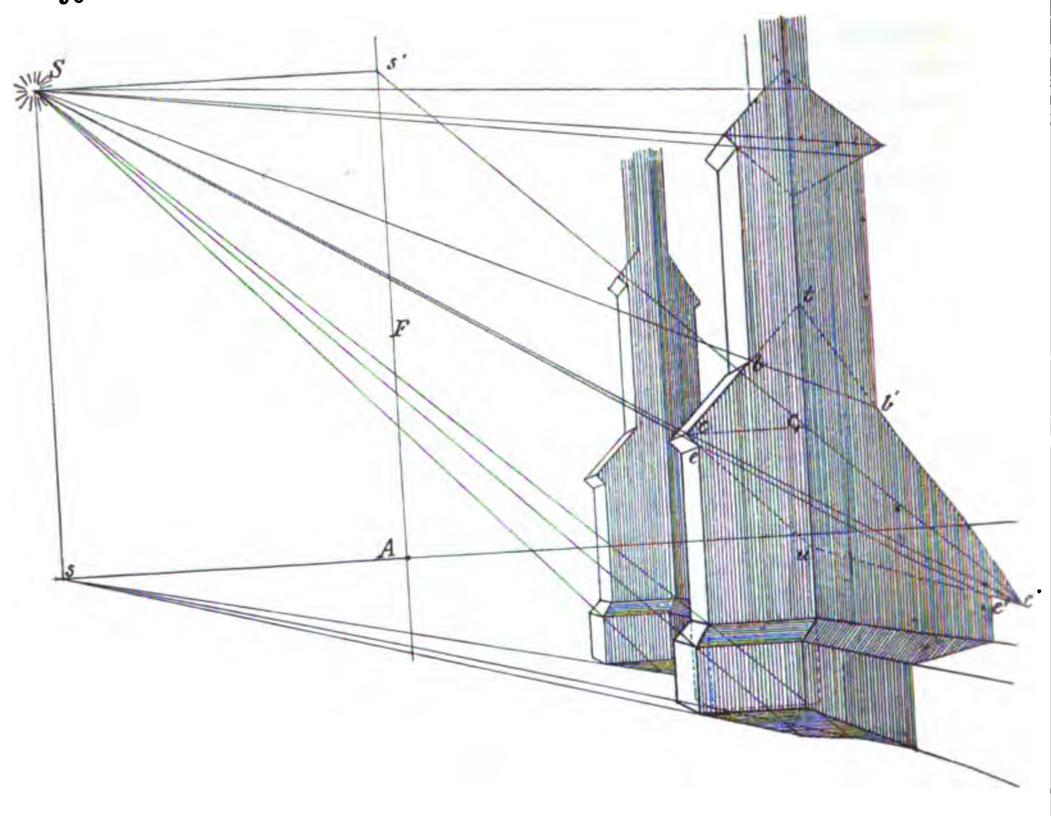


Fig. 100.

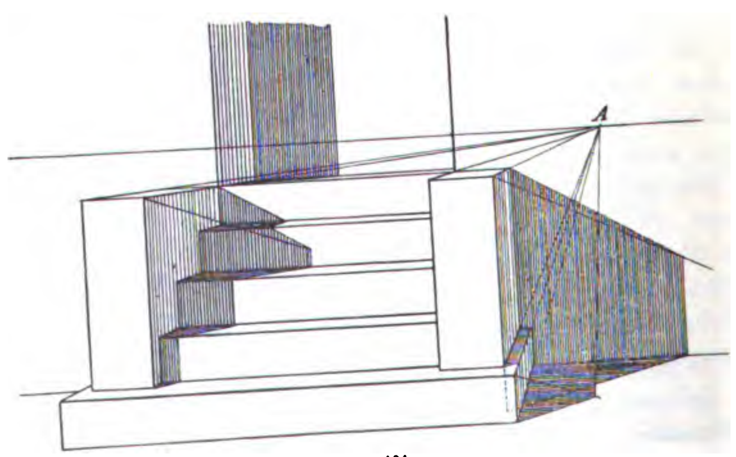


Fig. 101.

5) Die Konstruktion der Schatten von Geraden, welche auf beliebige Ebenen fallen, wollen wir an einem praktischen Beispiel erläutern. Fig. 103 stellt die perspektivische Abbildung eines Gebäudes in Übereckstellung dar, welche mit Hilfe eines tiefer liegenden Grundrisses konstruiert ist. Der letztere kann auch für die auszuführende Schattenkonstruktion mit Nutzen verwendet werden. Von Einzelheiten ist abgesehen und das Gebäude gleichsam nur schematisch dargestellt, um die grösseren Hauptumrisse des Schattens deutlich konstruieren zu können. Der Fluchtpunkt L (in unserer Ab-

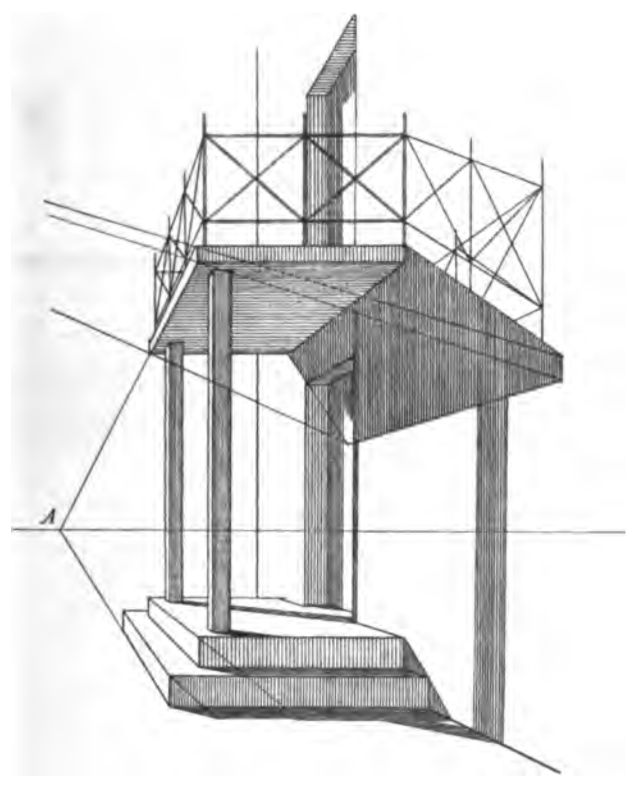


Fig. 102.

bildung nicht mehr mit angegeben) der Lichtstrahlen liege unter dem Horizont. Um den Schatten, welchen der Eckpunkt b auf die Dachfläche des andern Flügels wirft, zu finden, legen wir durch den Strahl bL eine Ebene M senkrecht zur Horizontalebene und erweitern M bis zu der tiefer liegenden horizontalen Ebene des Grundrisses. Die letztere wird dann in der Projektion BE des Strahles bL geschnitten. Nun trifft BE die Projektionen der Firstlinie CF und der Dachtraufe GH in D bez. E. Folglich schneidet die Ebene M die Dachfläche in der Linie de, deren Horizontalprojektion

DE ist. de wird aber von dem Strahle bL in b′, dem Schatten des Punktes b, getroffen. Da ferner bc die Dachfläche cfgh in c trifft, so ist nun cb′ der Schatten der Firstlinie bc.

Dies ist der allgemein zu befolgende Weg, um den Schatten zu finden, welchen ein Punkt auf eine gegebene Ebene wirft; derselbe, welcher zur Lösung der Aufgabe (III, 18 I. Teil) angegeben ist. Der Schatten des Schornsteins u. s. f. ist in gleicher Weise konstruiert.

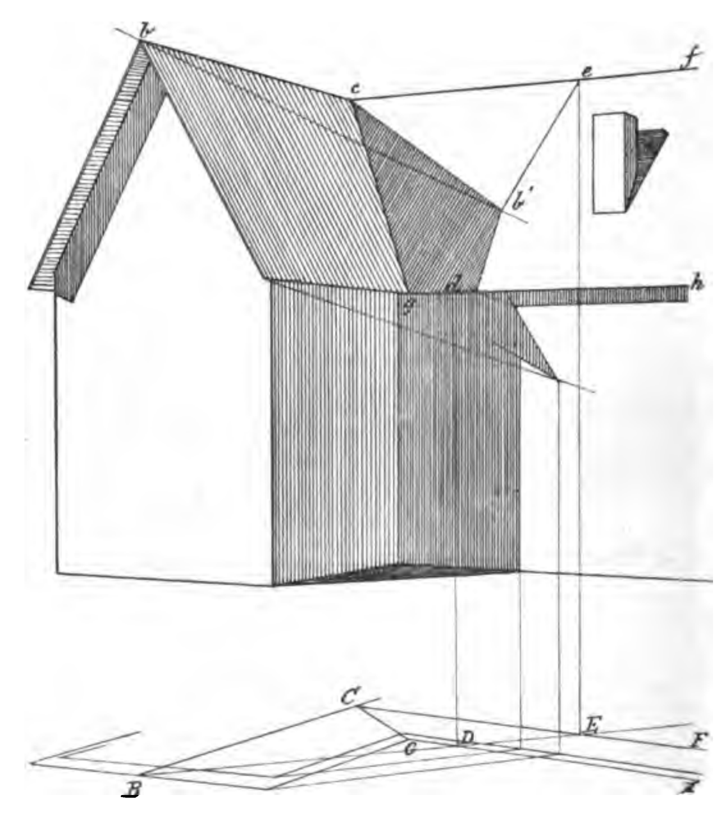


Fig. 103.

6) In Fig. 104 ist ein anderes Beispiel einer Schattenkonstruktion dargestellt. Durch einen Thorbogen, welcher in Frontstellung gezeichnet ist, blickt man in einen Hofraum. Die Schattenkonstruktion für den Hintergrund bietet keine weiteren Schwierigkeiten, dieselbe ist wie die bisherigen auszuführen. Nur auf die Bestimmung des Schattens bcd haben wir noch näher einzugehen. Der von der senkrechten Kante be herrührende Schatten bc fällt mit der Horizontalprojektion des durch e gehenden Strahles Se zusammen; derselbe ist folglich nach s gerichtet. In c erreicht der Schatten

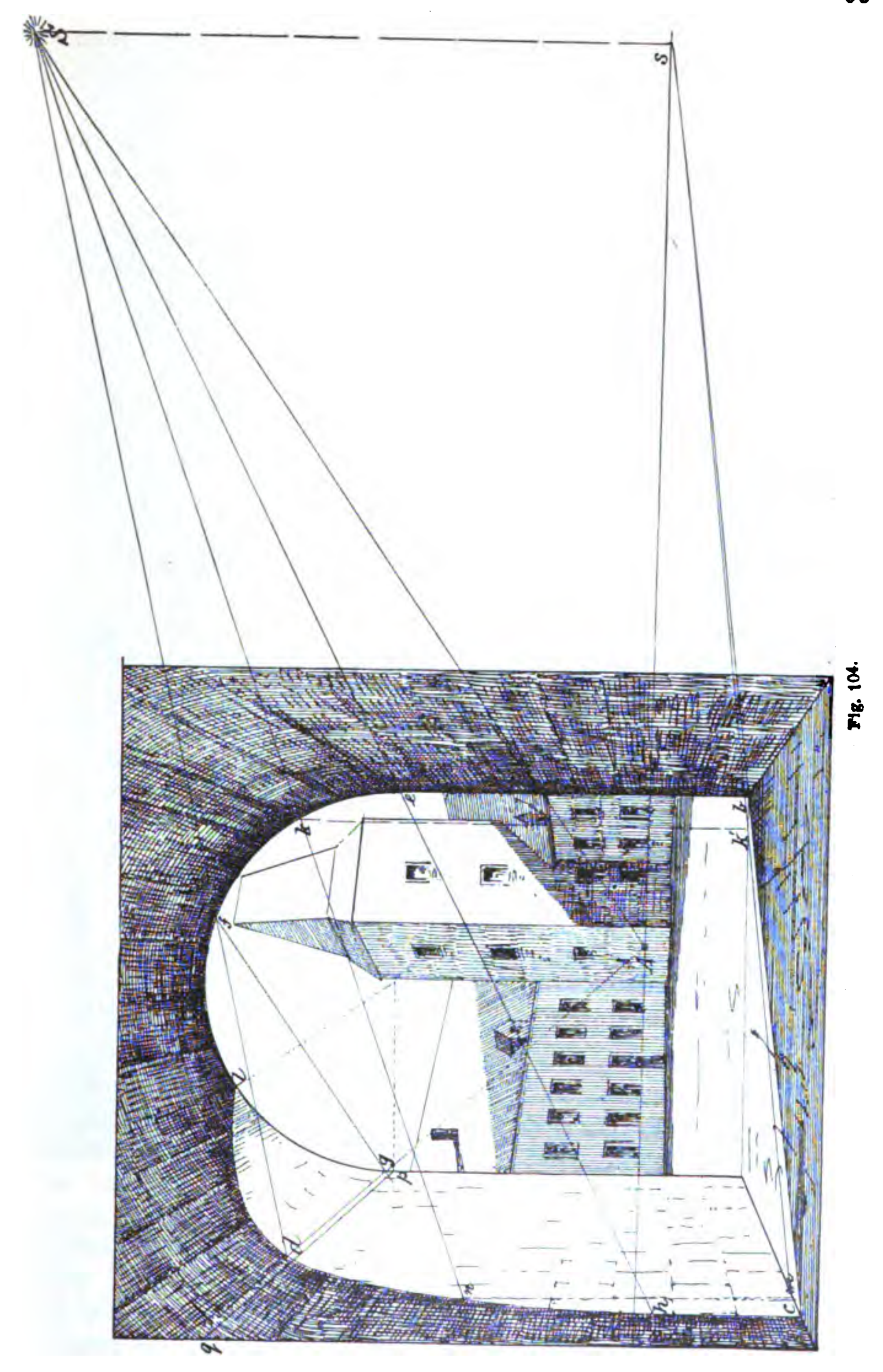


Fig. 104.

die senkrechte Wandfläche links und nimmt auf dieser die zur Horizontalebene senkrechte Richtung ch an. Der Endpunkt h des Schattens der Geraden be liegt auf dem Strahle Se. Von h ab beginnt der Schatten des Halbkreises. Durch einen beliebigen Punkt k des Kreises ziehen wir den Strahl Sk und zeichnen zugleich dessen Horizontalprojektion sk′, welche die gegenüberliegende Wand in m erreicht. Die Ebene, welche man durch den Strahl Sk und seine Projektion sk′ legen kann, schneidet die Wandfläche in der zur Horizontalebene senkrechten Geraden mn, welche wiederum von dem Strahle Sk in n getroffen wird. n ist folglich der Schatten von k. In dieser Weise sind mehrere Punkte zu bestimmen, bis der Schatten des Bogens die Seitenlinie pq erreicht, welche die ebene Wand und die Gewölbfläche trennt. Ist nun f ein anderer Punkt des Bogens, so ziehen wir wieder den Strahl Sf und legen durch diesen eine Ebene, welche parallel zu den Seitenlinien der Gewölbfläche ist. Da nun A der Fluchtpunkt der Seitenlinien, S der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen ist, so folgt, dass die Fluchtlinie dieser Ebene in AS liegt (s. II, 7). Die Durchschnittslinie fg der Hilfsebene mit der Ebene des Kreisbogens geht durch f; sie ist der Spur und folglich auch der Fluchtlinie parallel, und sie trifft den Bogen noch einmal und zwar in g, also schneidet jene Ebene die Gewölbefläche in der Seitenlinie dg. Die letztere wird wiederum von dem Strahl Sf in d getroffen, folglich ist d der Schatten von f. Hat man beliebig viele solcher Punkte konstruiert, so ergiebt sich daraus die ganze Kurve, deren Endpunkt l der Berührungspunkt der zu AS parallelen Tangente des Kreisbogens ist.

7) Auf Innenansichten von Kirchen, Sälen etc. sind die durch die Fenster einfallenden Schlaglichter, d. h. die Umrisse derjenigen Flächen zu konstruieren, welche direktes Sonnenlicht empfangen. Ein solches Beispiel ist der in Fig. 105 dargestellte Korridor in der Gewerbeschule zu Hamburg. Derselbe ist in gerader Ansicht dargestellt und ausserdem ist die Annahme gemacht, dass die Lichtstrahlen parallel zur Bildfläche einfallen. Die Abbildungen der Strahlen sind dann unter sich, und die ihrer Horizontalprojektionen zur Achse parallel. Die Konstruktion gestaltet sich demnach sehr einfach. Man hat z. B. durch die Ecken a, b, c und d der Fensteröffnung die Strahlen in der gegebenen Richtung zu ziehen und ihre Schnittpunkte mit dem Fussboden oder der gegenüberliegenden Wand zu ermitteln. Die erste Fensteröffnung ist in der Abbildung vollständig (auch die Durchsicht) angegeben, damit man erkennen kann, von welchen Punkten und Kanten die Schatten zu bestimmen sind. Wir ziehen durch a den Strahl ag; durch die Horizontalprojektion a_1 des Punktes a die Projektion a_1e parallel zur Achse. Dann liegt der Schatten von ad in a_1e. Der Strahl df trifft a_1e in f, also ist f der Schatten von d. Ferner erreicht der Schatten der Kante ad die gegenüberliegende Wand in e, und geht von diesem Punkte aus

senkrecht aufwärts bis nach g, wo derselbe von dem durch a gehenden Lichtstrahle getroffen wird. In gleicher Weise werden alle übrigen Punkte gefunden.

Eine malerische Wirkung bringen oft die in der Luft schwebenden, durch das hereinfallende Licht erleuchteten Staubteilchen hervor. Die Umrisse der so scheinbar helleren Luftschichten findet man sehr leicht. Dieselben werden, wie aus Fig. 105 hervorgeht, durch die äussersten Strahlen, welche die Ecken der Fensteröffnungen streifen, begrenzt. Die Kreuzungen der Fenstersprossen ergeben wiederum dunklere Streifen. Schlagschatten und Flächen im Eigenschatten, welche hinter solchen erleuchteten Luftschichten liegen, erscheinen wesentlich heller, als an anderen Stellen.

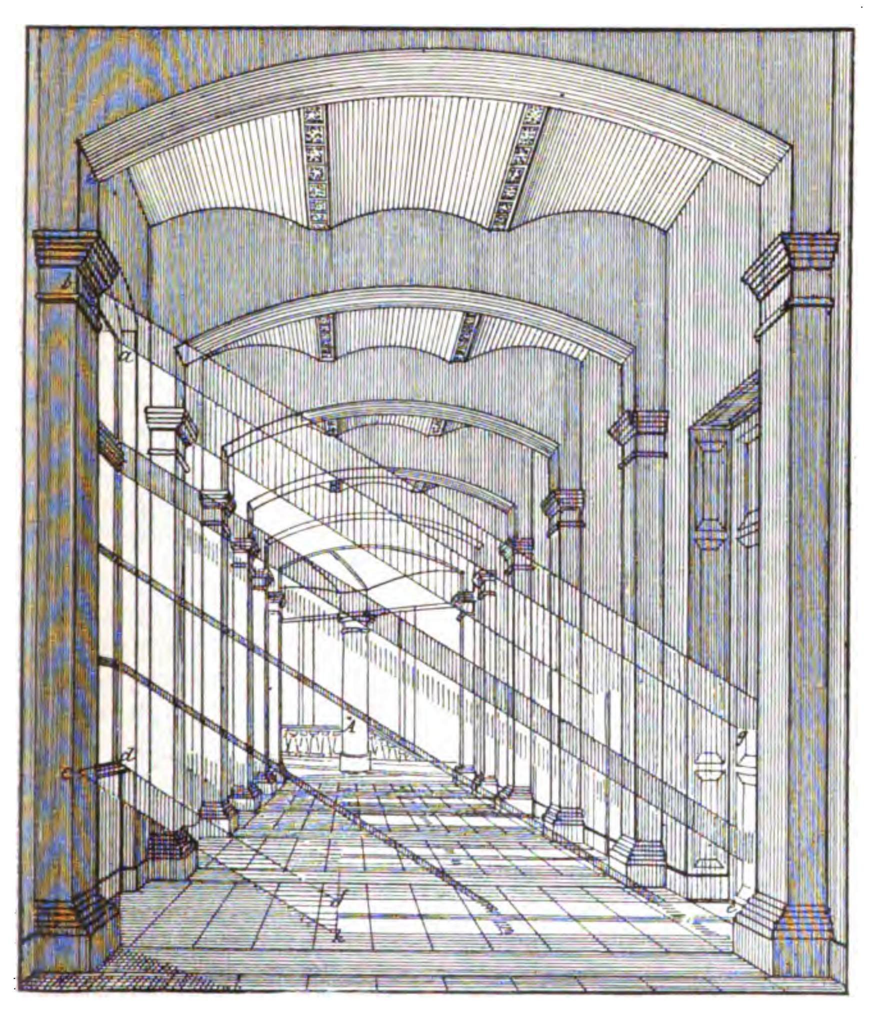


Fig. 105.

8) In Fig. 106 ist eine ähnliche Konstruktion dargestellt für den Fall, dass die Lichtstrahlen nicht parallel zur Bildfläche sind.

9) Beim Auf- oder Untergang steht die Sonne am Horizont. Nehmen wir den Mittelpunkt der Sonne, also den Fluchtpunkt der Lichtstrahlen im Horizont selbst an, so fallen die Strahlen mit ihren Projektionen zusammen. Alle Schatten, welche auf horizontale Ebenen fallen, werden alsdann unend-

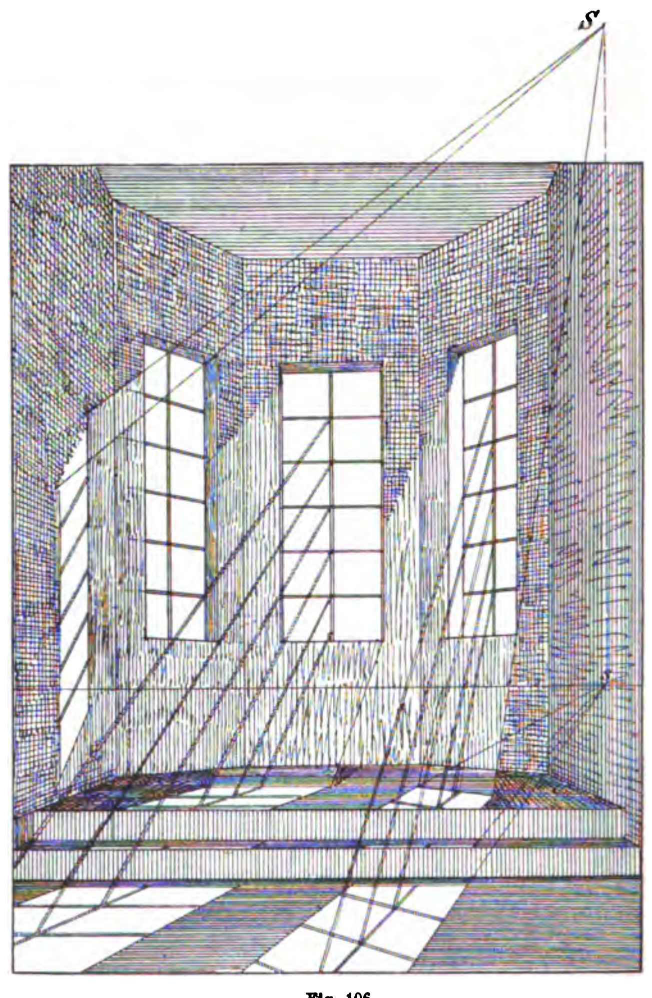


Fig. 106.

lich lang. Allerdings werden diese Ebenen selbst nur noch schwach von dem über dem Horizont hervorragenden Teile der Sonnenscheibe erleuchtet, so dass diese Schatten kaum sichtbar werden, allein fast dasselbe tritt schon ein, wenn die Sonne sich dem Horizonte ganz nahe befindet. In Fig. 107 ist ein solcher Fall dargestellt. Die Schattenkonstruktion ist äusserst ein-

fach und aus der Figur leicht zu ersehen. Bemerkenswert ist noch, dass die Grenzen des Schattens der rechts in unserer Zeichnung angegebenen Pyramide nach S gerichtet sind. Die Lichtstrahlenebenen, welche die beiden

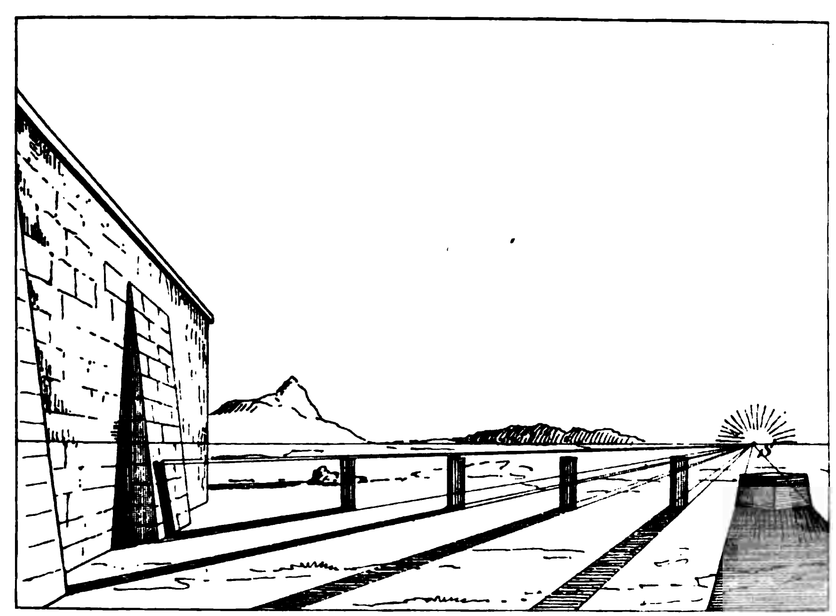


Fig. 107.

äussersten Kanten derselben streifen, schneiden die Horizontalebene in zwei Geraden, welche S zum gemeinschaftlichen Fluchtpunkte haben. Leicht sieht man hieraus, dass der Schatten irgend eines andern über derselben Grundfläche stehenden Körpers in diesem besonderen Falle ganz derselbe ist. Denn die über der Horizontalebene liegenden Punkte können keinen Einfluss mehr auf die Gestalt des Schattens haben, weil die Schatten derselben ins Unendliche fallen.

10) In Fig. 108 ist noch ein Beispiel der Schattenkonstruktion bei künstlicher Beleuchtung angegeben. L sei die Lichtquelle, l die auf der Horizontalebene liegende Projektion von L. Der Schatten eines Eckpunktes a wird gefunden, wenn man den Strahl La und seine Horizontalprojektion la_1 zeichnet. Die letztere wird von La in dem Schatten a′ des Punktes a getroffen.

Ist l′ die Projektion von L auf eine Seitenwand, so findet man den Schatten eines Punktes b auf dieser ebenfalls als Schnittpunkt des Strahles Lb und seiner Projektion $l'b_1$. Überhaupt sind die sämtlichen Konstruktionen in diesem Falle so einfach, dass man dieselben leicht aus Fig. 108 erkennen kann.

11) Abweichungen in den Umrissen der Schlagschatten mit Berücksichtigung des scheinbaren Durchmessers der Sonnenscheibe (Fig. 109).

Der scheinbare Durchmesser der Sonne, d. h. der Winkel, unter welchem derselbe dem Auge erscheint, ist ca. 31 Minuten 16 Sekunden. Be-

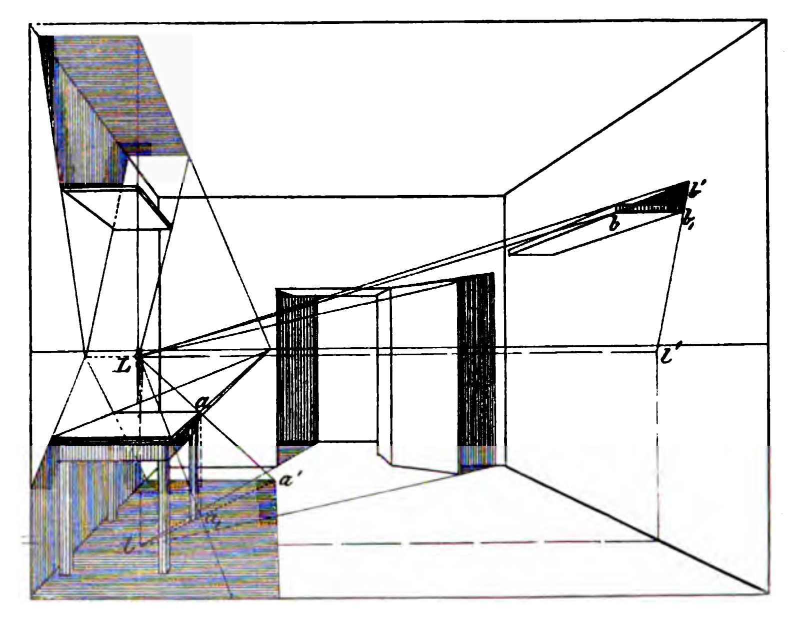


Fig. 108.

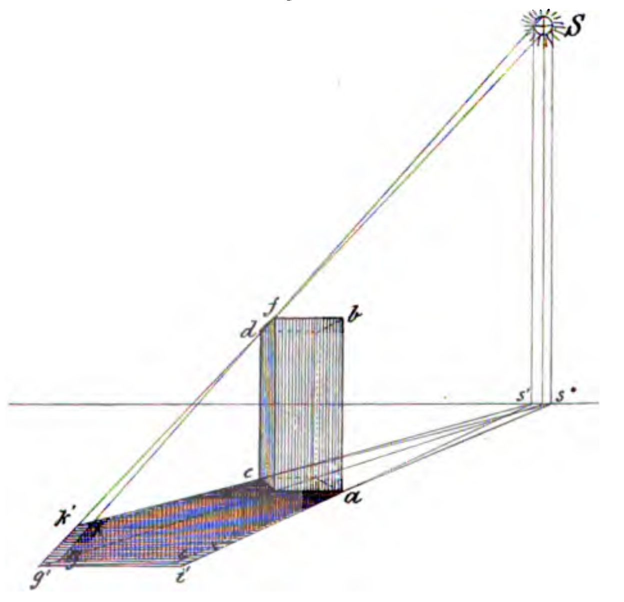


Fig. 109.

trägt die Entfernung des Auges von der Bildfläche 1 m, so würde hiernach die Sonnenscheibe durch einen Kreis von 9 mm Durchmesser dargestellt

werden müssen. Für andere Entfernungen des Augenpunktes von der Bildfläche ist dieser Durchmesser proportioniert dem Abstande zu nehmen, z. B. für 2 m Entfernung würde die Sonnenscheibe als Kreis von 18 mm Durchmesser zu zeichnen sein u. s. f. Streng genommen, gilt dies nur, wenn die Abbildung des Sonnenmittelpunktes in den Hauptpunkt fällt, es wird jedoch bei anderen Lagen die Sonnenscheibe ohne merklichen Fehler ebenfalls kreisförmig gezeichnet werden können. In den weitaus meisten Fällen wird man Abbildungen der Sonue nur für einen niedrigen Stand derselben auf Gemälden antreffen, für welche die vorhin gemachte Bemerkung noch zutreffender ist.

Es sei nun der Schatten eines auf der Horizontalebene stehenden rechtwinkligen Parallelepipedums zu konstruieren. S sei die Abbildung der Sonnenscheibe, welche etwas zu gross angenommen ist, um die nötigen Hilfslinien deutlich hervortreten zu lassen. Wir projicieren den horizontalen Durchmesser auf den Horizont und ziehen durch die Endpunkte der Projektion $s's''$ die Geraden $s'a$, $s'c$ und $s''a$, $s''c$. Die letzteren sind die Projektionen der äussersten Strahlen, welche vom Sonnenrand ausgehend, die senkrechten Kanten ab und cd streifen. Alle Strahlen, welche durch den höchsten Punkt des Sonnenrandes gehen und bf treffen, schneiden die Horizontalebene in der Geraden gi, welche parallel zu bf ist; von den die Kante df streifenden Strahlen rührt die Schattengrenze gk her, so dass nun aigkc derjenige Teil der Horizontalebene ist, welcher von keinem Strahl getroffen werden kann. Man nennt diesen den Kernschatten des Parallelepipedums. Ferner schneiden die Strahlen, welche vom untersten Punkte des Sonnenrandes ausgehend die Kanten bf und df streifen, in $i'g'$ und $g'k'$ die Horizontalebene. Der Raum zwischen dem Kernschatten und dem Linienzug $ai'g'k'c$ wird noch von einem Teile der Sonnenstrahlen getroffen und ist deshalb etwas dunkler als der ausserhalb desselben in voller Beleuchtung liegende Teil der Horizontalebene. Nach dem äusseren Rande zu wird dieser sog. Halbschatten heller, weil in grösserer Nähe desselben mehr Strahlen auffallen, als nahe bei der Grenze des Kernschattens.

Man sieht leicht, dass in der Nähe der Punkte a und c der Halbschatten sehr schmal wird und erst in grösserer Entfernung eine merkliche Breite erreicht. Ferner nimmt die Helligkeit des Halbschattens nach den Aussenrändern sehr rasch zu, so dass die äussere Grenze des letzteren überhaupt nicht mehr wahrnehmbar ist. Ebensowenig wird man aus einiger Entfernung noch Spuren des Halbschattens bemerken. Der Schlagschatten zeigt alsdann die scharfen Umrisse des Kernschattens, und wir können in allen solchen Fällen die frühere Konstruktion gelten lassen. Nur bei Abbildungen in grossem Maſsstabe und hier auch nur bei den ganz im Vordergrunde liegenden Partieen dürfte zuweilen Rücksicht auf den Halbschatten ge-

nommen werden, für welchen dann die oben angegebene Konstruktion völlig genügt.

Spiegelbilder.

12) Durch Reflexion (Zurückwerfung) der Lichtstrahlen, welche auf Wasserflächen oder andere spiegelnde Flächen fallen, entstehen sogenannte Spiegelbilder. Dieselben treten häufig in perspektivischen Darstellungen auf und müssen deshalb auch hier berücksichtigt werden.

Die Konstruktion der Spiegelbilder ist sehr einfach. Besonders gilt dies von denjenigen, welche von der Oberfläche des Wassers herrühren, weil in diesem Falle die spiegelnde Fläche stets horizontal ist. Da nun die letzteren am häufigsten Gegenstand der perspektivischen Darstellung sind, so wollen wir die Konstruktion an einem grösseren Beispiel ausführlicher betrachten. Zuvor bemerken wir folgendes:

Ist a (Fig. 110) ein beliebiger Punkt, die Horizontalebene eine spiegelnde Fläche, A_1 der Augenpunkt, ac der auffallende und cA_1 der nach A_1 zurückgeworfene Strahl, so liegen ac und cA_1 bekanntlich in einer Ebene, welche senkrecht zur Horizontalebene steht. Ferner bilden dieselben gleiche Winkel mit der Horizontalspur bc dieser Ebene. Es ist also $\angle acb = \angle A_1cd$. Verlängern wir nun das von a auf die Horizontalebene gefällte Lot, bis dasselbe von A_1c in a_1 getroffen wird, so ist

$$\triangle abc \cong \triangle a_1bc,$$

$(bc = bc, \angle abc = \angle a_1bc = R, \angle acb = \angle A_1cd = \angle a_1cb)$. Folglich ist auch $a_1b = ab$. Der Strahl cA_1 hat deshalb eine solche Richtung, als käme er von dem Punkte a_1, welcher mit a auf derselben Senkrechten zur Horizontalebene, und ebenso tief unter dem Wasserspiegel liegt, als jener darüber. Der Durchschnitt a_2' des Strahles a_1A_1 mit der Bildfläche ist

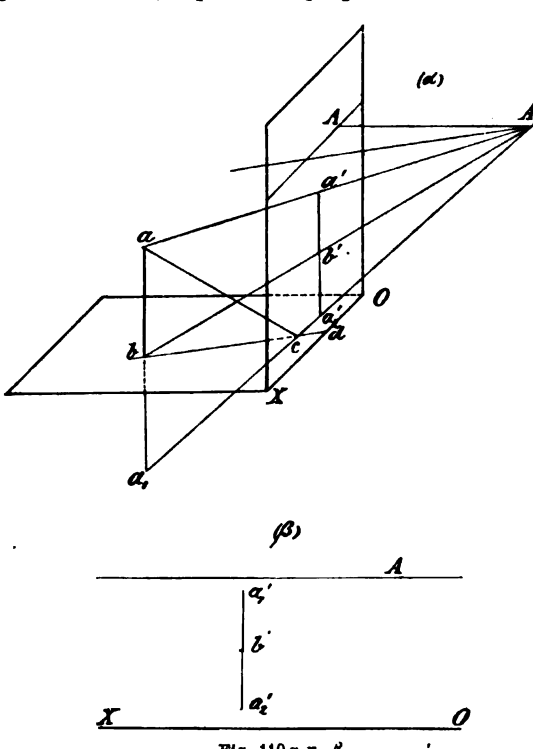


Fig. 110α u. β.

nun die Abbildung des Spiegelbildes von a. Die Abbildung der Geraden aa_1, nämlich $a'a_2'$ steht nach (Einleitung 4, α) senkrecht zur Achse und die Abbildungen der beiden Strecken ab und a_1b, also $a'b'$ und $a_2'b'$ sind ebenfalls unter sich gleich.

Ist also a_1' (Fig. 110β) die Abbildung eines beliebigen Punktes a, so erhält man die Abbildung des von der Horizontalebene als spiegelnde Fläche hervorgerufenen Spiegelbildes, indem man das von a auf die Horizontalebene gefällte Lot ab abbildet und diese Abbildung $a_1'b'$ um sich selbst nach unten verlängert. Der Endpunkt a_2' ist die Abbildung des Spiegelbildes von a.

Hiernach können wir in einfachster Weise das Spiegelbild des in Fig. 111 dargestellten Brückenbogens und Umgebung konstruieren. Von einem be-

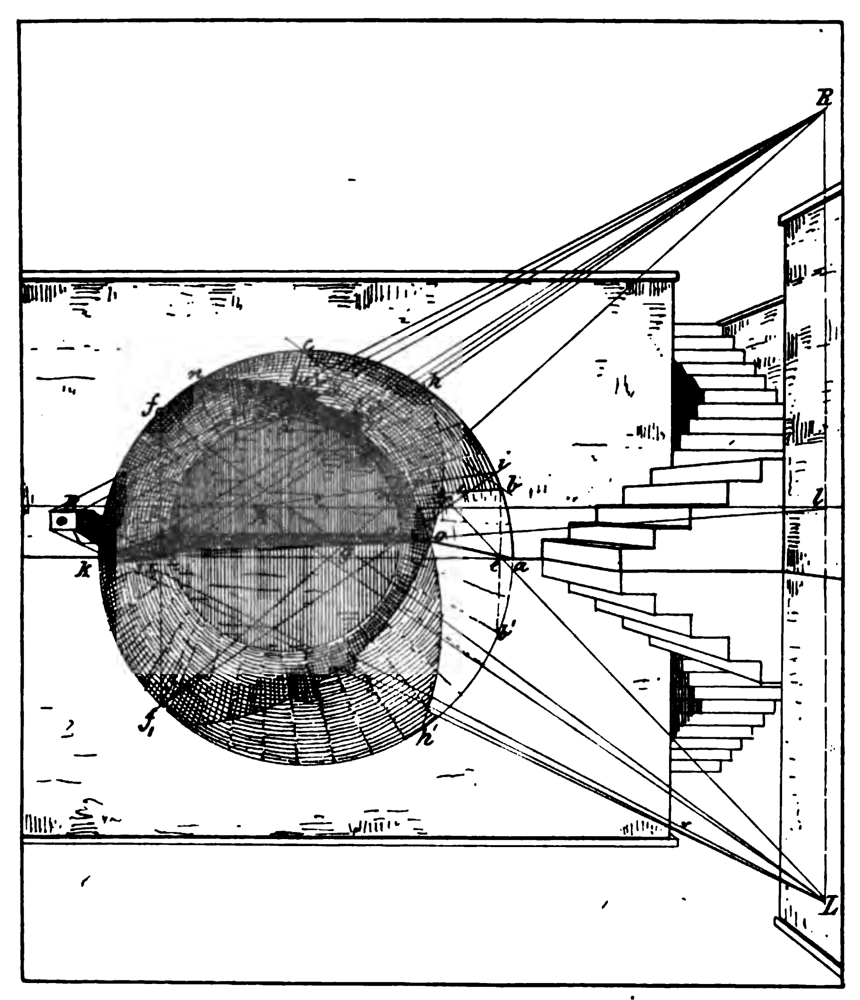


Fig. 111.

liebigen Punkte b des vorderen Kreises fällen wir ein Lot auf die Oberfläche des Wassers. Der Fusspunkt e liegt auf ak. Tragen wir auf der Verlängerung von be die Strecke eb' = be ab, so ist b' die Abbildung des Spiegelbildes von b. Es ergiebt sich leicht hieraus, dass bei der in Fig. 111 gewählten Frontansicht das Spiegelbild der vorderen Begrenzung der Brückenöffnung, sowie das der ganzen Frontfläche eine der letzteren kongruente Figur, und symmetrisch in Bezug auf die Gerade ak sein muss. Ebenso erscheinen die hintere Begrenzung der Brückenöffnung und ihr Spiegelbild symmetrisch in Bezug auf die Linie pq. Leicht sind die hiernach auch Spiegelbilder der Treppen und Geländer u. s. w. zu bestimmen.

Es ist jetzt noch die Konstruktion der Schatten und deren Spiegelbilder zu erörtern. L sei der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen und l derjenige ihrer Horizontalprojektionen. Dann ziehen wir durch irgend einen Punkt f des vorderen Kreises den Strahl fL und zeichnen dessen Projektion f_2l auf der Wasserfläche. Die letztere wird von fL in dem Schatten g des Punktes f geschnitten. Auf diese Weise können wir beliebig viele Punkte des Schattens ko bestimmen. Die Fortsetzung des Schattens geht nun auf die Gewölbfläche über. Dieser wird ähnlich wie in (6) bestimmt. Soll z. B. der Schatten des Punktes c gefunden werden, so legen wir durch die Seitenlinie cd und den Strahl cL eine Ebene, deren Fluchtlinie mithin AL ist. Diese Ebene schneidet die mit der Bildfläche parallele Frontebene in einer durch c gehenden Geraden bc, welche der Fluchtlinie AL parallel ist. Da die angenommene Hilfsebene durch cd geht, so schneidet sie die Gewölbfläche in einer zweiten Seitenlinie bm, welche von dem Strahl cL in c' getroffen wird. c' ist dann der Schatten von c. Durch Parallelverschiebung der Hilfsebene können wir beliebig viele Punkte des auf die Gewölbfläche fallenden Schattens bestimmen. Der Punkt h, in welchem der Schatten den vorderen Kreis erreicht, ist der Berührungspunkt der zu AL parallelen Tangente des Kreises. Übertragen wir noch die Punkte, in welchen die Kurve oh die einzelnen Fugen schneidet durch Senkrechten zur Wasserfläche auf die Spiegelbilder der letzteren, so erhalten wir leicht das Spiegelbild oh' von oh.

Diejenigen Strahlen, welche die Wasserfläche vor der Kurve ko treffen, werden zurückgeworfen und erleuchten dadurch einen Teil der im Schatten befindlichen Gewölbfläche. Die hintere Grenze dieses erleuchteten Raumes rührt von denjenigen Strahlen her, welche die Wasserfläche längs der Kurve ko treffen. Wir haben also die Durchschnitte der an der Kurve ko zurückgeworfenen Strahlen mit der Gewölbfläche zu bestimmen.

Es sei ab (Fig. 112) ein auf die Horizontalebene fallender und nach bc zurückgeworfener Strahl, dann liegen die Horizontalprojektionen beider in einer Geraden de, und es ist $\angle$ abd = $\angle$ cbe. Ziehen wir vom Augen-

punkt A_1 aus die Geraden A_1L und A_1R parallel zu ab bez. bc, so treffen diese die Bildfläche in den Fluchtpunkten L und R der direkten und der zurückgeworfenen Strahlen. Da die durch LA_1 und RA_1 gelegte Ebene senkrecht zur Horizontalebene steht, so ist auch ihre Schnittlinie RL mit der Bildfläche senkrecht zum Horizont. Ziehen wir noch A_1l parallel zu der Projektion de, so ist $\angle RA_1l = \angle cbe$, $\angle LA_1l = \angle abd$, folglich auch $\angle RA_1l = \angle LA_1l$, woraus man leicht findet, dass auch $Rl = Ll$ ist. Der Fluchtpunkt der von der Horizontalebene zurückgeworfenen Strahlen liegt hiernach ebenso hoch über dem Horizont, wie der Fluchtpunkt der auffallenden Strahlen unter demselben.

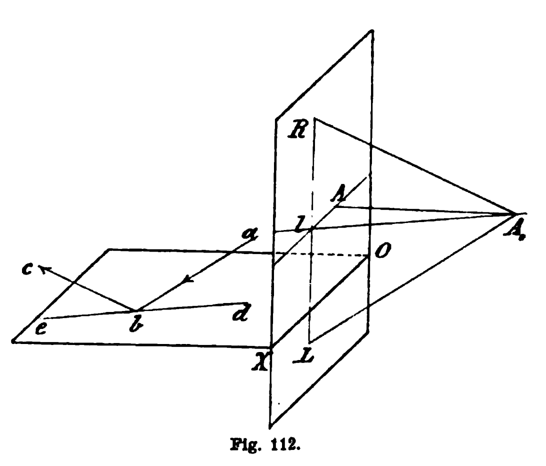


Fig. 112.

In Fig. 111 sei nun R der Fluchtpunkt der von der Wasserfläche zurückgeworfenen Strahlen; $Rl = Ll$. Trifft demnach der Strahl fg die Wasserfläche in g, so ist gR der zurückgeworfene Strahl, dessen Durchschnitt mit der Gewölbfläche bestimmt werden muss. Weil aber die Lage des Strahls gR derart ist, als käme derselbe von dem Spiegelbilde f_1 des Punktes f, so können wir annehmen, dieser Punkt f_1 oder auch das ganze in der Spiegelung erscheinende Gewölbe sei wirklich unter dem Wasser vorhanden und der Strahl gR komme von f_1. Legen wir jetzt durch f_1R und die Seitenlinie f_1A eine Ebene, so ist deren Fluchtlinie AR. Diese Ebene schneidet die Frontfläche in der zu AR parallelen Geraden if_1 und die Gewölbfläche ausser in f_1A noch in der Seitenlinie iA. Die letztere wird von dem Strahl f_1R in p′ getroffen, welcher Punkt nun der gesuchten Kurve on angehört. Diese Konstruktion setzt man fort bis zu dem Endpunkt n, welcher der Berührungspunkt der zu AR parallelen Tangente des Kreises ist. Auch von dieser Kurve ist das Spiegelbild zu zeichnen.

Es ist noch zu bemerken, dass der obere Teil der Kurve on von dem Punkte an, in welchem der bei k zurückgeworfene Strahl die Gewölbfläche trifft, von denjenigen Strahlen herrühren, welche zuerst die Wasserfläche treffen und nach der Zurückwerfung den Rand des Gewölbes zwischen k und n streifen. Wir können deshalb von k ab die zurückgeworfenen Strahlen unmittelbar durch die Punkte des Randes kn nach R ziehen und ihre Durchschnitte mit der Gewölbfläche wie oben bestimmen.

Links vom Gewölbe ragt aus der Frontfläche ein Stein B hervor, wel-

cher die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums hat. Der leicht zu konstruierende Schatten desselben, welcher auf die Wasserfläche fällt, sei xyz. Innerhalb dieses Schlagschattens werden keine direkten Lichtstrahlen zurückgeworfen, weshalb sich das Fehlen dieser Strahlen durch den Schatten $x'y'z'$ auf der Gewölbfläche bemerkbar macht. Es entsteht aber noch ein zweiter, ebenfalls von B herrührender Schatten uvw auf der Gewölbfläche; es werden nämlich diejenigen Strahlen, welche nach der Zurückwerfung auf B treffen, verhindert, die Gewölbfläche zu erleuchten. Alle Strahlen, welche zur Konstruktion dieser beiden Schatten erforderlich sind, gehen nach R. Ihre Durchschnitte mit der Gewölbfläche werden ähnlich wie oben bestimmt.

Diese und ähnliche Erscheinungen kann man bei stillstehendem Wasser sehr schön wahrnehmen, doch werden sie dem nicht sehr aufmerksamen Beobachter in der Regel entgehen. Es ist deshalb für den Zeichner nützlich, einen solchen Fall gründlich zu studieren; er wird dadurch zu grösserer Aufmerksamkeit beim Beobachten derartiger Erscheinungen angeregt, die er auch viel leichter wahrnimmt, wenn ihm die Ursachen derselben bekannt sind.

VI. Abschnitt.

Vogelperspektive. Panoramen. Stereoskopische Bilder.

1) Mit dem Namen „Vogelperspektive“ bezeichnet man Abbildungen grösserer Länderstrecken, ganzer Städte u. s. w., wenn der Augenpunkt in bedeutender Höhe über dem abzubildenden Terrain angenommen wird. Für die Herstellung solcher Abbildungen gelten selbstverständlich alle bisher entwickelten Gesetze, aber eine wirkliche Ausführung der Konstruktion, z. B. eines Städtebildes aus der Vogelschau, würde so weitläufig sein, dass sie praktisch nicht mehr ausführbar wäre. In solchen Fällen bedienen wir uns mit Vorteil eines Näherungsverfahrens, welches wir an folgendem Beispiel erläutern wollen.

In Fig. 113 ist der Grundriss des hamburgischen Stadtteiles St. Georg angegeben. Wir denken uns denselben in der Horizontalebene liegend und konstruieren nun seine perspektivische Abbildung. Hierzu dient ein Quadratnetz, welches in den Grundriss eingezeichnet wird. Die Abbildung dieses Netzes wird nach I, 9 bestimmt (s. Fig. 114). Mit Hilfe des letzteren kann man nun den gegebenen Grundriss nach dem Augenmafs mit hinlänglicher Genauigkeit perspektivisch abzeichnen und hierauf die einzelnen Ge-

bäude u. s. w., welche in solchen Ansichten stets klein erscheinen, nach aufgenommenen Skizzen ebenfalls nach dem Augenmafs eintragen. Selbstverständlich ist besondere Sorgfalt auf die im Vordergrund liegenden, deshalb grösser erscheinenden Gegenstände, sowie auf dem Beschauer zugewendeten Hausfronten und auf hervorragende Baulichkeiten zu verwenden. Die senkrechten Höhen der Gebäude, Türme u. s. w. mag man stets etwas grösser nehmen, damit die Ansicht weniger gedrückt erscheint. Geringe Erhebungen

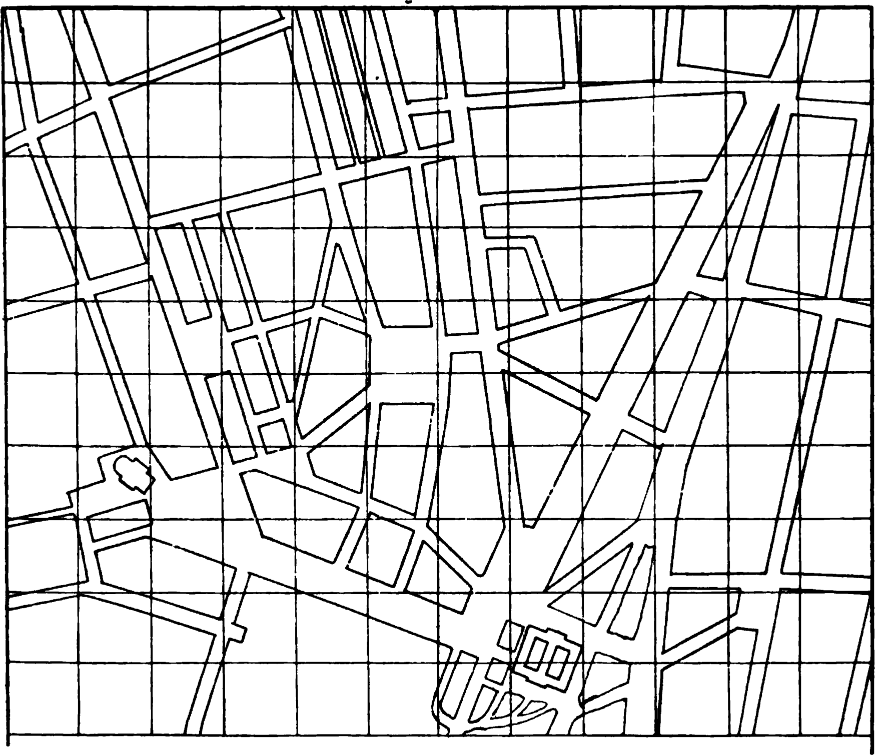


Fig. 113.

des Terrains werden aus grösseren Höhen kaum wahrgenommen, weshalb man bei den Städtebildern diese meistens vernachlässigen kann.

In Fig. 114 sind einige kleine Partien angedeutet, z. B. die im Vordergrunde liegende Gewerbeschule und die zunächst sich anschliessenden Strasseneingänge.

Für den geübteren Zeichner, welcher bereits mit den perspektivischen Gesetzen vertraut ist, werden diese Andeutungen genügen.

Noch mag bemerkt werden, dass ein auf der Horizontalebene liegendes Quadratnetz häufig mit Vorteil zur Herstellung perspektivischer Abbildungen benutzt werden kann, namentlich wenn viele Gegenstände, welche zerstreut

auf der Horizontalebene liegen, abgebildet werden sollen. Der Gebrauch eines solchen Netzes ist nach den oben gegebenen Andeutungen ohne weiteres klar.

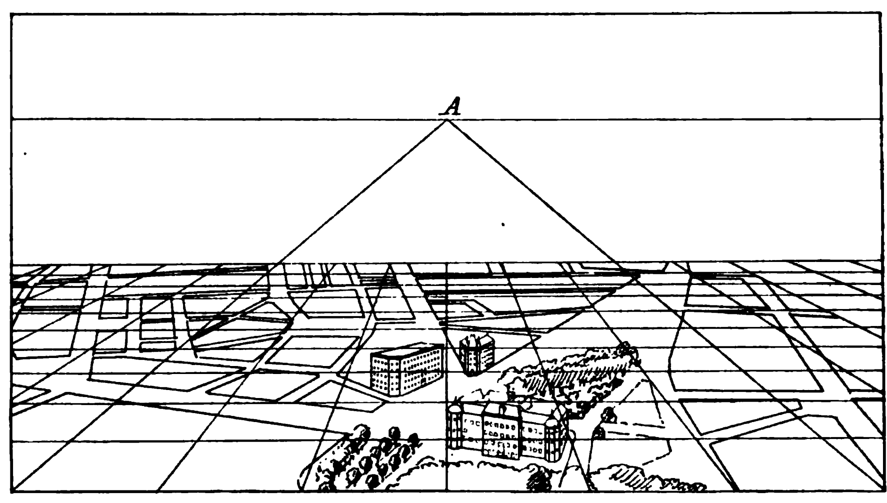


Fig. 114.

Die Panoramen.

2) Die in den letzten Jahren in vielen grossen Städten aufgestellten Panoramen sind Abbildungen auf einer Cylinderfläche, wenn der Augenpunkt in der Achse derselben angenommen wird. Auch bei diesen müssen ein Punkt und dessen Abbildung wie früher auf demselben Sehstrahle liegen, und es ist deshalb leicht, sich die Entstehungsweise einer derartigen Abbildung zu vergegenwärtigen.

Der Kreis K (Fig. 115) stelle die Horizontalprojektion der Bildfläche dar; A_1 und A_2 seien Horizontal- und Vertikalprojektion des Augenpunktes und G_1, G_2 Grundriss und Aufriss eines Gebäudes, welches auf der Cylinderfläche abzubilden ist. Seitenlinien und Achse der Bildfläche stehen senkrecht zur Horizontalebene. Die Abbildung einer Geraden, welche der Achse des Cylinders parallel ist, fällt in eine Seitenlinie. Es genügt hier, wenn wir die Abbildung irgend einer Geraden, z. B. ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) etwas näher betrachten.

Wir ziehen von den Endpunkten dieser Geraden die Strahlen ($a_1 A_1$, $a_2 A_2$) und ($b_1 A_1$, $b_2 A_2$) nach dem Augenpunkte und bestimmen die Schnittpunkte (a_1', a_2') und (b_1', b_2') mit der Cylinderfläche. Diese sind die Abbildungen jener Endpunkte. Auf gleiche Weise werden die Abbildungen anderer Punkte der Geraden gefunden. Um nun auf der ebenen Zeichenfläche das Bild konstruieren zu können, zeichnen wir die Abwickelung der Cylinderfläche, s. (α), in welcher A'B' gleich der wahren Länge des Bogens

$a_1'b_1'$ zu machen ist. In A′ und B′ errichten wir Senkrechten zu A′B′ und tragen auf diesen die Höhen der Punkte a_2' und b_2' über der Achse OX

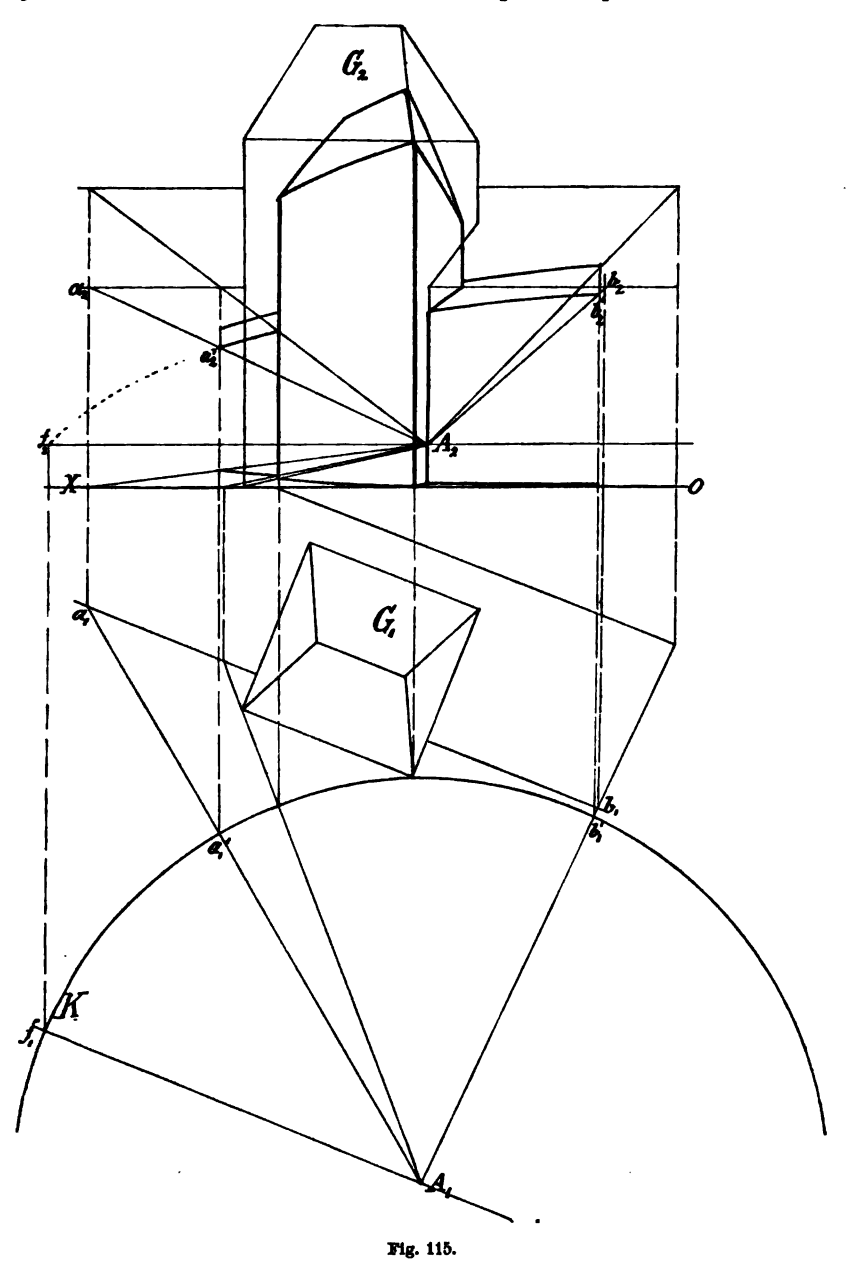


Fig. 115.

ab, wodurch sich die Abbildungen jener Endpunkte in a_2'' und b_2'' ergeben. Ebenso bestimmen wir die Abbildungen aller anderen Punkte. Wird nun

die Figur α wieder nach der Form des Cylindermantels gebogen und aus dem Punkte (A_1, A_2) der Achse desselben betrachtet, so wird sie den richtigen Eindruck auf den Beschauer machen.

Man sieht hieraus leicht, dass die Abbildung einer beliebigen Geraden, als Schnitt der Sehstrahlenebene mit der Cylinderfläche, eine Ellipse sein muss. Da bei einem Panorama als Rundgemälde der Kopf beliebig gedreht werden darf, so können wir auch durch den Augenpunkt einen Strahl ziehen, welcher parallel zu der Geraden $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ ist. Dieser Strahl trifft die Cylinderfläche in den beiden Punkten f_1 und f_2, welche wir als die Abbildungen zweier unendlich fernen Punkte der Geraden aufzufassen haben. (Im Grundriss der Fig. 115 ist nur f_1 angegeben.) Es ist nun ohne weiteres einleuchtend, dass die Abbildungen der unendlich fernen Punkte aller zu $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ parallelen Geraden wieder mit f_1 und f_2 zusammenfallen. Bei den Abbildungen auf einer Cylinderfläche hat also jede Gerade gleichsam zwei Fluchtpunkte und die Abbildung der unendlich langen Geraden ist eine halbe Ellipse. In der Abwickelung des Cylindermantels liegen demnach diese beiden Fluchtpunkte um den halben Umfang des Grundkreises voneinander entfernt.

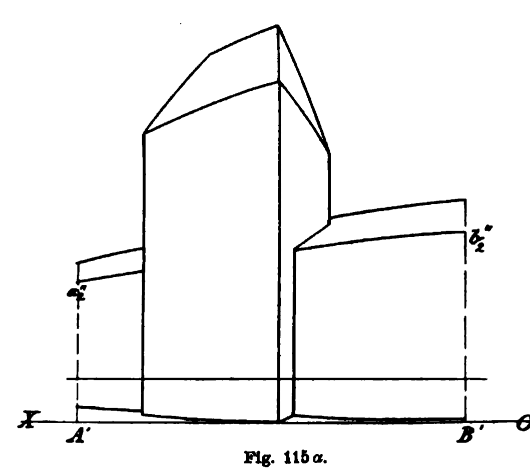


Fig. 115 α.

Die Abwickelungen der Kurven sind jedoch keine Ellipsen (s. 38, IV, I. Teil).

Es ist nicht nötig, auf weitere Einzelheiten einzugehen, da die Ermittelung der Abbildung gegebener Punkte, wie oben gezeigt, äusserst einfach ist.

Die Konstruktion wird man bei Panoramen vorzugsweise anzuwenden haben, wenn es sich um die Darstellung grosser Baulichkeiten handelt, an welchen gerade Linien von bedeutender Ausdehnung vorkommen.

3. Anwendung der Perspektive auf die Herstellung stereoskopischer Abbildungen.

Die bisher konstruierten perspektivischen Abbildungen gelten stets für das Betrachten des Gegenstandes und des Bildes mit einem Auge. Weil nun aber der Eindruck, welchen ein Gegenstand macht, für beide Augen verschieden ist, so kann durch ein einziges Bild die Täuschung nicht so weit gehen, dass der Beschauer den abgebildeten Gegenstand gleichsam körperlich greifbar vor sich zu haben glaubt. Wenn man jedoch für jedes

Auge eine entsprechende Abbildung des Gegenstandes herstellt, so kann durch das gleichzeitige Betrachten dieser Abbildungen eine derartige Täuschung in der That erreicht werden.

Es ist leicht, sich von dem Vorgange, welcher hierbei stattfindet, Rechenschaft zu geben. Sind z. B. P_1 und P_2 (Fig. 116) Grundriss und Aufriss eines rechtwinkligen Parallelepipedums, A_1 und A_2 die Horizontalprojektionen der beiden Augenpunkte und A_2'' die gemeinschaftliche Vertikalprojektion

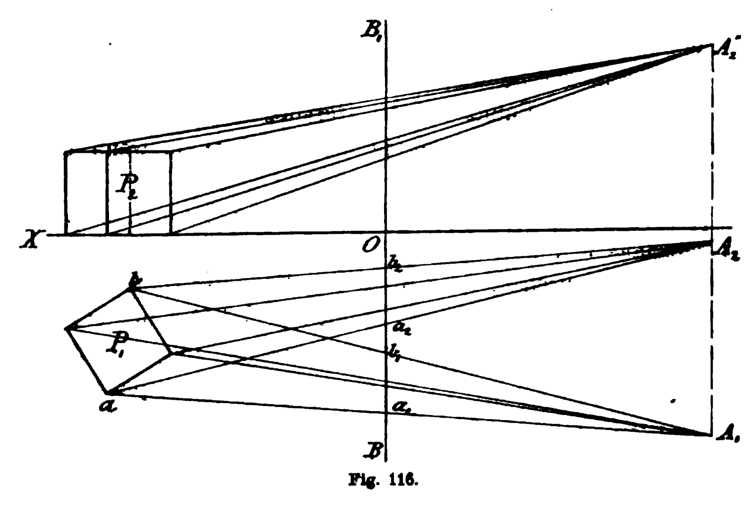


Fig. 116.

der letzteren, so können wir die beiden Abbildungen, welche auf der zu beiden Projektionsebenen senkrechten Bildfläche BB_1 entstehen, wie in Einleitung 1 konstruieren. Diese beiden Abbildungen sind in Fig. 116 α dargestellt und man wird einen vollkommen plastischen Eindruck erhalten, wenn man beide zugleich, die eine mit dem linken, die andere mit dem rechten Auge betrachtet, wozu allerdings einige Übung erforderlich ist. Erheblich erleichtert wird dies gleichzeitige Sehen zweier verschiedener Abbildungen durch das allgemein bekannte Stereoskop.

Fig. 116 α.

Der Gesamteindruck beim gleichzeitigen Betrachten der beiden Abbildungen a_1 und a_2 desselben Punktes a besteht darin, dass der Beschauende nur einen einzigen Punkt zu sehen glaubt, welchen er unwillkürlich nach dem Schnittpunkte a der beiden Strahlen a_1A_1 und a_2A_2 verlegt. Ebenso bewirken die beiden Abbildungen b_1 und b_2 beim gleichzeitigen Betrachten die Vorstellung von der wahren Lage des Punktes b u. s. f. Hieraus erklärt sich die auffällige Täuschung.

Die Herstellung zweier solcher Abbildungen hat keine weiteren Schwierigkeiten. Jede Abbildung ist nach den bisher entwickelten Gesetzen für sich zu konstruieren. Es ist hierbei nicht notwendig, dass die Entfernung

der beiden Augenpunkte dem wirklichen Abstand der beiden menschlichen Augen voneinander gleich ist. Der Zeichner kann diesen Abstand sehr willkürlich annehmen. Wenn man z. B. zwei Abbildungen einer Stadt aus zwei Augenpunkten herstellt, deren Abstand das Hundertfache des Abstandes der menschlichen Augen voneinander beträgt, so entsprechen zwei solche Abbildungen denjenigen, welche man erhalten würde, wenn man ein hundertfach verkleinertes plastisches Modell jener Stadt aus zwei Augenpunkten, welche ihren natürlichen Abstand voneinander haben, betrachtet.

Für die Konstruktion der Abbildungen lassen sich noch einige Vereinfachungen einführen, welche wir hier kurz erläutern wollen.

4) Es sei P (p) ein Punkt auf der Geraden G (s, f); A sei der Hauptpunkt. Wir untersuchen die Änderung der Lage von p, wenn der Augenpunkt A_1 beliebig verlegt wird*).

α. Der Augenpunkt werde um eine gegebene Strecke m parallel zur Bildfläche verschoben (Fig. 117).

Es ist leicht einzusehen, dass in diesem Falle der Hauptpunkt um dieselbe Strecke und in derselben Richtung wie der Augenpunkt fortrückt, ebenso der Fluchtpunkt f der gegebenen Geraden. Ist demnach A′ die neue Lage des Hauptpunktes (wo $AA' = m$), so machen wir $ff' \parallel AA'$ und gleich m, dann ist f′ der neue Fluchtpunkt der gegebenen Geraden. Da die Spur s der Geraden sich nicht ändert, so ist nun sf′ die Abbildung der Geraden in Bezug auf den neuen Augenpunkt. Auf sf′ muss nun die neue Abbildung des Punktes P liegen. Denkt man sich durch die beiden Strahlen, welche von P nach beiden Lagen A_1 und A_2 (s. α) des Augenpunktes gehen, eine Ebene gelegt, so enthält diese auch die Verbindungslinie A_1A_2. Folglich muss jene Ebene die Bildfläche in einer durch p gehenden, zu A_1A_2 parallelen Geraden pp′ durchschneiden. Auf dieser und auf sf′ liegt folglich die neue Abbildung des Punktes P.

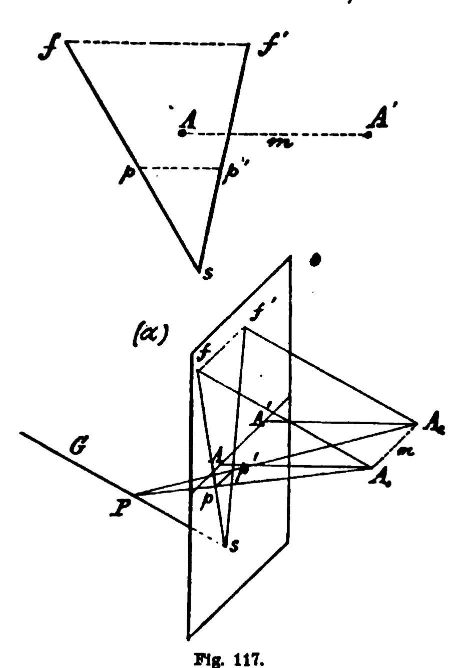


Fig. 117.

*) Vergl. „Die Transformationen in der Centralprojektion" von J. Schmiedhauser, in dem Bericht der Gewerbeschule zu Basel 1873—74 enthalten.

Hieraus folgt, dass die Abbildung eines beliebigen Punktes durch eine zur Bildfläche parallele Verschiebung des Augenpunktes stets parallel zu der letzteren verschoben wird.

β. Der Augenpunkt werde um eine gegebene Strecke auf dem Hauptstrahle verschoben (Fig. 118).

Der zu G gehörige neue Parallelstrahl A_2f' (s. α) liegt in diesem Falle in einer Ebene mit A_1f und dem Hauptstrahle A_1A, und derselbe trifft deshalb die Bildfläche in einem Punkte f', welcher auf der durch A und f gehenden Geraden liegen muss. Hiernach ist sf' die neue Abbildung von G. Ferner liegen die Strahlen PA_1 und PA_2 und der Hauptstrahl in einer Ebene, welche die Bildfläche in der Geraden pA schneidet. Da, wo pA von PA_2 getroffen wird, ist die neue Abbildung p' des Punktes P; dieselbe liegt auch zugleich auf der Geraden sf'.

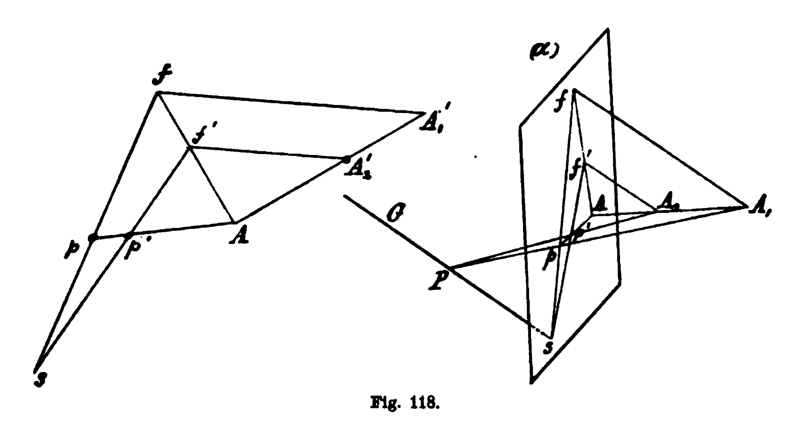


Fig. 118.

Zur Ausführung der Konstruktion auf der ebenen Zeichenfläche ist die Ebene A_1Af durch Drehung um Af in die Bildebene niederzulegen. Wir ziehen demnach AA_1' senkrecht zu Af, machen AA_1' gleich der ursprünglichen Entfernung des Auges von der Bildfläche und $A_1'A_2'$ gleich der gegebenen Strecke, um welche der Augenpunkt auf dem Hauptstrahle verschoben werden soll. Zu $A_1'f$ ziehen wir die Parallele $A_2'f'$, welche Af in dem neuen Fluchtpunkte f' der Geraden G schneidet. Hierdurch ergiebt sich sf' als die neue Abbildung von G. Die neue Abbildung p' des Punktes P liegt nun im Durchschnitt von sf' und Ap.

γ. Der Augenpunkt A_1 werde nach einem anderen beliebigen Punkte A_2 verlegt.

Wir geben dem Augenpunkte A_1 zuerst eine Verschiebung parallel zur Bildfläche, bis seine Projektion auf dem zu A_2 gehörigen Hauptstrahle liegt. Hierdurch gelangt A_1 nach einem Punkte A' dieses Hauptstrahles. Auf dem letzteren verschieben wir alsdann A' nach A_2. Die hierdurch verursachten

Änderungen der Lage von p können wir nacheinander mit Hilfe von α. und β. bestimmen. Damit ist dieser Fall erledigt.

5) Für die Konstruktion stereoskopischer Abbildungen ist nun der in α. erläuterte Fall mit Vorteil zu benutzen, weil man hiernach aus der Abbildung, welche für das eine Auge bereits konstruiert ist, diejenige für das andere Auge leicht findet, wenn man eine zur Bildfläche parallele Verschiebung des Augenpunktes vornimmt.

So ist z. B. aus der für das linke Auge gegebenen Abbildung K eines auf der Horizontalebene stehenden rechtwinkligen Parallelepipedums (Fig. 119),

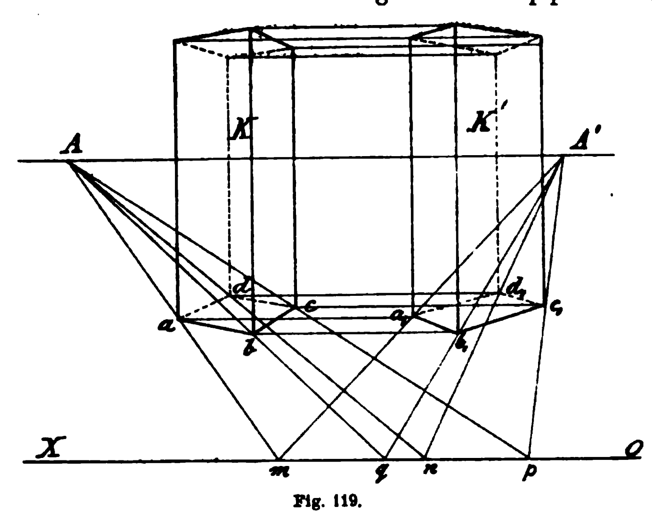


Fig. 119.

bei welcher A der Hauptpunkt, AA′ der Horizont, OX die Achse ist, die Abbildung für das rechte Auge (d. h. in Bezug auf den neuen Hauptpunkt A′) folgendermassen konstruiert.

Durch sämtliche Ecken der Grundfläche abcd werden Senkrechten zur Achse gezogen, deren Abbildungen also nach A gerichtet sind, während ihre Spuren m, n, p, q in OX liegen. Durch die Verschiebung des Hauptpunktes von A nach A′ gehen nun die Abbildungen jener Senkrechten in die Geraden mA′, nA′, pA′, qA′ über. Nach α. sind die Verschiebungen der Abbildungen der Ecken parallel zu AA′, folglich finden wir die neuen Abbildungen a_1, b_1, c_1, d_1 durch die Geraden aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, welche wir durch die Ecken a, b, c, d parallel zum Horizont ziehen u. s. f.

Die Längen der zur Horizontalebene senkrechten Kanten des Parallelepipedums stimmen wegen der parallelen Verschiebungen aller Punkte in den beiden Abbildungen überein.

Sind die Fluchtpunkte und Spuren der einzelnen Kanten erreichbar, so kann man durch Verschiebung der ersteren ebenso leicht die eine Abbildung aus der anderen ableiten.

Diese Andeutungen mögen genügen. Es soll jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass eine Verlegung des Augenpunktes oder der Horizontalebene bei perspektivischen Konstruktionen zuweilen auch benutzt werden kann, wenn es sich um genauere Bestimmung des Durchschnittes zweier unter sehr spitzem Winkel zusammentreffender Geraden handelt.

VII. Abschnitt.

Reliefperspektive.

1) Unter Reliefperspektive verstehen wir die Lehre von der Abbildung eines körperlichen Gegenstandes in einem Raume. Wir gehen hierbei wieder von der Voraussetzung aus, es solle die räumliche Abbildung von einem bestimmten Augenpunkte aus betrachtet, denselben Eindruck machen, wie der abgebildete Gegenstand, woraus zunächst folgt, dass ein Punkt und seine Abbildung auf demselben durch den Augenpunkt gehenden Sehstrahl liegen müssen. Die Gesetze, nach welchen die Abbildungen herzustellen sind, lassen sich leicht entwickeln; man kann dieselben sogar auf linearperspektivische Konstruktionen zurückführen. Wenn nun auch in der Praxis von der strengen Darstellung manchmal abgewichen werden muss, weil namentlich die Beleuchtung hierbei eine eigentümliche Rolle spielt, so ist doch ein genaueres Studium der Gesetze um so mehr zu empfehlen, da man bei diesen Darstellungen weit mehr Fehlern begegnet, als bei den Abbildungen auf einer Ebene. Wer aber mit den Gesetzen gründlich vertraut ist, wird auch ohne viel zu konstruieren das Richtige treffen und auch wissen, in welchen Fällen mit Rücksicht auf künstlerische Wirkung von der strengen Darstellung abgewichen werden kann.

Um in möglichst verständlicher Weise zu der Darstellung solcher räumlichen Abbildungen zu gelangen, wollen wir an einem einfachen Beispiel die zu befolgenden Grundsätze feststellen.

2) Es sei FF_1H_1H (Fig. 120) die gerade Projektion eines rechtwinkligen Parallelepipedums, welches wir uns so gegen die Zeichenfläche gestellt denken, dass die Geraden FH, FF_1, F_1H_1 und HH_1 die Projektionen von 4 Seitenflächen darstellen. Der Augenpunkt sei A. Es soll nun das Parallelepipedum in dem Raume $BCFF_1$, welcher ebenfalls die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums hat, und dessen dem Augenpunkt zugewendete Seitenfläche mit FF_1 zusammenfällt, abgebildet werden. Die Abbildung

von FF_1 ist diese selbst und die Abbildung der Seitenfläche HH_1 soll in der Ebene BC liegen.

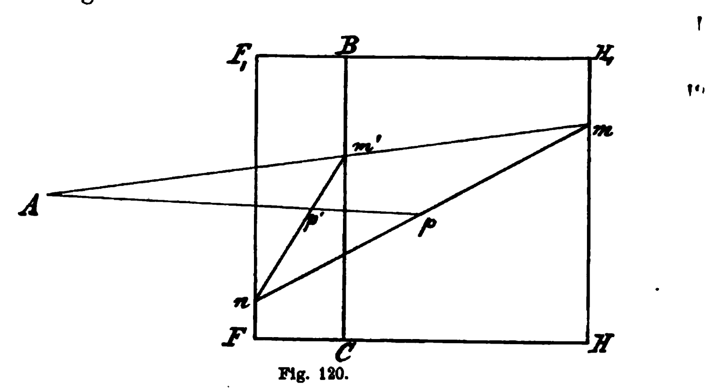


Fig. 120.

Den Raum FF_1BC wollen wir künftig den Bildraum und die dem Augenpunkt zugewendete Seitenfläche FF_1 die Frontebene, ferner HH_1 die Hintergrundsebene nennen.

Die Abbildung eines beliebigen Punktes m der Ebene HH_1 liegt hiernach im Durchschnitt m′ des Sehstrahles Am mit der Ebene BC. Dagegen fällt die Abbildung eines Punktes n der Frontebene mit n zusammen. Ziehen wir jetzt die Geraden nm′ und nm, so fällt nm′ von A aus gesehen scheinbar mit nm zusammen und nm′ soll deshalb als die in dem Bildraum liegende Abbildung von nm betrachtet werden.

Anmerkung. Dass eine Gerade G im Relief wieder durch eine Gerade abgebildet werden muss, ist wohl eine ganz natürliche oder selbstverständliche Forderung. Allerdings könnte auch jede Kurve, welche in der durch G und den Augenpunkt gehenden Ebene liegt, als eine Abbildung von G betrachtet werden. Weil aber ein Relief ebensowohl wie eine ebene Abbildung in der Regel nicht gerade von dem richtigen Augenpunkt aus betrachtet wird, so würde die Krümmung der Abbildungen sofort in störender Weise sichtbar werden.

Ist p ein beliebiger Punkt der Geraden nm, so ist seine Abbildung p′ der Durchschnitt des Sehstrahles pA mit nm′.

Aus den oben festgestellten Voraussetzungen über die Entstehung der räumlichen Abbildung leiten wir nun folgende Gesetze ab:

α. Die Abbildung eines beliebigen Punktes m ist der Durchschnitt m′ der Abbildungen zweier in m sich schneidenden Geraden.

Zum Beweise benutzen wir die schiefe Projektion (Fig. 121). Es seien ab und cd zwei durch m gehende Geraden, a und c ihre Durchschnitte mit der Frontebene, und b und d die Durchschnitte mit der Ebene H, deren

Abbildung in die Ebene h fallen soll. Die Strahlen bA und dA treffen nun die Ebene h in b′ und d′, woraus sich ab′ und cd′ als Abbildungen von ab und cd ergeben. Es ist nun noch zu zeigen, dass ab′ und cd′ sich in einem Punkte m′ schneiden und dass dieser auf dem Sehstrahl Am liegt.

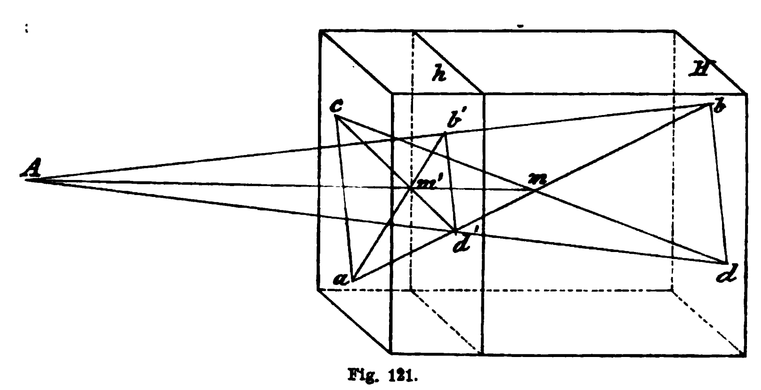


Fig. 121.

Nun liegen ab und cd (weil sie sich in m schneiden) in einer Ebene und folglich sind ac und bd als Durchschnitte dieser Ebene mit zwei parallelen Ebenen unter sich parallel. Ebenso ist b′d′ mit bd, also auch mit ac parallel (b′d′ und bd sind Durchschnitte der Ebene Abd mit zwei parallelen Ebenen). Man kann demnach durch ac und b′d′ wiederum eine Ebene legen, welche auch die Abbildungen ab′ und cd′ enthält. Folglich müssen die letzteren sich in einem Punkte m′ schneiden. Nun liegt aber m′ auch in den beiden Sehstrahlenebenen Aab und Acd und folglich in der Schnittlinie dem Sehstrahl Am.

Hieraus folgt auch unmittelbar: Die Abbildungen aller durch einen Punkt m gehenden Geraden gehen durch dessen Abbildung m′.

β. Die Abbildung einer Ebene ist wieder eine Ebene.

Es ist aus Fig. 121 leicht zu ersehen, dass die durch ab′ und cd′ bestimmte Ebene die Abbildung der durch ab und cd gehende Ebene ist. Die Schnittlinie mit der Frontfläche (Spur) ist beiden gemeinsam, und die Schnittlinie der Abbildung mit der Ebene h ist ihrer Spur parallel. Die Abbildung der Ebene enthält die Abbildungen aller Geraden derselben.

γ. Die Abbildung einer zur Frontebene parallelen Geraden ist eine der abgebildeten parallele Gerade (Fig. 122).

Die Gerade mn und ihre Abbildung m′n′ treffen stets in demselben Punkte (Spur) die Frontebene. Schneidet also mn die Frontebene im Unendlichen, so ist dasselbe mit der Abbildung m′n′ der Fall. Ferner sind mn und m′n′ unter sich auch parallel, weil beide noch in einer Ebene, der Sehstrahlenebene liegen. Um die Abbildung der Geraden mn zu bestimmen, ermitteln wir diejenige eines beliebigen Punktes m derselben. Wir ziehen

durch m die beliebige Gerade bc, deren Abbildung bc′, wie oben angegeben, gefunden wird. Dann schneidet der Sehstrahl Am die Gerade bc′ in der Abbildung m′ von m. Durch m′ geht die Abbildung m′n′ der Geraden mn parallel zu der letzteren.

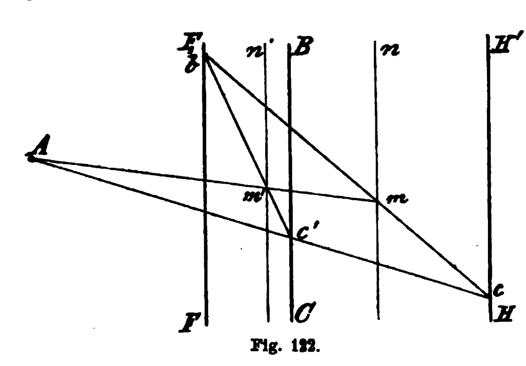


Fig. 122.

δ. Eine zur Frontebene parallele Ebene E wird durch eine Ebene e abgebildet, welche ebenfalls zur Frontebene parallel ist.

Denn die Abbildungen aller durch einen Punkt M der Ebene E gehenden Geraden, welche in E liegen, sind der Frontfläche parallel und gehen durch die Abbildung m des Punktes M. Somit liegen die Abbildungen jener Geraden in einer Ebene e, der Abbildung der Ebene E.

Aus diesem Grunde werden die Abbildungen ebener Figuren, welche zur Frontfläche parallel sind, den Originalen geometrisch ähnlich.

Fluchtpunkte und Fluchtlinien.

3) Der Strahl AA_1, welcher vom Augenpunkt aus senkrecht zur Frontebene gezogen wird, soll der Hauptstrahl genannt werden (Fig. 123).

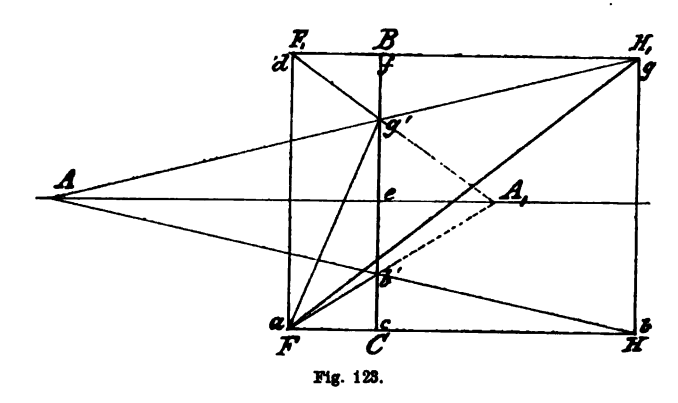


Fig. 123.

Es sei ab eine Gerade, welche dem Hauptstrahle parallel ist. Die Abbildung ihres Schnittpunktes b mit der Hintergrundsebene HH_1 sei b′, dann ist ab′ die Abbildung der Geraden. Weil nun ab′ in der durch ab und den Hauptstrahl gehenden Ebene liegt, so schneidet ab′ den Hauptstrahl in einem Punkte A_1. Nach diesem Punkte sind die Abbildungen aller zur Frontebene senkrechten Geraden gerichtet. Hiervon überzeugt man sich leicht durch die Proportion:

$$A_1e : Ae = ac : bc.$$

Ist dg eine andere zur Frontebene senkrechte Gerade und dg' ihre Abbildung, und schneidet die letztere den Hauptstrahl in dem Punkte A', so erhält man die Proportion:

$$A'e : Ae = df : fg.$$

Der Vergleich beider Proportionen zeigt, dass, weil $Ae = Ae$, $df = ac$, $fg = bc$, auch $A'e = A_1e$ sein muss, d. h. A_1 und A' fallen zusammen. Deshalb sind die Abbildungen aller zur Frontebene senkrechten Geraden nach dem Punkte A_1 gerichtet, welchen wir künftig den Hauptpunkt nennen wollen.

Ist der Hauptpunkt gegeben, so kann man die Abbildung jeder zur Frontebene senkrechten Geraden finden, ohne den Augenpunkt zu benutzen.

Ferner sieht man aus Fig. 123 leicht, wie die Abbildung eines Punktes g der Hintergrundsebene mit Hilfe des Hauptpunktes bestimmt werden kann. Wir ziehen durch g die Gerade dg senkrecht zur Frontebene; die Abbildung dieser Geraden ist die von der Spur d nach dem Hauptpunkte A_1 gerichtete Gerade, welche nun BC in g', der Abbildung von g, schneidet.

Endlich ergiebt sich, dass man auch eine beliebige Gerade z. B. ag abbilden kann, sobald der Hauptpunkt gegeben ist. Die Abbildung ist die Gerade, welche den vorhin gefundenen Punkt g' mit a verbindet.

4) Durch den Hauptpunkt A_1, welcher als Abbildung des unendlich fernen Punktes jeder zur Frontebene senkrechten Geraden betrachtet werden kann, legen wir eine zur Frontebene parallele Ebene VV'. Diese Ebene enthält die Fluchtpunkte (d. h. die Abbildungen der unendlich fernen Punkte) aller möglichen Geraden (Fig. 124).

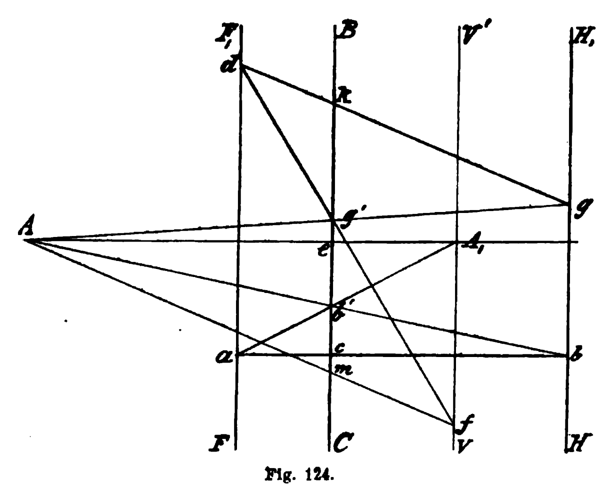


Fig. 124.

Ist wieder wie in der vorigen Figur ab' die Abbildung der zur Bildfläche senkrechten Geraden ab; A_1 der Hauptpunkt, ferner dg eine beliebige Gerade, dg' deren Abbildung, welche verlängert den Parallelstrahl Af in f schneidet, so folgt:

$$A_1e : Ae = ac : bc;$$

ferner:

$$fm : Am = dk : gk,$$
$$= ac : bc;$$

folglich verhält sich auch:

$$fm : Am = A_1e : Ae.$$

Mithin ist die durch A_1 und f gehende Gerade VV′ parallel zur Frontebene. Man sieht leicht, dass die Gerade VV′ die Projektion einer Ebene darstellt, welche parallel zur Frontebene ist. Hiernach liegen die Fluchtpunkte aller Geraden in dieser Ebene, welche wir deshalb künftig die Fluchtebene nennen wollen. Die Abbildungen paralleler Geraden sind folglich nach demjenigen Punkte gerichtet, in welchem der durch A gehende Parallelstrahl die Fluchtebene schneidet.

5) Wie bei den Abbildungen auf einer Ebene haben wir auch bei den räumlichen Abbildungen die sog. Fluchtlinie, d. h. die Abbildung der unendlich fernen Geraden einer Ebene, zu berücksichtigen. Die Abbildung der horizontalen Ebene ab (Fig. 125) wird durch ab_1 dargestellt. Sie hat mit der gegebenen Ebene eine gemeinschaftliche Spur in der Frontebene, welche in unserer geraden Projektion als der Punkt a erscheint. Erweitern wir die Ebene ab_1, so schneidet sie die Fluchtebene in einer der Spur parallelen Geraden, welche durch den Hauptpunkt A_1 geht. Diese Gerade ist somit die Fluchtlinie der Ebene ab; sie enthält die Fluchtpunkte aller in ab liegenden Geraden.

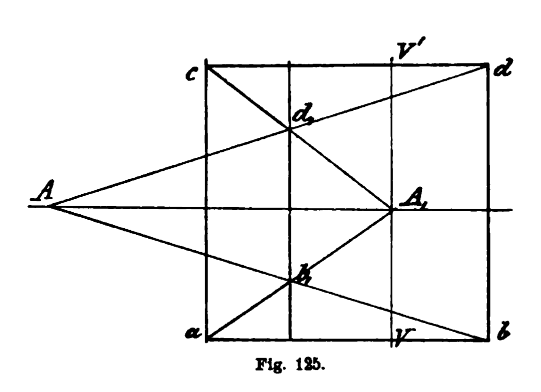


Fig. 125.

Die eben gefundene Fluchtlinie ist aber, wie man leicht sieht, allen horizontalen Ebenen gemeinschaftlich; wir nennen dieselbe den **Horizont**. Folgende Gesetze ergeben sich hieraus von selbst:

6) **Die Fluchtpunkte aller horizontalen Geraden liegen auf dem Horizont.**

7) **Die Fluchtlinien aller zur Frontebene senkrechten Ebenen gehen durch den Hauptpunkt A_1.**

8) **Die Fluchtlinie einer beliebigen Ebene E ist parallel ihrer Spur mit der Frontebene. Dieselbe geht durch den Fluchtpunkt einer beliebigen Geraden, welche in E liegt.**

9) Ist in Fig. 125 cd eine andere horizontale Ebene, cd_1 deren Abbildung, so folgt, dass der Raum des in gerader Projektion acdb dargestellten rechtwinkligen Parallelepipedums durch die abgestumpfte Pyramide acd_1b_1 abgebildet wird. Der vollständige pyramidale Raum acA_1a ist die Abbildung des nach rechts bis ins unendliche erweiterten prismatischen Raumes acdb.

Die bisher aufgestellten Gesetze enthalten dasjenige, was zur Konstruk-

tion eines Reliefs erforderlich ist. Wir wollen zunächst ein einfaches Beispiel als Anwendung näher betrachten.

10) Die Abbildung des in Fig. 126 durch Grund- und Aufriss dargestellten Raumes (F_1Fgh, $F'F_1'g'h'$), welcher die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums hat, soll in dem von den parallelen Ebenen FF_1 und HH_1 begrenzten Bildraum (Aufriss) konstruiert werden. Innerhalb des ersten Raumes befindet sich, an der Hintergrundsebene stehend, ein rechtwinkliges Parallelepipedum P auf zwei rechteckigen Platten Q und R ruhend, deren Dimensionen ebenfalls aus Grundriss und Aufriss zu erkennen sind. Auch hiervon sind die räumlichen Abbildungen zu ermitteln.

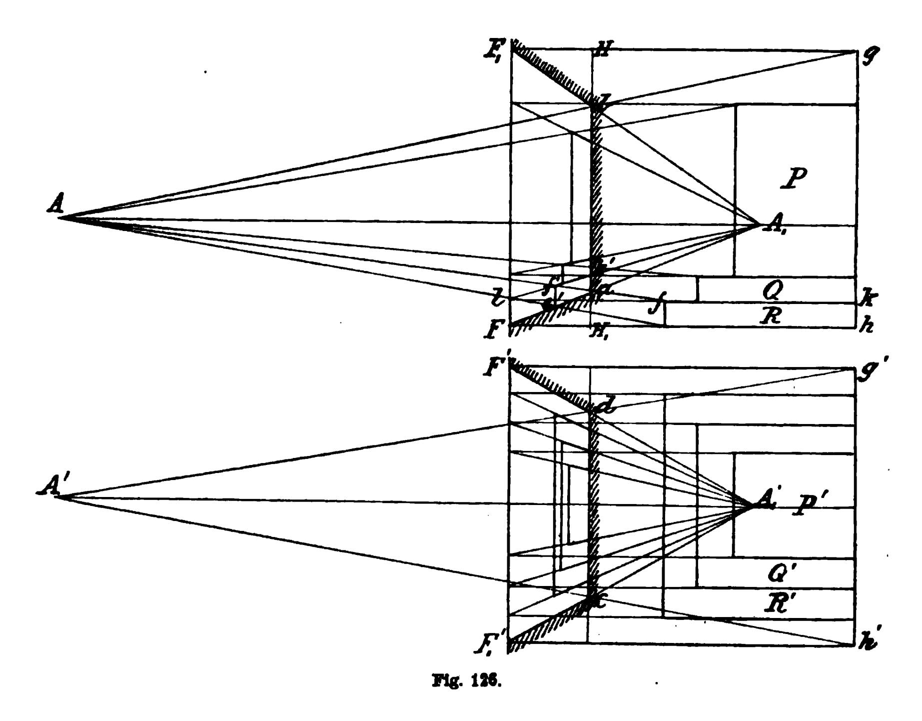


Fig. 126.

Die Abbildung des gegebenen parallelepipedischen Raumes wird nach 9) durch den abgestumpften pyramidalen Raum, dessen Projektionen F_1Fab und $F_1'F'dc$ sind, dargestellt. Um auch die Abbildungen der drei Körper P, Q und R zu finden, verlängern wir sowohl im Grundriss wie auch im Aufriss diejenigen Kanten bis zur Frontfläche, welche senkrecht zu der letzteren stehen. Von den Durchschnittspunkten aus gehen die Abbildungen derselben nach dem Hauptpunkte A_1. So ist z. B. die in lA_1 liegende Strecke lk' (Aufriss) die Abbildung von lk. Ziehen wir noch den Strahl fA, so schneidet derselbe lk' in f', welcher die Abbildung von f ist. Dann erhält man weiter in der zu FF_1 gezogenen Parallelen $e'f'$ die Abbildung

von ef u. s. f. Auf gleiche Weise kann man die Abbildungen aller übrigen Eckpunkte in beiden Projektionen ermitteln, und man sieht leicht, dass aus dem jetzt durch Grund- und Aufriss dargestellten Relief alle Dimensionen desselben entnommen werden können.

11) In 3) ist gezeigt worden, dass die Abbildung einer beliebigen Geraden auch mit Hilfe des Hauptpunktes A_1 allein gefunden werden kann. Hierdurch wird der zur Konstruktion der Abbildung erforderliche Raum auf den abzubildenden Raum beschränkt, so lange A_1 innerhalb der letzteren liegt. Wir geben hierzu einige Beispiele.

Abbildung eines auf der Horizontalebene stehenden Kreuzes, welches in Fig. 127 durch Grund- und Aufriss dargestellt ist. Die der Frontebene zugewendeten Seitenflächen des Kreuzes seien parallel zu derselben. Die zur Frontfläche senkrecht stehenden Kanten des Kreuzes sind bis zum Durchschnitt mit derselben zu verlängern. Die Abbildungen dieser Kanten liegen alsdann in den Verbindungslinien der Durchschnittspunkte mit dem Hauptpunkte A_1 (im Grundriss A_1'). Um die Eckpunkte zu bestimmen, ziehen wir durch m, n, p die Gerade ab, welche die Frontebene in a und die Hintergrundsebene in b schneidet. Die Abbildung b′ des Punktes b wird nach 3) gefunden; ist diese bestimmt, so erhält man in ab′ die Abbildung der Geraden ab. Hierdurch ergeben sich in m′, n′ und p′ die Abbildungen der Punkte m, n und p, durch welche nun wieder die Abbildungen der zur Horizontalebene senkrechten Kanten des Kreuzes bestimmt sind. Endlich lässt sich durch Projicieren aus dem gefundenen Aufriss leicht der Grundriss der Abbildung vervollständigen, wodurch dann alle Dimensionen des Reliefs ermittelt sind.

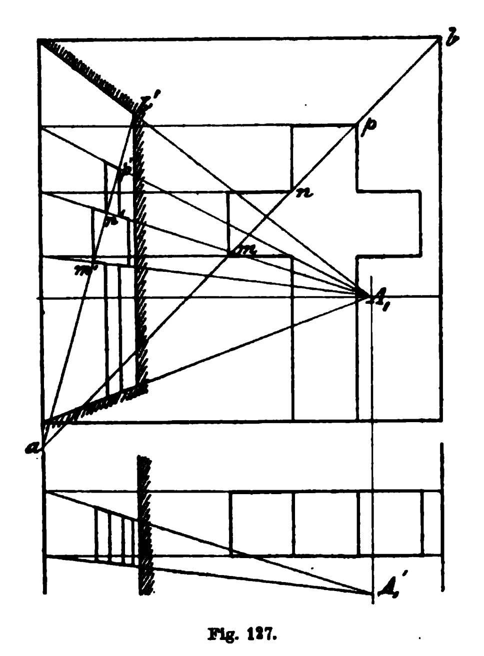


Fig. 127.

12) Abbildung einer Treppe in schiefer Stellung gegen die Frontfläche (Fig. 128).

Lage und Dimensionen der Treppe sind aus Grund- und Aufriss zu erkennen. Die Abbildung kann ebenfalls ohne Benutzung des Augenpunktes konstruiert werden, wenn der Hauptpunkt A_1 gegeben ist. Wir verlängern $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$ (Grundriss) bis zu ihren Schnittpunkten m und n mit der

Frontebene; bestimmen alsdann die Abbildung b' des Punktes b_1 nach 3), hieraus ergiebt sich mb' als Abbildung von mb_1. Es sei VV_1 die Projektion der durch A_1 gehenden Fluchtebene. Wir verlängern mb' bis zum Durchschnitt f mit VV_1; dann ist f der Fluchtpunkt, nach welchem auch die Abbildung nd' der Geraden nd_1 gerichtet ist. Da der Fluchtpunkt der zu a_1c_1 parallelen Kanten nicht zugänglich ist, so bestimmen wir die Abbildungen derselben auf folgende Weise. Von einem beliebigen Fluchtpunkte f_1 auf VV_1 ziehen wir durch b' die Gerade pf_1, alsdann ist pb' die Abbildung von pb_1. Nun legen wir durch a_1, c_1 und d_1 und durch die auf a_1b_1 und c_1d_1 liegenden Teilpunkte Parallelen zu pb_1 und verbinden die Punkte, in welchen die letzteren die Frontebene treffen mit f_1 durch Geraden. Hierdurch erhält man die Abbildungen jener Parallelen und damit auch auf mb' und nf die Abbildungen aller Ecken des Grundrisses.

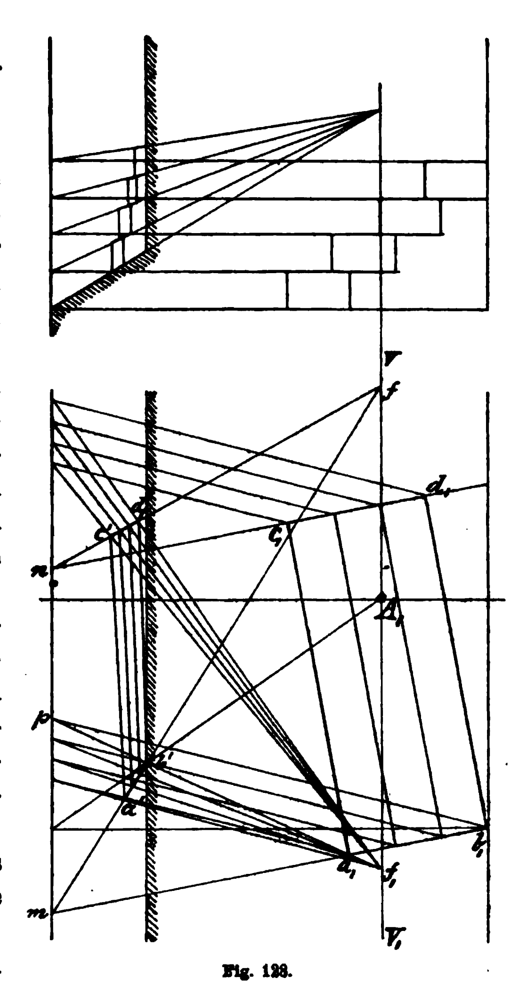


Fig. 128.

Die Ermittelung des Aufrisses ist aus Fig. 128 wohl sofort zu erkennen, wenn wir noch bemerken, dass die Ecken desselben senkrecht über den entsprechenden Ecken des Grundrisses liegen müssen.

Unabhängig vom Grundriss kann man jedoch die Eckpunkte des Aufrisses ähnlich wie in Fig. 127 finden, was wir dem Leser wohl überlassen können.

13) Die Dimensionen eines Reliefs lassen sich noch besser aus der Projektion desselben auf der Frontebene entnehmen, wie wir an dem in Fig. 129 dargestellten Beispiel zeigen wollen. Das rechtwinklige Parallelepipedum P, welches auf der Horizontalebene und an der Hintergrundsebene steht, ist durch P_1 als Relief in der Seitenansicht wie bei den bisherigen Figuren abgebildet. Ist nun das Rechteck abcd die Projektion des Parallelepipedums

auf der Frontebene, welche in Fig. 129 rechts auf die Zeichenfläche gelegt ist, ferner A_2 die Projektion des Hauptpunktes A_1, so gehen die Projektionen der Abbildungen der zur Bildfläche senkrechten Kanten des Parallelepipedums von a, b, c und d nach A_2. Die Abbildung des Eckpunktes e liegt im Durchschnitt e_1 des Strahles A e mit der Abbildung der Horizontalebene.

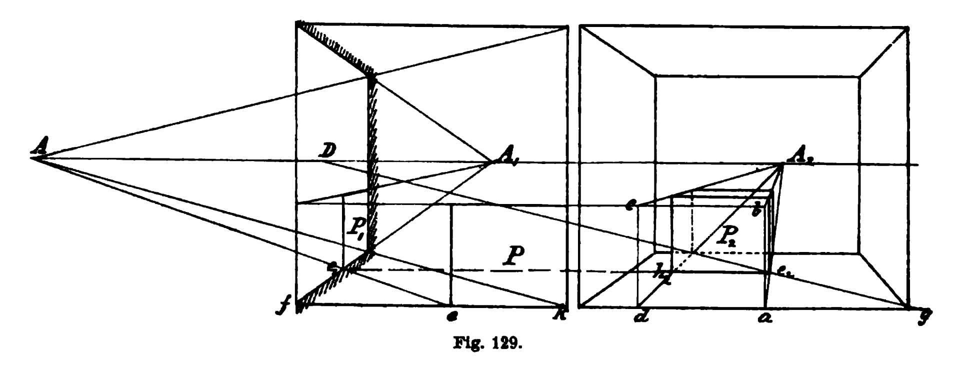


Fig. 129.

Rechts findet man den entsprechenden Punkt, wenn man $e_1 e_2$ parallel zu fk zieht. Man erhält dadurch die Projektion der Abbildung $e_2 h_2$ einer Kante, welche in der Seitenansicht als Punkt e_1 erscheint.

Nun lässt sich e_2 auch folgendermassen bestimmen. Auf der durch A_2 gehenden Projektion des Horizontes machen wir $A_2 D$ gleich dem Abstand des Augenpunktes A vom Hauptpunkte A_1. Ist ferner $ag = ef$, so schneidet Dg die Gerade aA auch in e_2. Denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $AA_1 e_1$ und $ee_1 f$ sowie der Dreiecke $A_2 D e_2$ und $ae_2 g$ folgt:

$$e_1 f : e_1 A_1 = ef : AA_1$$
$$ae_2 : e_2 A_2 = ag : A_2 D.$$

Da nun $ef = ag$ und $A_2 D = AA_1$ ist, so folgt:

$$e_1 f : e_1 A_1 = ae_2 : e_2 A_2,$$

woraus sich ergiebt, dass e_1 und e_2 auf einer Parallelen zu AA_2 liegen.

Der Punkt e_2 ist aber hiernach so konstruiert, als wäre die Figur rechts eine perspektivische Abbildung desselben auf der Frontebene, mit A_2 als Hauptpunkt und D als Distanzpunkt. Da nun e ein beliebiger Punkt der Horizontalebene ist, so gilt dies auch für alle Punkte derselben, und man sieht leicht, dass dasselbe auch auf alle nicht in der Horizontalebene liegenden Punkte angewendet werden kann. Es folgt hieraus das wichtige Gesetz:

Die Projektion eines Reliefs auf der Frontebene ist eine linearperspektivische Abbildung des darzustellenden Gegenstandes auf dieser, welche durch Annahme eines auf demselben Hauptstrahle liegenden Augenpunktes entsteht, dessen Abstand von der Frontfläche gleich dem Abstand des ursprünglichen Augenpunktes vom Hauptpunkte des Reliefs ist.

Man kann den Beweis dieses Satzes auch auf folgende Weise führen. Es sei ab′ (Fig. 130) die Abbildung einer beliebigen Geraden ab. a ihre Spur in der Frontebene und f ihr Fluchtpunkt (also Af ∥ ab). Wir denken uns die Fluchtebene parallel mit sich selbst bis zur Frontebene so verschoben,

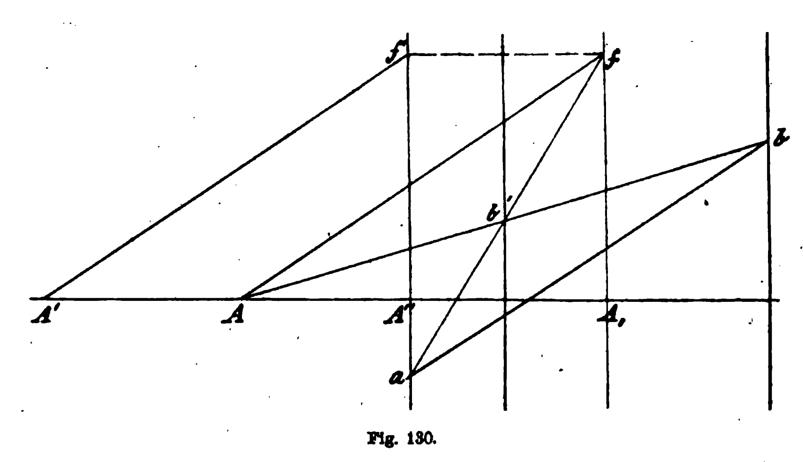


Fig. 130.

dass der Hauptpunkt A_1 sich auf dem Hauptstrahle bewegt und nach A″ gelangt. Gleichzeitig werde der Augenpunkt A auf dem Hauptstrahle um die Strecke $A'A = A_1A''$ verschoben, dann kommt das Dreieck AA_1f in die Lage A′A″f′. Der Punkt f′ ist die in der Frontebene liegende gerade Projektion von f und A′f′ ist parallel zu Af, also auch parallel zu ab. Die Abbildung von ab auf der Frontfläche liegt somit in af′, wenn A′ als Augenpunkt betrachtet wird, und af′ ist wiederum die gerade Projektion der räumlichen Abbildung af.

Hiermit ist der Satz für eine beliebige Gerade und folglich für jede Gerade allgemein nachgewiesen.

14) Wir können hiermit die Begründung der Reliefperspektive abschliessen, weil man nach den bisher gegebenen Entwickelungen die Dimensionen der zu konstruierenden Abbildung eines Gegenstandes leicht zu bestimmen vermag. Wir wollen jedoch noch einige Bemerkungen über die Abbildungen runder Formen machen, welche auch praktisch nützlich sein dürften.

Nach 2 δ) ist die Abbildung eines Kreises, welcher zur Frontebene parallel ist, wieder ein Kreis. Sie liegt in einer zur Frontebene parallelen Ebene und die Abbildungen des Mittelpunktes und des Halbmessers werden nach dem früheren leicht gefunden. Die Projektion des Reliefs (welche nun nach 13 konstruiert werden kann) giebt die wahre Grösse der räumlichen Abbildung des Kreises an.

Ist der Kreis nicht parallel zur Bildfläche, so bestimmt man zuerst die

Abbildung seiner Ebene (Spur und Fluchtlinie derselben) und in dieser so viele Punkte, als zur Zeichnung der Abbildung nötig sind. Am besten ist es auch hier wieder, die Vertikalprojektion und die Seitenansicht des Reliefs herzustellen.

Steht die Ebene des Kreises senkrecht zur Bildfläche und zur Horizontalebene und geht sie zugleich durch den Augenpunkt, so erhält man in der Seitenansicht die wahre Gestalt der räumlichen Abbildung.

Die räumliche Abbildung einer Kugel ist ein Ellipsoid. Liegt der Mittelpunkt der Kugel auf dem Hauptstrahle, so entsteht als Abbildung ein Umdrehungsellipsoid. Denn jeder ebene Schnitt, welcher mit der Frontfläche parallel ist, erscheint in der Abbildung als Kreis, und die Ebenen dieser Kreise stehen auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte (Hauptstrahl) senkrecht.

Hat die Kugelfläche eine beliebige Lage, so wird die Abbildung ein dreiachsiges Ellipsoid. Alle Schnitte des Ellipsoids, parallel zur Frontebene sind Kreise, weil sie Abbildungen von Schnitten derselben Lage mit der Kugelfläche darstellen. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieser Kreisschnitte des Ellipsoids ist nach dem Hauptpunkte des Reliefs gerichtet.

15) Abbildung eines Halbcylinders, welcher auf einem halbkreisförmigen Sockel steht (Fig. 131).

Es ist die Vertikalprojektion, eine Seitenansicht und der Grundriss des

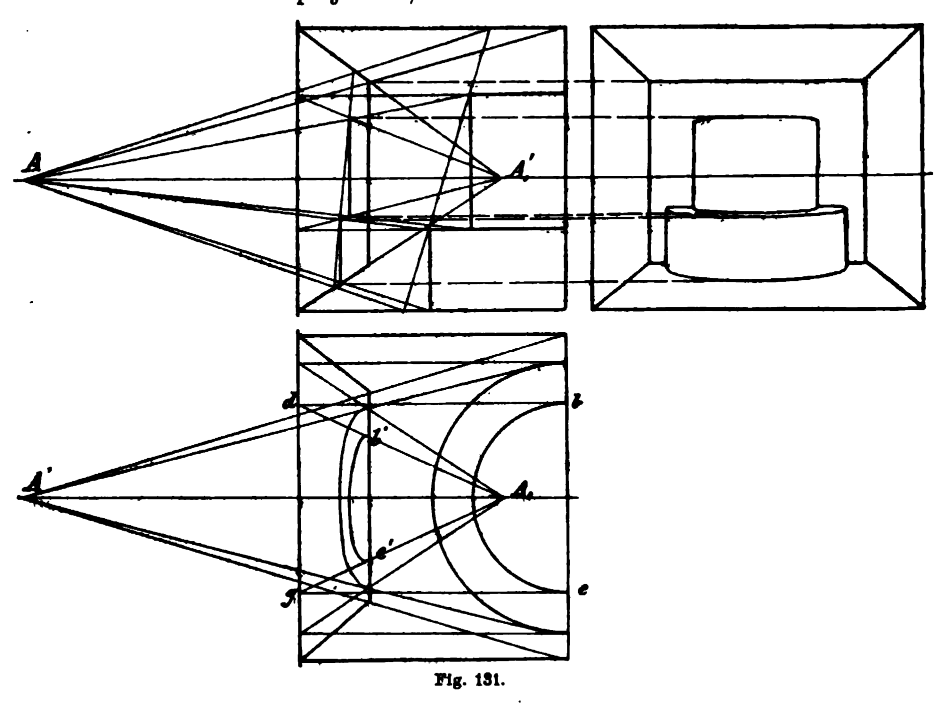


Fig. 131.

Reliefs dargestellt. Die Konstruktion bedarf keiner weiteren Erläuterung. Betrachten wir den Grundriss, so ist zu bemerken, dass die Abbildung b′d der Tangente bd, nach dem Hauptpunkte A_1 gerichtet ist. Man sieht hieraus sofort, dass die Abbildung des Halbkreises, welchen diese Tangente berührt, nicht die Hälfte einer Ellipse ist, sondern ein etwas grösserer Teil derselben. Gleiches gilt für die übrigen Halbkreise. Es geht daraus hervor, dass kleine Teile der Mantelfläche in der Abbildung, welche nahe an der Abbildung der Hintergrundsebene liegen, nicht sichtbar sind. Nun soll das Relief nur vom Augenpunkte aus betrachtet werden, wenn man den richtigen Eindruck gewinnen will, und da ist denn offenbar unnötig, nicht sichtbare Flächen darzustellen. Dies mag der Grund sein, dass man in solchem Falle wie oben als Annäherung nicht selten den Halbkreis durch eine halbe Ellipse dargestellt findet. Ein derartiges Verfahren ist aber gerechtfertigt, wenn man den Augenpunkt in unendlicher Entfernung von der Frontebene annimmt, wodurch man Abbildungen erhält, welche das räumliche Analogon zu den geraden Projektionen der Darstellenden Geometrie bilden.

16) Abbildung bei der Annahme paralleler Sehstrahlen.

Es sei wie früher FF_1 (Fig. 132) die Frontebene, HH_1 die Hintergrundsebene, BC die Abbildung der letzteren. Soll ein Punkt a abgebildet werden, so legen wir durch a eine beliebige Gerade bc. Durch c ziehen wir den Sehstrahl ce senkrecht zur Frontfläche, derselbe schneidet BC in der Abbildung c′ des Punktes c und nun erhält man in bc′ die Abbildung der Geraden bc. Durch a ziehen wir ebenfalls den Sehstrahl senkrecht zur Frontebene, dann schneidet dieser bc′ in der gesuchten Abbildung a′ des Punktes a. Trifft aa′ die Frontebene in a″, so folgt:

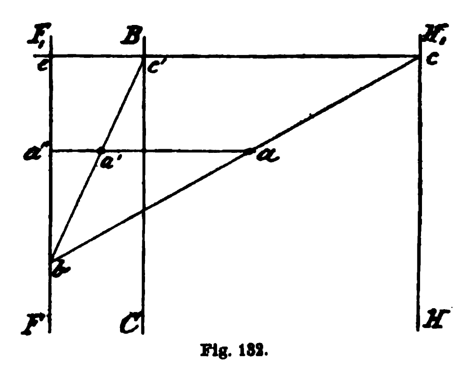


Fig. 132.

$$a'a'' : aa'' = c'e = ce,$$

d. h. der Abstand der Abbildung eines Punktes a von der Frontebene verhält sich zum Abstand des Punktes a von derselben Ebene, wie die Tiefe des Bildraumes zur Tiefe des abgebildeten Raumes. Hiernach lässt sich jede derartige Abbildung leicht konstruieren. Bemerkenswert ist noch, dass die Projektion der Abbildung auf der Frontebene mit der Projektion des abzubildenden Gegenstandes zusammenfällt.

17) Die Abbildung eines auf der Horizontalebene liegenden und eines stehenden Cylinders ist hiernach in Fig. 133 dargestellt, und zwar durch den Grundriss und die Vertikalprojektion des Reliefs.

Der Grundriss C des auf der Horizontalebene liegenden Cylinders ist das Rechteck abcd. Ist nun FF′ die Horizontalprojektion der Frontebene, FM die Tiefe des Bildraumes, HH′ die mit der Achse OX zusammenfallende Projektion der Hintergrundsebene, so findet man die Abbildung von cd z. B., wenn man die letztere bis g und f verlängert. Durch f ziehen wir den Sehstrahl ff′ senkrecht zur Frontebene Die Abbildung f′ von f liegt dann in der Abbildung MN der Hintergrundsebene und gf′ ist nun die Abbildung von gf. Ziehen wir noch die Sehstrahlen dd′ und cc′ parallel ff′, so schneiden dieselben auf gf′ die gesuchte Abbildung c′d′ ab.

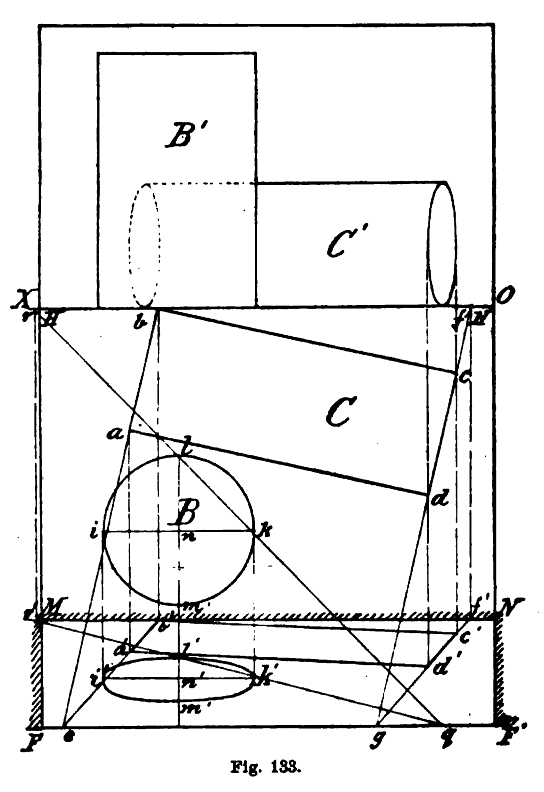


Fig. 133.

Um die Abbildung des Grundkreises des Cylinders B zu finden, bestimmen wir die Achsen der Ellipse, welche die Abbildung dieses Kreises ist. Wir ziehen den Durchmesser ik parallel und den Durchmesser ml senkrecht zur Frontebene; legen durch die Endpunkte k und l die Gerade qr und bestimmen deren Abbildung qr′. Durch die zur Frontfläche senkrechten Strahlen kk′ und ll′, ergeben sich alsdann die Abbildungen k′ und l′ der Punkte k und l. Ferner ziehen wir i′k′ parallel zur Frontfläche und machen alsdann i′n′ = k′n′; m′n′ = n′l′, dann sind i′k′ und m′l′ die Hauptachsen der gesuchten Ellipse, welche man nun nach (IV, 5, I. Teil) mit Hilfe eines Papierstreifens leicht zeichnen kann.

Bei der Darstellung eines Reliefs unter Annahme paralleler Sehstrahlen verschwinden die Verkürzungen an allen Linien, welche parallel zur Frontebene sind. Es dürfte sich deshalb dies Verfahren hauptsächlich für geringere Tiefen des Bildraumes wie des abzubildenden Raumes eignen.

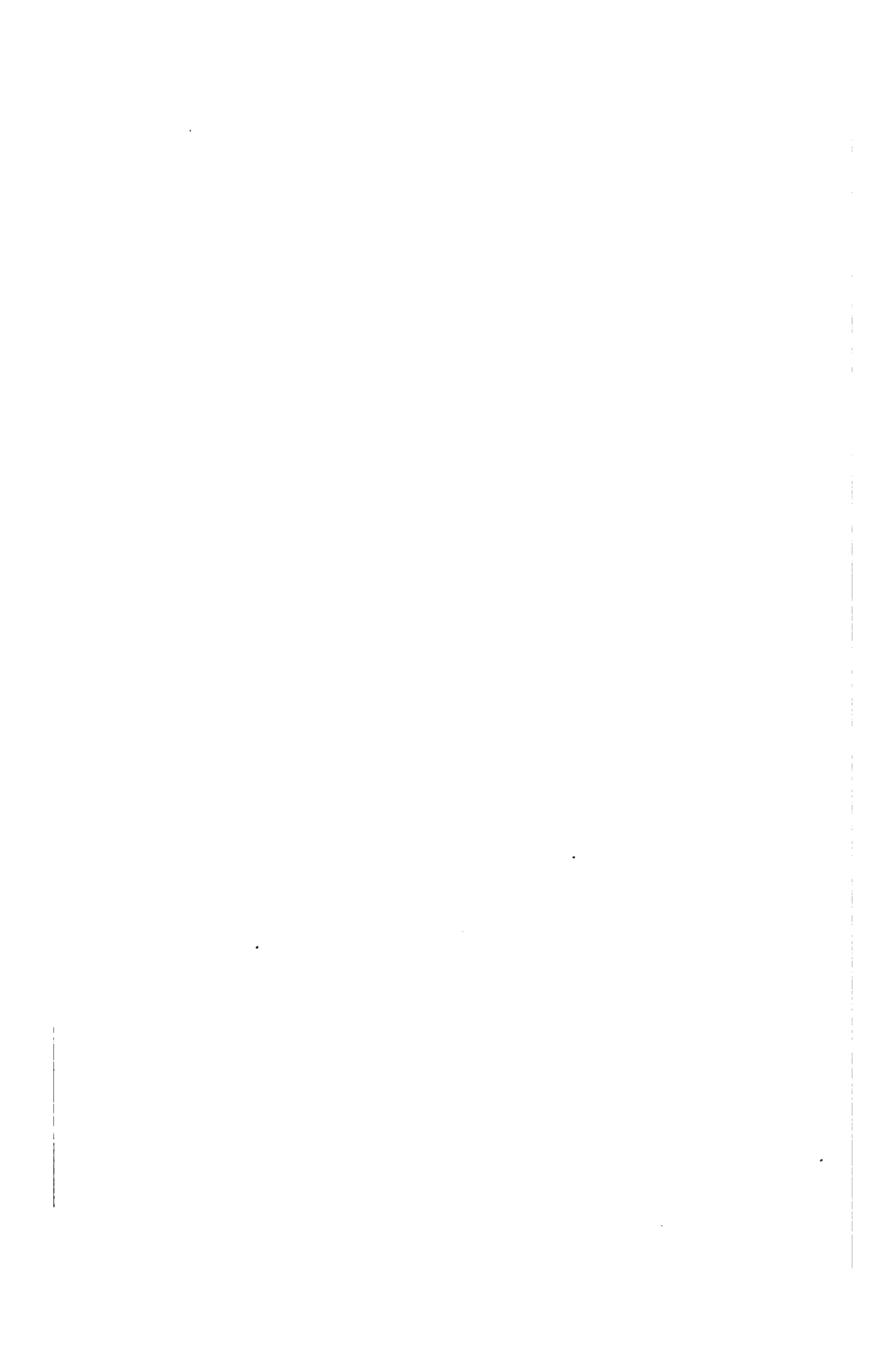
18) Man begegnet häufig Reliefdarstellungen, welchen scheinbar die Annahme paralleler Sehstrahlen zu Grunde gelegen hat. Selten macht man jedoch die Wahrnehmung, dass der Künstler sich über die Grundsätze voll-

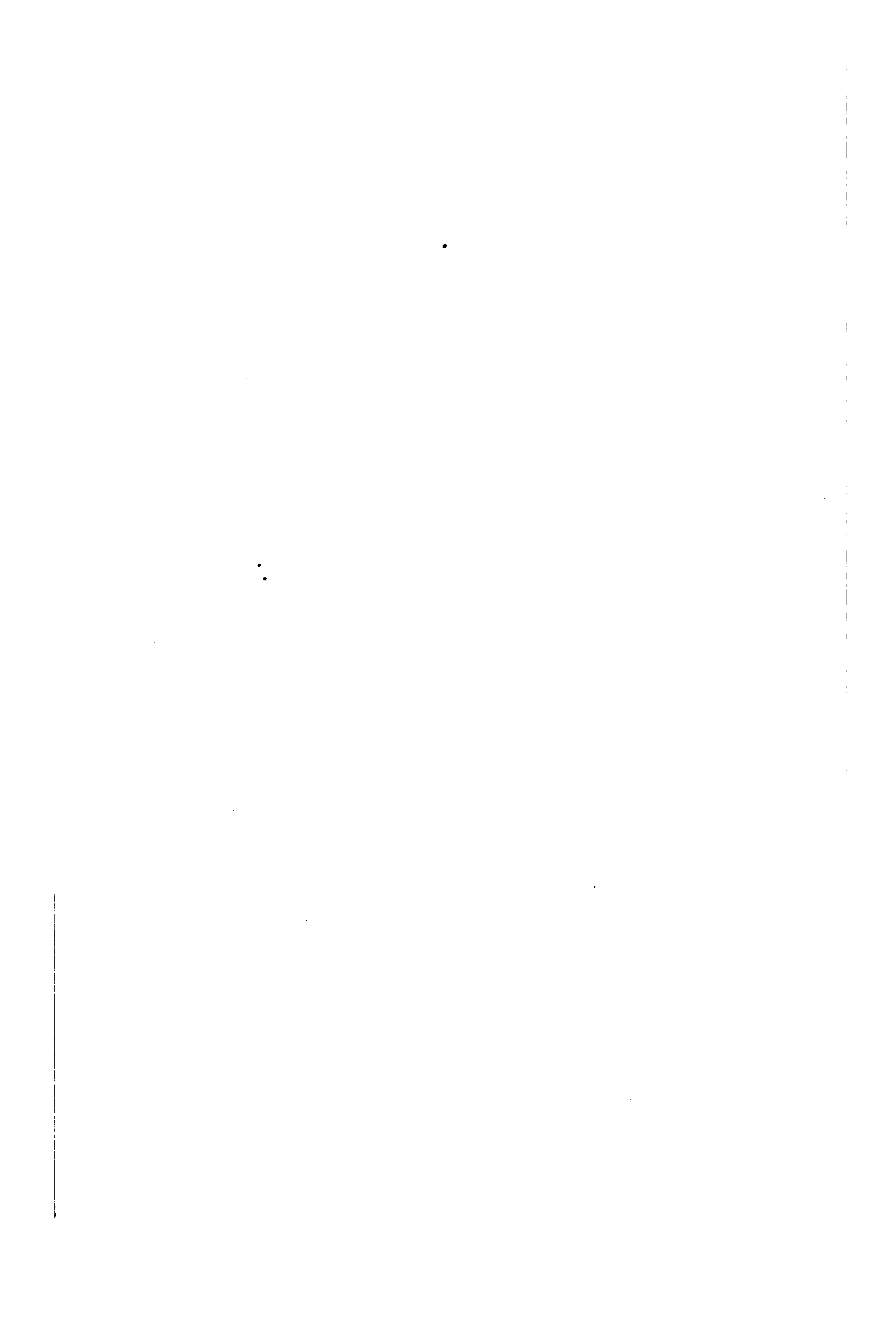
ständig klar ist, nach welchen dieselben gebildet sein müssen. So z. B. findet man vielfach bei den Reliefdarstellungen runder Vasen die horizontalen Kreise durch ebenfalls horizontal liegende Ellipsen dargestellt; nur beim Sockel pflegt der Künstler dann plötzlich abzuweichen und die Kreise an dem letzteren durch sehr schräg liegende Ellipsen abzubilden u. s. f.

Noch mag erwähnt werden, dass Portraits, welche im Relief dargestellt sind, meistens den Eindruck machen, als habe denselben die Annahme paralleler Sehstrahlen zu Grunde gelegen. Dass hier von Konstruktion keine Rede mehr sein kann, ist selbstverständlich. Dennoch wird man beim aufmerksamen Betrachten die Wahrnehmung machen, als habe der Künstler nur die senkrecht zur Frontebene stehenden Dimensionen entsprechend verkleinert, während die mit der Frontfläche parallelen Dimensionen unverändert geblieben sind.

Reliefs, welche eine bedeutende Längenausdehnung besitzen, wie z. B. die auf fortlaufenden Friesen vorkommenden Darstellungen, können nicht unter Voraussetzung eines Augenpunktes hergestellt werden. Häufig wird ja auch der Fries zur künstlerischen Darstellung einer Reihe von aufeinanderfolgenden, zeitlich oder räumlich getrennten Ereignissen benutzt. Hiernach würde jede Gruppe ihren eigenen Augenpunkt erfordern; oder man müsste, was einem solchen Fries einen einheitlicheren Charakter verleihen würde, parallele Sehstrahlen annehmen. Es würde nicht notwendig sein, die letzteren senkrecht zur Frontfläche anzunehmen, besonders dann nicht, wenn das Relief sich hoch über dem Beschauer befindet.

Druck von Grimme & Trömel in Leipzig.





Lehrbuch

der

Darstellenden Geometrie

von

J. SCHLOTKE,

Oberlehrer der allgemeinen Gewerbeschule in Hamburg.

IV. Teil.

Projektivische Geometrie.

Mit 223 Figuren.

Dresden,

Verlag von Gerhard Kühtmann.

1896.

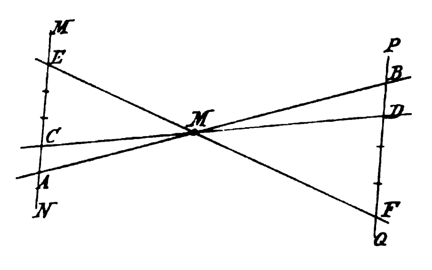
Vorwort.

Der vierte und letzte Teil des vorliegenden Werkes enthält die Kollineationen ebener und räumlicher Gebilde, ferner die Elemente der projektivischen Geometrie und zum Schluss eine Reihe von Anwendungen des Princips der reciproken Radien. Nützlich ist auch beim Studium dieser Teile der neueren Geometrie die graphische Darstellung der Lösung und wir empfehlen deshalb dem Anfänger dringend die von früher bekannte Darstellungsweise durch Grundriss und Aufriss, wo sie angebracht ist, auszuführen.

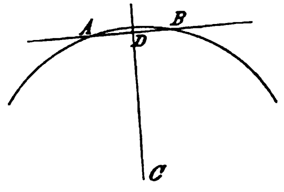
Es wird nicht unzweckmässig sein, darauf aufmerksam zu machen, dass der Zeichner gerade in diesem Teile der darstellenden Geometrie häufiger gewissen Schwierigkeiten bei der Ausführung der Zeichnungen begegnet, die darin bestehen, dass zu bestimmende Punkte, welche sich ja stets als Durchschnitte von Geraden oder Kreisen ergeben, undeutlich werden, sobald die Bestimmungsstücke unter sehr spitzem Winkel zusammentreffen.

Wie man in derartigen Fällen genauere Resultate erzielen kann, mögen folgende Beispiele zeigen.

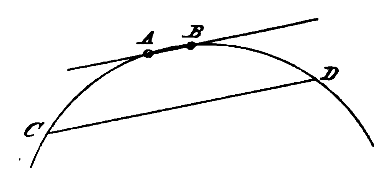
a. Um den Durchschnittspunkt zweier unter sehr spitzem Winkel zusammentreffenden Geraden AB und CD, welcher in der Zeichnung undeutlich erscheint, schärfer zu bestimmen, ziehen wir zwei parallele Geraden MN und PQ am zweckmässigsten zu beiden Seiten des Durchschnittes; tragen nun den Abschnitt AC mehremale, z. B. dreimal nach CE, und BD ebenso dreimal nach DF, dann geht die Gerade EF ebenfalls durch den gesuchten Punkt M.



b. Durch einen gegebenen Punkt A auf dem Umfang eines Kreises ist eine Sekante AB gezogen, welche vom Kreis einen sehr kleinen Bogen abschneidet. In diesem Falle erscheint der zweite Schnittpunkt B nicht scharf genug bestimmt. Um die Lage desselben genauer zu bezeichnen, fällen wir vom Mittelpunkt C des Kreises die Senkrechte CD auf AB und machen BD = AD, dann ist B der gesuchte Punkt.

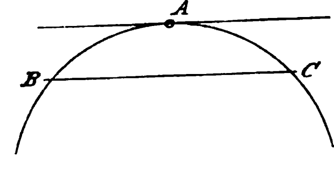


c. Die Verbindungslinie zweier nahe bei einander liegenden Punkte A und B eines Kreises soll verlängert werden.

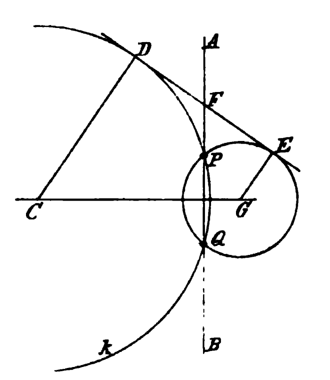


Wir machen $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ und ziehen die Sehne CD, welche mit AB parallel ist. Dadurch, dass man durch A oder B eine Parallele zu der längeren Sehne CD zieht, wird nun die Verlängerung von AB sicherer bestimmt.

Dasselbe Verfahren ist anwendbar, wenn zu einer sehr kurzen durch ihre Endpunkte gegebenen Sehne eine Parallele zu ziehen ist.

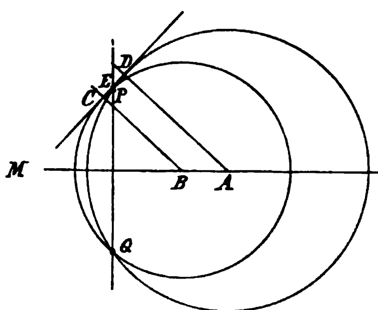


Soll man durch A eine Tangente ziehen, so mache man $\widehat{AB} = \widehat{AC}$, dann ist die gesuchte Tangente der Sehne BC parallel. Diese Konstruktion ist nützlich, wenn der Mittelpunkt des Kreises nicht zugänglich ist.



d. Die Durchschnittspunkte einer Geraden AB mit einem Kreise k näher zu bestimmen, wenn beide unter sehr spitzem Winkel zusammentreffen.

Man ziehe eine Tangente DE an k und trage die Strecke vom Berührungspunkt D bis zum Schnittpunkt F nach EF und ziehe EG $\perp$ DE. Zeichnet man um G als Mittelpunkt mit dem Halbmesser EG einen Kreis, so geht derselbe durch die gesuchten Schnittpunkte P und Q. Es ist nämlich AB die Chordale der beiden sich schneidenden Kreise.



e. Die Schnittpunkte zweier Kreise k_1 und k_2 zu finden, welche unter sehr spitzem Winkel zusammentreffen.

Wir bestimmen die Berührungspunkte C und D der gemeinschaftlichen Tangente beider Kreise. Durch die Mitte E zwischen C und D geht die Chordale der Kreise, durch diese werden die gesuchten Schnittpunkte P und Q genauer bestimmt. Erscheinen dieselben auch hierdurch noch nicht deutlich genug, so kann man noch das in d) gezeigte Verfahren anwenden.

Inhalt.

I. Abschnitt.

A. Kollineation ebener Gebilde.

1) Es sei ABCDE (Fig. 1) ein Vieleck und MN eine Gerade, welche beide in der ersten Projektionsebene liegen. Wir wollen das Vieleck um die zur Achse OX senkrecht stehende Gerade MN drehen, und nach der Drehung um einen gegebenen Winkel α die Projektion des Vielecks auf der ersten Projektionsebene bestimmen.

Ist $XMB_2 = \alpha$ der Drehungswinkel, so finden wir (nach III, 39, I. Teil) $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ als Projektion der neuen Lage des Vielecks. Verlängern wir nun die Seite AB, bis dieselbe MN in K schneidet, so wird K während der Drehung an der Stelle bleiben. Folglich muss die Seite AB sowohl als auch ihre Projektion $A_1 B_1$ verlängert durch K gehen. Das Gleiche gilt für jede andere Seite und deren Projektion nach der Drehung. Die beiden Vielecke ABCDE und $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ haben daher die Eigentümlichkeit, dass die Ecken paarweise auf parallelen Geraden liegen und die Seiten der beiden Figuren sich paarweise in Punkten schneiden, welche auf derselben Geraden liegen.

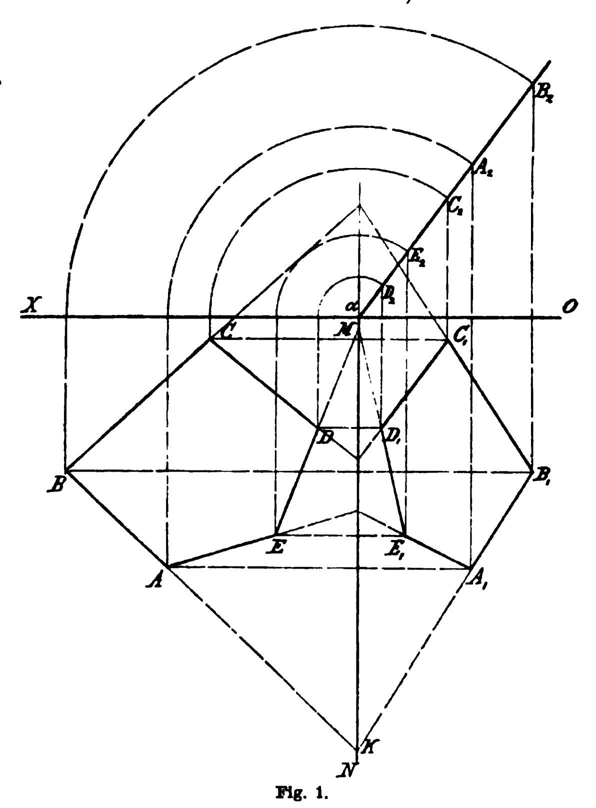


Fig. 1.

Diese Betrachtung führt leicht zur Lösung der folgenden Aufgabe: Die in der Zeichenfläche liegende Figur ABCDE (Fig. 2) soll um eine ebenfalls in P liegende Gerade MN gedreht werden. Man soll die Projektion der gedrehten Figur zeichnen, wenn die Lage der Projektion A_1 eines Eckpunktes nach der Drehung gegeben ist.

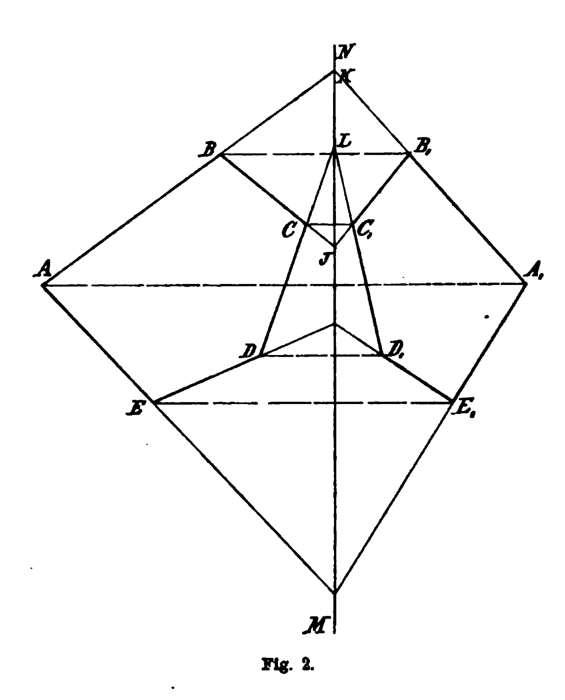


Fig. 2.

Aufl. Da die Ebene des Kreises, welchen A bei der Drehung beschreibt, senkrecht zu MN, also auch senkrecht zu P steht, so ist die Gerade AA_1 senkrecht zu MN, und die gesuchten Projektionen aller übrigen Ecken liegen auf Geraden, welche durch B, C . . gehen und parallel zu AA_1 sind. Wir verlängern nun AB bis zum Durchschnitt K mit MN, dann ist nach dem vorigen A_1K die Projektion der Geraden AK nach der Drehung. Hierdurch ergiebt sich der Punkt B_1. Verlängern wir ebenso BC bis J, dann liegt auf B_1J die Projektion C_1 des Punktes C nach der Drehung u. s. f. Es ist bemerkenswert, dass zu dieser Lösung weder eine zweite Projektion noch der Drehungswinkel unmittelbar benutzt werden.

2) Dieselbe Beziehung zwischen zwei Vielecken erhalten wir aus einer anderen Aufgabe der elementaren darstellenden Geometrie. Es seien Q_1 und Q_2 die beiden Projektionen eines Primas (Fig. 3), welches mit der Grundfläche ABCDE auf der ersten Projektionsebene steht. MN und RN seien die Spuren einer zur zweiten Projektionsebene senkrechten Ebene,

so dass MN ⊥ OX. $A_1B_1C_1D_1E_1$ sei die auf bekannte Weise ermittelte erste Projektion des Durchschnittes. Denken wir uns die Seitenfläche ABB_1A_1 erweitert, dann trifft sie MN in einem Punkte L, durch welchen auch AB und A_1B_1 gehen. Es sind nämlich MN, AB und A_1B_1 die Durchschnittslinien von drei Ebenen, welche nach einem bekannten Satze der

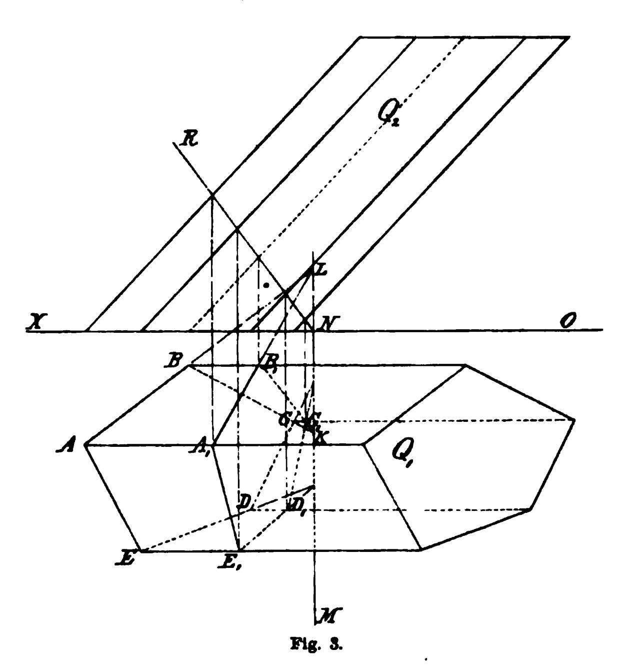


Fig. 3.

Stereometrie in einem Punkte zusammentreffen. Ebenso schneiden sich BC und B_1C_1 in einem Punkte K der Spur MN u. s. f. Wir sehen also, dass die Grundfläche ABCDE und die Projektion $A_1B_1C_1D_1E_1$ eines ebenen Schnittes des Prismas dieselbe wie in 1) gefundene Beziehung zu einander haben, nur dass der letzte Fall sich auch auf eine beliebige Richtung der parallelen Geraden AA_1, BB_1 u. s. f. gegen die Gerade MN anwenden lässt.

Man löse hiernach die Aufgabe: Die Projektion $A_1B_1C_1D_1E_1$ des Durchschnittes einer Ebene, deren erste Spur MN gegeben ist, mit dem Prisma zu finden, wenn ein Punkt z. B. A_1 der Projektion schon bekannt ist.

3) Den allgemeinsten Fall, welcher die beiden vorigen als besondere Fälle einschliesst, erhalten wir aus der folgenden Aufgabe der darstellenden Geometrie:

Den Durchschnitt einer Ebene mit einer Pyramide zu finden (Fig. 4). Wir nehmen der Einfachheit wegen an, dass die Pyramide dreiseitig ist und ihre Grundfläche ABC in der ersten Projektionsebene liegt. ML sei die erste Spur der Schnittebene. Auch in diesem Falle müssen zwei zwischen

denselben Kanten der Pyramide liegende Seiten der Grundfläche und des gesuchten Schnittes, z. B. AB und A_1B_1 in einem Punkte K der Spur zusammentreffen. Es sind nämlich AB, A_1B_1 und die Spur ML die Durchschnittslinien von drei Ebenen. Dasselbe gilt für die anderen Seitenpaare der beiden Dreiecke. Man sieht, dass man die in 1) und 2) gefundenen Be-

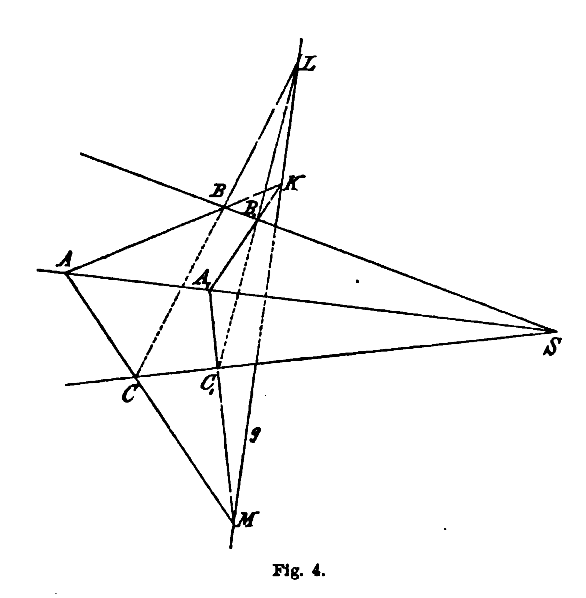


Fig. 4.

ziehungen erhält, wenn in Fig. 4 die Spitze S in unendliche Entfernung verlegt wird.

Hieraus ergiebt sich nun der wichtige Satz:

4) Liegen die Ecken zweier in derselben Ebene enthaltenen Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ auf drei Strahlen, welche durch einen Punkt gehen, so treffen sich je zwei zwischen denselben Strahlen liegende Dreiecksseiten, wie z. B. AB und A_1B_1 u. s. f. in Punkten ein und derselben Geraden ML. Man kann nämlich zwei solche Dreiecke stets als die Projektionen zweier ebenen Schnitte eines pyramidalen Raumes ansehen, für welche der Satz oben bewiesen ist.

5) Wenn zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ (Fig. 4) in einer Ebene eine solche Lage haben, dass die Paare der Seiten AB, A_1B_1, BC, B_1C_1, AC, A_1C_1 in drei Punkten K, L, M derselben Geraden g zusammentreffen, so gehen die Verbindungslinien der Punkte A und A_1, B und B_1, C und C_1 durch einen Punkt S. Man kann nämlich ABC und $A_1B_1C_1$ als die Projektionen zweier in verschiedenen Ebenen liegenden Dreiecke und g als die Projektion der Schnittlinie beider Ebenen ansehen. Da nun AB und A_1B_1 sich in K treffen, ebenso BC und B_1C_1 in L, AC und A_1C_1 in M, so kann

man durch je eines der Paare der Dreiecksseiten eine Ebene legen. Die drei auf solche Weise erhaltenen Ebenen bilden aber die Seitenflächen eines dreiseitigen pyramidalen Raumes und die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 sind die Projektionen der Kanten desselben. Folglich treffen sich diese Geraden in einem Punkte S, welcher die Projektion der Spitze des pyramidalen Raumes darstellt.

6) Die in 4) und 5) gefundenen Sätze gelten nicht ohne weiteres für zwei beliebige Vielecke, deren Ecken auf Strahlen liegen, welche durch einen Punkt gehen. Sind aber diese Vielecke ABCDE, $A_1B_1C_1D_1E_1$ (Fig. 5) die Projektionen zweier ebenen Schnitte eines pyramidalen Raumes, dann treffen sich die entsprechenden Paare der Seiten der Vielecke wieder in Punkten, welche auf der Projektion der Schnittlinie MN der beiden Ebenen liegen.

Werden zwei Seitenflächen des pyramidalen Raumes erweitert, z. B. diejenigen, deren Projektionen die Dreiecke AES und BCS sind, so treffen sich dieselben in einer Geraden, deren Projektion FS durch den Schnittpunkt F der Seiten BC und AE sowohl, als auch durch den Schnittpunkt F_1 von B_1C_1 und A_1E_1 und durch S geht. Dasselbe gilt für je zwei andere entsprechende Seitenpaare.

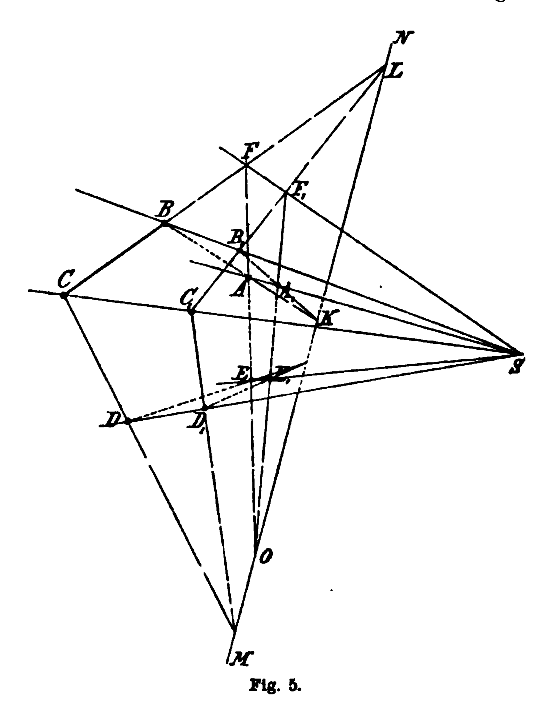


Fig. 5.

7) Wenn die Eckpunkte zweier in derselben Ebene liegenden Vielecke ABCDE und $A_1B_1C_1D_1E_1$ (Fig. 5) paarweise auf Strahlen liegen, welche durch einen festen Punkt gehen, so sollen dieselben einander entsprechende Figuren genannt werden. Je zwei auf demselben Strahle liegende Eckpunkte wie A und A_1 oder B und B_1 . . . heissen einander entsprechende Punkte; je zwei Seiten, welche zwischen denselben Strahlen liegen, wie z. B. AB und A_1B_1 werden entsprechende Seiten der Figuren genannt.

8) Liegen bei zwei einander entsprechenden Figuren die Schnittpunkte je zweier Seiten der einen mit den Schnittpunkten der ihnen entsprechenden Seiten der anderen Figur auf Strahlen, welche durch einen Punkt S gehen,

so schneiden sich alle Paare entsprechender Geraden in Punkten, welche auf einer Geraden liegen.

Umgekehrt:

Wenn die Durchschnittspunkte von je zwei entsprechenden Geraden zweier entsprechenden Figuren auf einer Geraden liegen, so gehen die Verbindungslinien von je zwei entsprechenden Punkten durch einen festen Punkt.

Zum Beweise des ersten Satzes betrachten wir drei Seiten AB, BC und AE der einen Figur und die entsprechenden Seiten A_1B_1, B_1C_1, A_1E_1 der anderen Figur. Nach Voraussetzung liegen die Ecken der von diesen Geraden gebildeten beiden Dreiecke ABF und $A_1B_1F_1$ auf drei Strahlen, welche durch einen Punkt S gehen; folglich schneiden sich die entsprechenden Seitenpaare AB, A_1B_1, BC, B_1C_1, AE, A_1E_1 in drei Punkten K bez. L und O, welche auf einer Geraden MN liegen. Ebenso bilden die Paare der entsprechenden Seiten AB, BC, CD und A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 zwei entsprechende Dreiecke; die Schnittpunkte je zwei entsprechender Seiten liegen deshalb wieder auf einer Geraden, welche aber mit MN zusammenfällt, weil sie zwei Punkte, nämlich den Schnittpunkt von AB und A_1B_1 und denjenigen von BC und B_1C_1 mit MN gemeinschaftllch hat u. s. f.

Der Beweis des zweiten Satzes ergiebt sich leicht mlt Hülfe von 5).

9) Zwei Figuren, welche die in 8) angegebenen Eigenschaften haben, werden **kollineare Figuren** genannt. Die Gerade, auf welcher je zwei entsprechende Seiten solcher Figuren zusammentreffen, heisst die Kollineationsachse und der feste Punkt, durch welchen die Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen, wird das Kollineationscentrum genannt. Aus 6) folgt nun, dass man kollineare Figuren stets als die Projektionen von ebenen Schnitten eines pyramidalen Raumes (oder wenn das Projektionscentrum unendlich fern liegt, als Schnitte eines prismatischen Raumes) ansehen kann. Wir wollen nun weiter noch zeigen, dass die in einer Ebene liegenden Projektionen derselben ebenen Figur aus zwei verschiedenen Mittelpunkten ebenfalls kollinear sind.

Es sei ABCD (Fig. 6) eine in der Ebene E_1 liegende Figur, welche von den beiden Punkten S_1 und S_2 aus auf eine andere Ebene E projiciert werden soll. Die Schnittlinie der beiden Ebenen sei MN und die durch S_1 und S_2 gehende Gerade treffe E und E_1 in den Punkten S bez. S′. Ziehen wir die projicierenden Strahlen S_1A und S_2A, so kann durch diese eine Ebene gelegt werden, welche E_1 in S′A schneidet. Verlängern wir letztere, bis sie MN in α trifft, so ist $S\alpha$ die Schnittlinie der durch S_1A und S_2A gelegten Ebene mit E. $S\alpha$ wird nun von den projicierenden Strahlen in A_1 und A_2 getroffen, folglich sind diese Punkte die Projektionen von A auf E. In gleicher Weise ergeben sich B_1 und B_2 als Projektionen

von B u. s. f. Hieraus ergiebt sich, dass die beiden Projektionen $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$ zunächst die Eigenschaft haben, dass die Punkte A_1 und A_2, ferner B_1 und B_2 u. s. f. auf Strahlen liegen, welche durch einen festen Punkt S gehen. Ferner schneidet die Ebene S_1AB die Ebenen E_1 und E

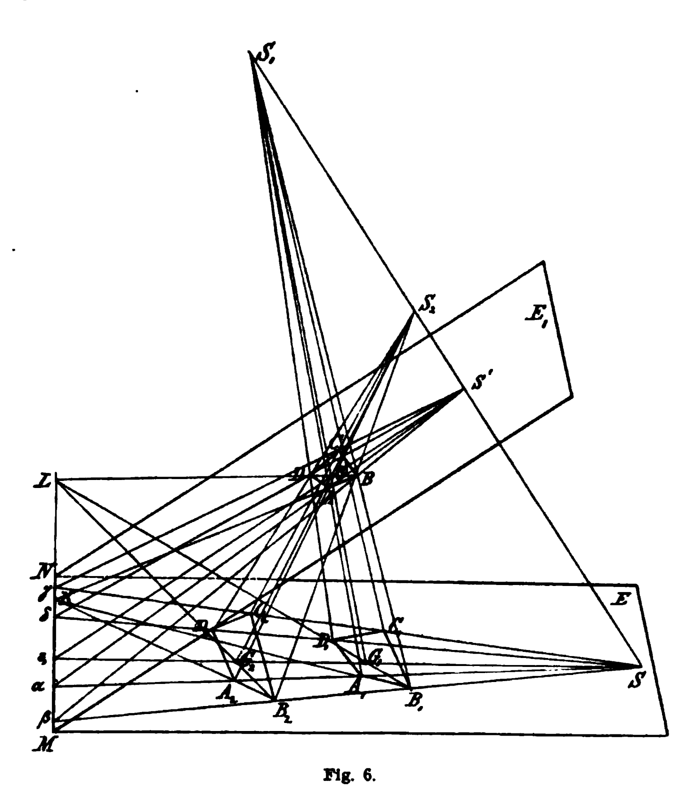


Fig. 6.

in den Geraden AB bez. A_1B_1, welche in einem Punkte K auf MN zusammentreffen. Ebenso müssen AB und A_2B_2 als Durchschnittslinien der Ebene S_2AB mit E_1 und E auf MN sich schneiden, und dies kann wiederum nur in K geschehen. Folglich treffen auch A_1B_1 und A_2B_2 in dem Punkte K der Geraden MN zusammen. Da dasselbe für je zwei andere entsprechende Seiten der beiden Projektionen nachgewiesen werden kann, so folgt hieraus, dass $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$ kollinear sind.

Betrachten wir einen beliebigen Punkt G_1 der Ebene E, welcher nicht auf einer Seite der Figur $A_1B_1C_1D_1$ liegt, dennoch als zu dieser gehörig, so können wir leicht den G_1 entsprechenden Punkt G_2 der Figur $A_2B_2C_2D_2$ bestimmen. Wir projicieren G_1 von S_1 aus auf E_1. Durch den Strahl G_1S_1 und durch S_1S_2 legen wir eine Ebene, welche E in der durch G_1 gehenden Geraden $S\xi$ und die Ebene E_1 in $S'\xi$ schneidet. Folglich trifft

G_1S_1 die Ebene E_1 in dem auf $S'\xi$ liegenden Punkte G, der Projektion des Punktes G_1. Durch S_2 ziehen wir nun den Strahl S_2G; derselbe trifft in G_2 (auf $S\xi$) die Ebene E. Dann ist G_2 der dem G_1 entsprechende Punkt. Verbinden wir G_1 und G_2 mit zwei entsprechenden Eckpunkten z. B. mit B_1 bez. B_2, so treffen auch diese Geraden aus gleichen Gründen wie oben in demselben Punkte L der Geraden MN zusammen.

10) Wir haben in dem Vorhergehenden absichtlich durch Beispiele aus der elementaren darstellenden Geometrie den Begriff der Kollineation von Figuren, welche in einer Ebene liegen, deutlich zu machen gesucht und können jetzt folgende allgemeinste Erklärung aufstellen:

Zwei Systeme von geraden Linien und Punkten, welche in derselben Ebene liegen und einander derart entsprechen, dass in derselben Reihenfolge die Punkte des einen mit den Punkten des anderen, und die Schnittpunkte je zweier Geraden des einen mit den Schnittpunkten je zweier Geraden des anderen auf Strahlen liegen, welche durch einen festen Punkt gehen, sind kollinear. Entsprechende Geraden beider Systeme (d. h. die Verbindungslinien zweier Punkte des einen und diejenige der entsprechenden Punkte des anderen Systems) treffen sich auf einer festen Geraden, der Kollineationsachse. Ist deshalb eine Gerade des einen Systems parallel zu dieser Achse, so ist dasselbe mit der entsprechenden Geraden des anderen Systems der Fall.

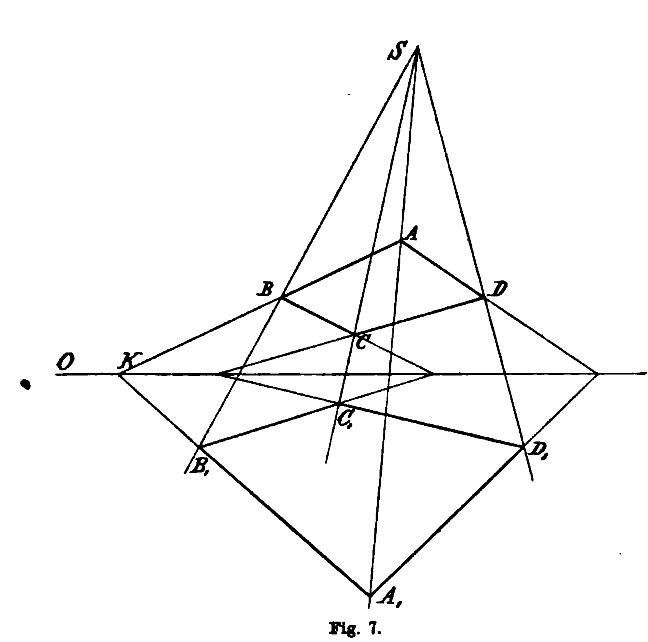


Fig. 7.

Aufgaben.

11) Gegeben das Kollineationscentrum S (Fig. 7), die Kollineationsachse O, das Viereck ABCD und ein Punkt A_1, welcher auf dem Strahle AS liegt. Man soll die zu ABCD kollineare Figur konstruieren, wenn A_1 der dem Punkte A entsprechende Punkt der neuen Figur ist.

Wir verlängern AB bis zum Durchschnitt K mit der Achse O und ziehen die Gerade A_1K. Dann sind AK und A_1K entsprechende Geraden. Der Strahl, welcher von

S durch B gezogen wird, schneidet A_1K in B_1, welcher dem Punkte B entspricht u. s. f.

Schneidet die gegebene Figur die Achse O, so gehören die Schnittpunkte auch der kollinearen Figur an (s. Fig. 8), in welcher ABC und $A_1B_1C_1$ kollineare Dreiecke sind; die letzteren werden von der Achse O in den beiden gemeinschaftlichen Punkten D und E geschnitten. Man sieht leicht, wie $A_1B_1C_1$ aus ABC gefunden wird, wenn ein Eckpunkt z. B. A_1 des gesuchten Dreiecks gegeben ist.

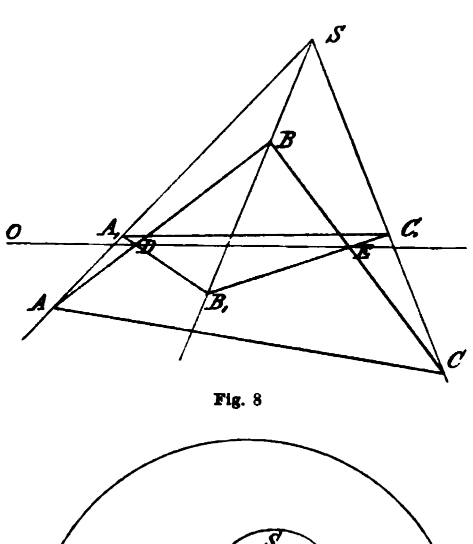


Fig. 8

12) Die kollineare Figur zu einem gegebenen Kreise zu finden, wenn das Kollineationscentrum, die Achse und ein Paar entsprechender Punkte z. B. A und A_1 gegeben sind (Fig. 9).

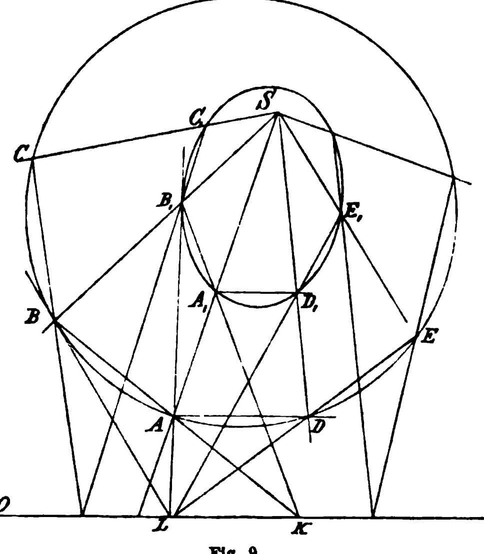


Fig. 9.

Wir ziehen durch A eine beliebige Sekante AB und verlängern dieselbe bis zum Durchschnitt K mit der Achse O. Die AK entsprechende Gerade des anderen Systems ist A_1K und diese wird von dem Strahle SB in dem B entsprechenden Punkte B_1 getroffen. Das Paar B und B_1 kann man nun in gleicher Weise zur Bestimmung eines neuen Punktes C_1 der kollinearen Figur benutzen. Zieht man durch A die Gerade AD parallel zur Achse O, so geht die entsprechende Gerade A_1D_1 durch A_1 und dieselbe ist ebenfalls parallel zu O, weil sie mit AD auf O in dem unendlichen fernen Punkte zusammentreffen muss.

Wird der Strahl AS um S gedreht, so nähern sich A und A_1 mehr und mehr den Punkten B bez. B_1, während der Schnittpunkt K der beiden Geraden AB und A_1B_1 sich stets auf der Kollineationsachse bewegt. Beim

Zusammenfallen von A mit B und A_1 mit B_1 gehen diese Geraden in die Tangenten BL und B_1L über; d. h. die Tangenten in entsprechenden Punkten der beiden kollinearen Kurven treffen sich ebenfalls in einem Punkte der Kollineationsachse. Die kollineare Figur zu einer Kurve lässt sich nur punktweise konstruieren. Kann man für irgend einen Punkt der gegebenen Kurve die Tangente bestimmen, so kann man dieselbe auch durch Kollineation auf die entsprechende Kurve übertragen.

Man erkennt hieraus leicht, wie man auch die kollineare Kurve des Kreises als Einhüllende ihrer Tangenten konstruieren kann. Man ziehe durch A die Tangente AK an den gegebenen Kreis (Fig. 10) und verbinde den Punkt K, in welchem sie die Achse O schneidet, mit A_1, dann ist A_1K eine Tangente der gesuchten Kurve. BL sei eine zweite Tangente des Kreises, welche AK in N trifft. Durch den Strahl SN erhält man auf A_1K den N entsprechenden Punkt N_1 und LN_1 ist dann die BL entsprechende Tangente, deren Berührungspunkt B_1 auch durch den Strahl BS leicht gefunden wird. Hiernach ist in Fig. 10 die gesuchte kollineare Figur des Kreises durch eine Reihe von Tangenten anschaulich gemacht.

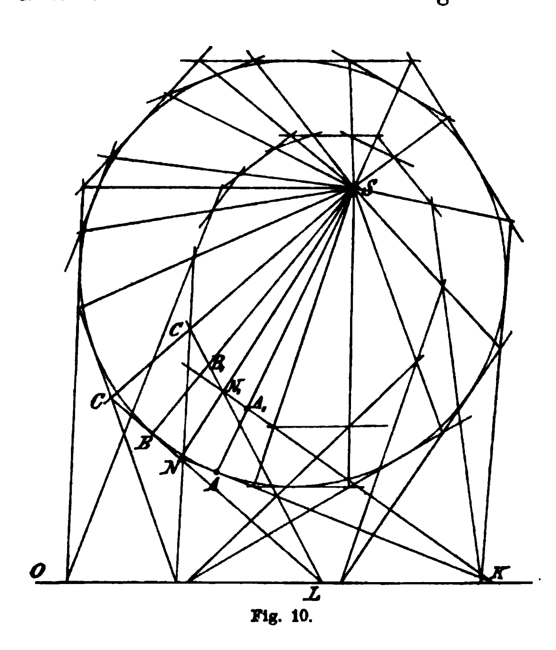


Fig. 10.

Der mit den Elementen der darstellenden Geometrie Vertraute wird in beiden Fällen leicht wieder die Übereinstimmung der oben angegebenen Konstruktion mit derjenigen des Durchschnittes einer Ebene mit einem Kegel erkennen. Der gegebene Kreis stellt die in der ersten Projektionsebene liegende Grundfläche, S die Projektion der Spitze des Kegels und O die erste Spur der Schnittebene dar. In den Figuren 9 und 10 ist deshalb die kollineare Figur des Kreises eine Ellipse.

Fluchtpunkte. Fluchtlinien.

13) Es seien AB und AB′ zwei entsprechende Geraden, welche sich in dem Punkte A der Achse O treffen (Fig. 11). Zieht man einen beliebigen Strahl durch das Kollineationscentrum S, so schneidet derselbe die beiden

Geraden in zwei entsprechenden Punkten C und C′. Derjenige Strahl, welcher parallel zu AB durch S gezogen wird, trifft AB′ in dem Punkte F′, welcher dem unendlich fernen Punkte der Geraden AB entspricht. Sind nun CD und C′D zwei andere entsprechende Geraden der beiden kollinearen Systeme und ist SG′ der Parallelstrahl zu CD, so trifft dieser C′D in dem Punkte G′. Der letztere entspricht dem unendlich fernen Punkte G der Geraden CD. Legt man nun durch die beiden Punkte F′ und G′ die Gerade i′, so ist dieselbe parallel zur Achse O. Denn die Ecken der Dreiecke ACD und F′SG′ liegen auf Geraden, welche durch einen Punkt C′ gehen, folglich schneiden sich die Paare entsprechender Seiten in Punkten einer Geraden. Weil aber zwei Seitenpaare dieser Dreiecke parallel sind, so liegt jene Gerade unendlich fern, folglich liegt auch der Schnittpunkt des dritten Seitenpaares (AD und F′G′) unendlich fern, d. h. die Geraden sind parallel.

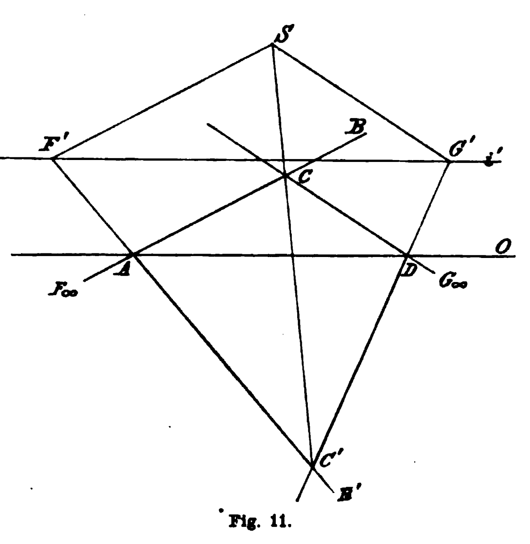


Fig. 11.

Die Gerade i′ ist demnach der Ort derjenigen Punkte des zweiten Systems, welche den unendlich fernen Punkten aller Geraden des ersten Systems entsprechen. Man nennt dieselbe die **Fluchtlinie** des zweiten Systems, F′ und G′ werden die Fluchtpunkte der Geraden AC′ bez. C′D genannt. Da bei der Kollineation einer Geraden des einen Systems wieder eine Gerade im anderen Systeme entspricht, so kann man auch die Annahme machen, dass die unendlich fernen Punkte aller Geraden eines Systems auf einer Graden g liegen, welche der Fluchtlinie i′ entspricht. Die Gerade g wird dann die unendlich ferne Gerade des Systems genannt. Sind ebenso die Strahlen SF und SG (Fig. 12) parallel

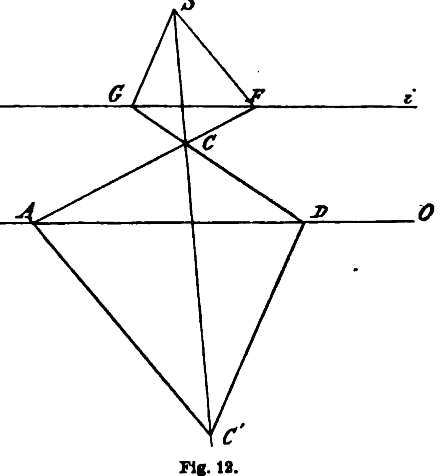


Fig. 12.

zu AC′ bez. C′D, so schneiden dieselben AC bez. CD in den Punkten F und G, welche den unendlich fernen Punkten der Geraden AC′ und C′D entsprechen. Die durch F und G gehende Gerade i ist aus gleichen Gründen wie oben parallel zu O; sie ist die Fluchtlinie des ersten Systems.

14) Man soll zu einem gegebenen Dreiecke ABC das kollineare Dreieck finden, wenn das Kollineationscentrum S, die Achse O und die Fluchtlinie i′ gegeben ist (Fig. 13).

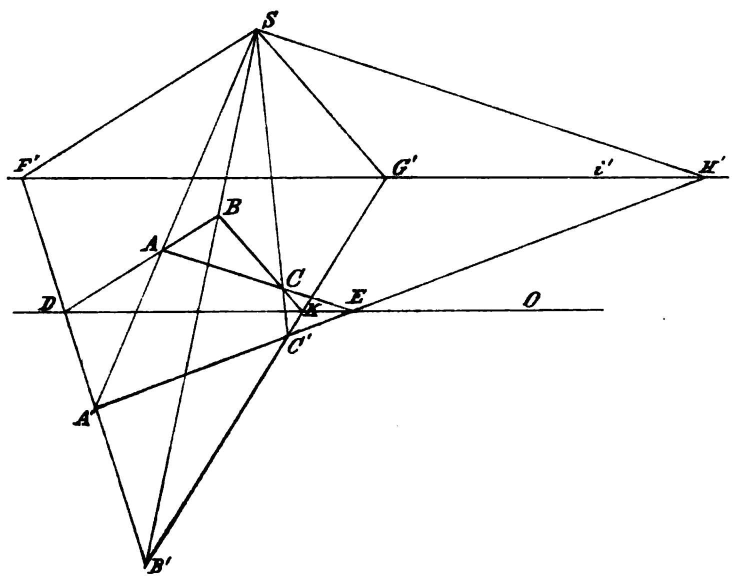


Fig. 13.

Wir verlängern AB bis D und ziehen den Strahl SF′ parallel zu AB bis zum Durchschnitt F′ mit der Fluchtlinie i′. Dann ist die AB entsprechende Gerade der Richtung nach durch F′ und D bestimmt. Ihre Länge ergiebt sich durch die beiden Strahlen SA und SB, welche auf der Verlängerung von F′D die AB entsprechende Strecke A′B′ abschneiden. Ebenso sind B′C′ und A′C′ nach den Punkten G′ und H′ der Fluchtlinie i′ gerichtet, in welchen die zu BC und AC parallelen Strahlen SG′ und SH′ die Fluchtlinie treffen.

Ist dagegen statt i′ die Fluchtlinie i des ersten Systems gegeben, so konstruieren wir die kollineare Figur des Dreiecks ABC auf folgende Weise.

Wir verlängern AB, bis sie i in F schneidet; dann ist SF der Parallelstrahl zu A′B′ (Fig. 14). Da aber A′B′ mit AB in einem Punkte der Achse zusammentreffen muss, so verlängern wir AB bis H und ziehen HL′ parallel zu SF. Die Strahlen SA und SB schneiden auf HL′ die A und B entsprechenden Punkte A′ und B′ ab. Ebenso ziehen wir durch den Punkt J,

in welchem BC die Kollineationsachse trifft, die Gerade JK′ parallel zu SG; hierdurch ergiebt sich die Seite B′C′ und damit auch A′C′, wodurch die Aufgabe gelöst ist.

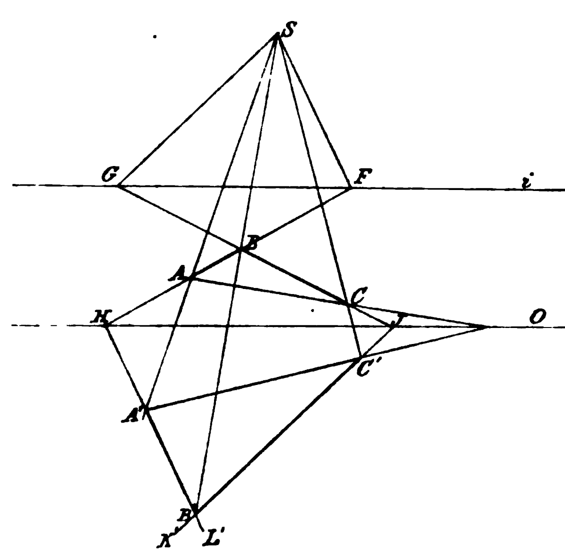


Fig. 14.

Wenn die Fluchtlinie i das gegebene Dreieck ABC schneidet (Fig. 15), dann entsprechen den Schnittpunkten D und E unendlich ferne Punkte der kollinearen Figur. Sind A′, B′, C′ die den Punkten A, B, C entsprechenden Punkte, dann ist A′C′ ∥ SD; B′C′ ∥ SE; A′B′ ∥ SF. Gleichwohl ist nicht das geschlossene Dreieck A′B′C′ die gesuchte kollineare Figur, sondern die von den Seiten A′B′ und den Verlängerungen von A′C′ und B′C′ eingeschlossene unendliche Fläche, welche in Fig. 15 mit I bezeichnet ist, und zwar ist diese entsprechend der Fläche ABED. Dem Teile CDE entspricht die ebenfalls unendliche Fläche II, welche zwischen den Verlängerungen der Seiten A′C′ und B′C′ nach unten liegt. Bewegt sich ein Punkt M innerhalb des Dreiecks ABC aus dem Raum ABED mittelst Überschreitung der Linie DE in den Raum CDE, so wird der entsprechende Punkt von I nach II übergehen, dieser Übergang erfolgt jedoch im Unendlichen, d. h. wenn M die Fluchtlinie DE erreicht, so fällt der entsprechende Punkt in die unendlich ferne Gerade, welche DE entspricht.

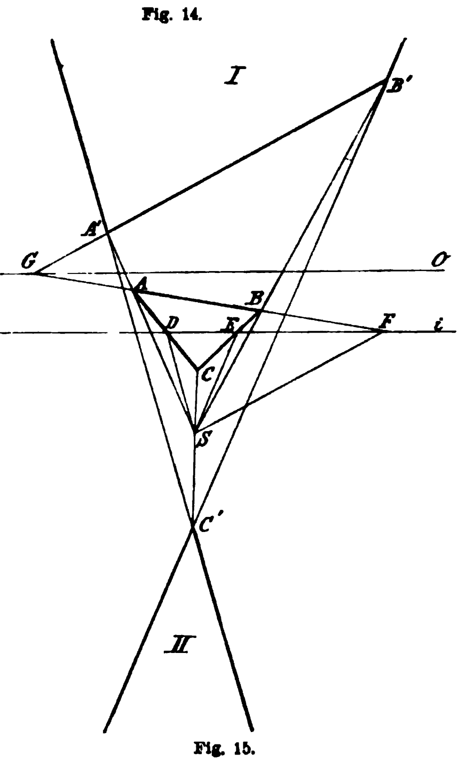


Fig. 15.

15) Es seien i und i' die Fluchtlinien, O die Achse und S das Kollineationscentrum (Fig. 16). Ist AB eine beliebige Gerade des einen Systems, folglich B ihr Fluchtpunkt, dann ist die AB entsprechende Gerade AC' des anderen Systems parallel zu dem Strahl BS. Ferner ist C' der Fluchtpunkt von AC', folglich ist auch AB parallel zum Strahl SC'. Hiernach ist ABSC' ein Parallelogramm, woraus sich noch leicht ergiebt, dass der Abstand einer der Fluchtlinien vom Kollineationscentrum gleich dem Abstand der anderen Fluchtlinie von der Achse O ist.

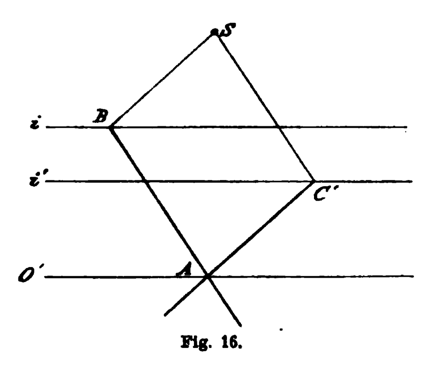


Fig. 16.

Aufgaben.

16) Es sei das Kollineationscentrum S, die Achse O und die Fluchtlinie i' gegeben. Man soll die dem Quadrat ABCD entsprechende Figur zeichnen (Fig. 17).

Wir verlängern AB und CD (welche in Fig. 17 senkrecht zur Achse O angenommen sind), bis sie O in E und G treffen. Ferner ziehen wir durch S einen Strahl parallel zu AB. Derselbe trifft i' in dem Punkte F', welcher dem unendlich fernen Punkte der Geraden AB und CD entspricht. Hiernach ergeben sich EF' und GF' als die AB und CD entsprechenden Geraden. Die den Eckpunkten A, B, C und D entsprechenden Punkte A', B', C' und D' könnte man durch Strahlen von S nach A, B, C und D erhalten. Wir bestimmen dieselben aber besser mit Hülfe der beiden Diagonalen des Quadrats. Die letzteren treffen die Achse O in K bez. H; sind ferner SJ' und SL' parallel zu AC bez. BD, so entsprechen J' und L' den unendlichen fernen Punkten der beiden Diagonalen. Den letzteren entsprechen demnach die Geraden HL' und KJ', wodurch die Eckpunkte A', B', C', D' der gesuchten kollinearen Figur nun bestimmt sind.

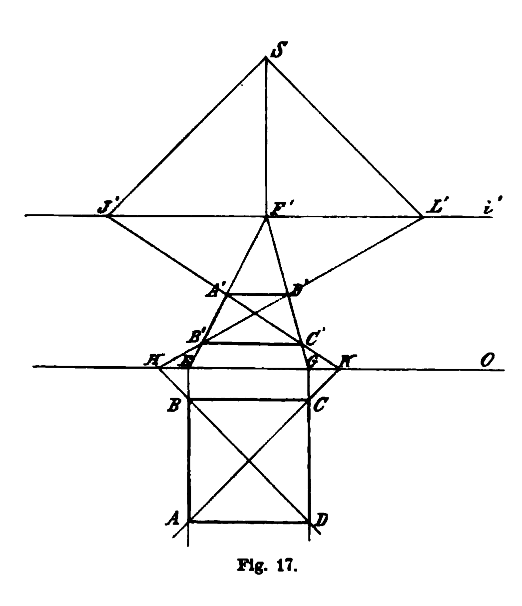


Fig. 17.

Ist statt i′ die Fluchtlinie i gegeben (Figur 18), dann verlängern wir AB und CD bis zu ihren Fluchtpunkten J bez. K. Die AB und CD entsprechenden Geraden A′B′ und C′D′ gehen durch die Schnittpunkte E und G und sind bez. parallel den Strahlen SJ und SK. Verlängern wir ebenso

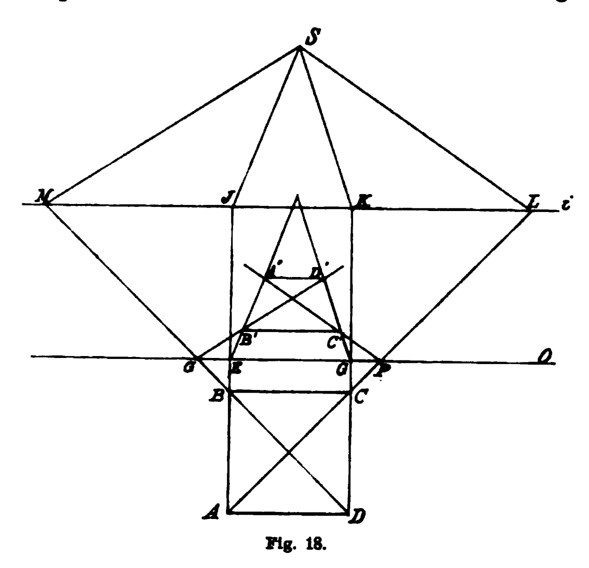


Fig. 18.

AC und BD bis L bez. M, dann ist die AC entsprechende Gerade A′C′ parallel zum Strahle SL und sie trifft mit AC in dem Punkte P auf der Achse O zusammen. Hierdurch ergeben sich die Ecken A′ und C′ u. s. f. Sind AD und BC parallel zur Achse, so ist dasselbe mit den entsprechenden Seiten A′D′ und B′C′ der Fall.

Anmerkung. Man erkennt leicht die Übereinstimmung der in Fig. 17 dargestellten Konstruktion mit derjenigen, nach welcher die Abbildung des Quadrats ABCD in der Linearperspektive hergestellt wird, wenn man voraussetzt, dass F′ der Hauptpunkt, F′S die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche bedeutet, und das abzubildende Quadrat in der Ebene liegt, deren Spur O und Fluchtlinie i′ ist. Noch ist bemerkenswert, dass die zu ABCD kollineare Figur in Figur 17 wie in 18 ohne Benutzung der durch A, B, C und D gehenden Kollineationsstrahlen gefunden ist.

17) Gegeben das Kollineationscentrum S und die beiden Fluchtlinien i und i′. Man soll zu einer gegebenen Figur ABC . . . die kollineare Figur A′B′C′ . . . konstruieren.

18) Die Achse O, eine Fluchtlinie und ein Paar entsprechender Punkte sind gegeben. Man soll zu einer gegebenen Figur ABC . . die kollineare Figur finden.

19) Zu einem gegebenen Kreise P die kollineare Figur zu konstruieren, wenn das Kollineationscentrum S, die Achse O und die der gesuchten Figur zugehörige Fluchtlinie i′ gegeben sind (Fig. 19).

Wir ziehen einen beliebigen Durchmesser AB bis zum Durchschnitt C mit der Achse O und bestimmen durch den zu AB parallelen Strahl SF′ den Fluchtpunkt F′, dann ist CF′ die CA entsprechende Gerade, auf welcher durch die Strahlen AS und BS die den Punkten A und B entsprechenden Punkte A′ und B′ bestimmt werden. Durch MS ergiebt sich auch noch der dem Mittelpunkte M entsprechende Punkt M′. Zieht man einen anderen Durchmesser DE und verlängert denselben bis G, so geht die DE entsprechende Gerade durch G und M′ und die D und E entsprechenden Punkte D′ und E′ liegen auf den Strahlen SD bez. SE u. s. f. Dem zur Achse parallelen Durchmesser HK entspricht eine ebenfalls zur Achse parallele Gerade H′K′, welche durch M′ geht.

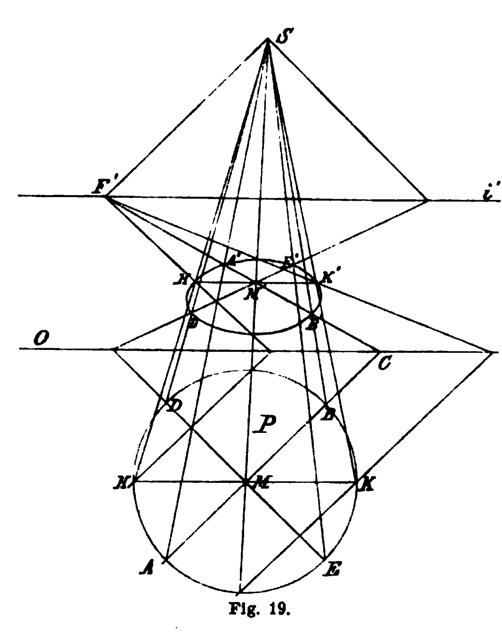


Fig. 19.

Man kann die kollineare Figur auch durch einhüllende Tangenten bestimmen (Fig. 20). Die Seiten AD und BC des dem gegebenen Kreise umbeschriebenen Quadrats ABCD seien parallel zur Achse O. Die dem Quadrat entsprechende Figur wird nach 16 bestimmt. Zieht man die Strahlen SJ′ und SL′ parallel zu den Diagonalen AC bez. BD, dann sind J′ und L′ die Fluchtpunkte der den Diagonalen

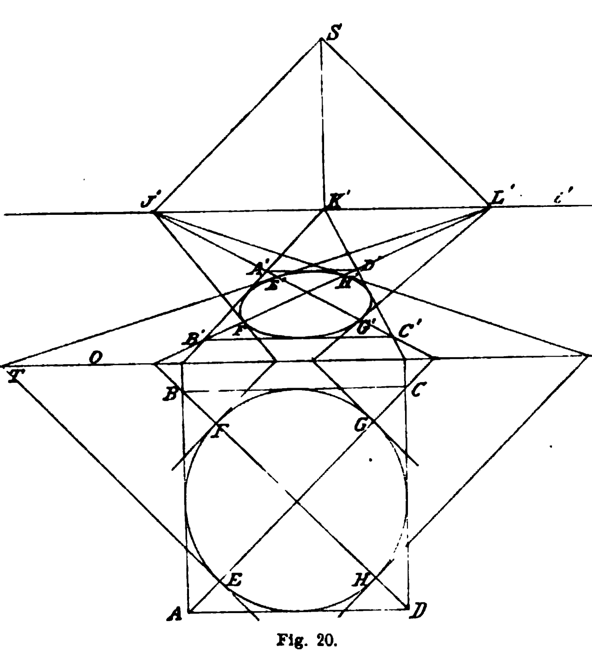


Fig. 20.

entsprechenden Geraden. Die Tangente in E trifft die Achse in T. Die entsprechende Tangente geht von T nach L', denn L' ist auch der Fluchtpunkt der letzteren, weil SL' parallel zu BD, folglich anch parallel zu ET ist. Ebenso sind die Tangenten in F, G und H parallel zu je einer der Diagonalen des Quadrats, weshalb die ihnen entsprechenden Tangenten der kollinearen Figur nach J' oder L' gerichtet sind. In ähnlicher Weise kann man beliebig viele einhüllende Tangenten der kollinearen Figur bestimmen, wodurch diese hinreichend deutlich zum Vorschein kommt.

20) Bei der Darstellung der einem Kreise K kollinearen Figur können noch besondere Fälle eintreten, welche mit der Lage der K angehörigen Fluchtlinie zusammenhängen. Liegt kein Punkt des Kreises auf der Fluchtlinie, so hat die kollineare Figur keine unendlich fernen Punkte, sie ist dann eine geschlossene endliche Kurve. Dies ist der in 19 dargestellte Fall. Wir machen nun die Annahme, dass die Fluchtlinie i den Kreis K berührt (Fig. 21).

Zur Ausführung der Konstruktion der dem Kreis kollinearen Figur ist es vorteilhaft zunächst irgend ein Paar entsprechender Punkte zu finden.

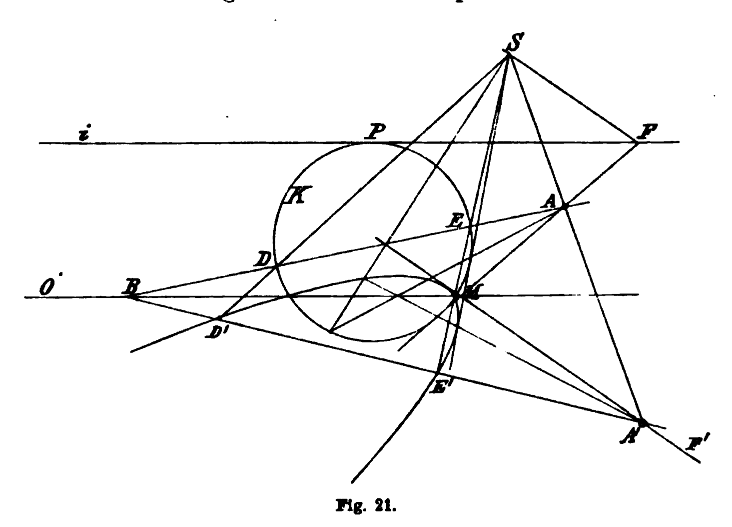


Fig. 21.

Wir ziehen z. B. die Tangente FM an den Kreis. Ihr Fluchtpunkt F liegt auf i, folglich ist die ihr entsprechende Gerade F'M parallel zum Strahl SF und sie trifft die Achse ebenfalls in M. Ziehen wir nun irgend einen Strahl durch S, so schneidet derselbe MF und MF' in zwei entsprechenden Punkten A und A'. Jetzt legen wir durch A Sekanten des Kreises und verlängern dieselben, bis sie die Achse O treffen. Die den Sekanten entsprechenden Geraden gehen bez. durch diese Schnittpunkte und durch A'. Ist z. B. AB eine den Kreis in D und E schneidende Sekante, A'B die AB

entsprechende Gerade, dann werden durch die Strahlen SD und SE auf A′B diejenigen Punkte D′ und E′ bestimmt, welche D und E entsprechen. Auf diese Weise lassen sich beliebig viele Punkte der dem Kreise K kollinearen Figur bestimmen. Dem Berührungspunkte P des Kreises und der Fluchtlinie entspricht ein unendlich ferner Punkt, welcher auf dem Strahle SP liegt. Die gesuchte Kurve erstreckt sich ins Unendliche, sie ist eine Parabel.

Es ist von Interesse, besondere Fälle dieser Kollineation zu betrachten. Wir nehmen an, das Kollineationscentrum liege im Mittelpunkte S des Kreises K (Fig. 22); die Kollineationsachse O sei die Sekante MN und die zu der letzteren parallele Tangente i die Fluchtlinie.

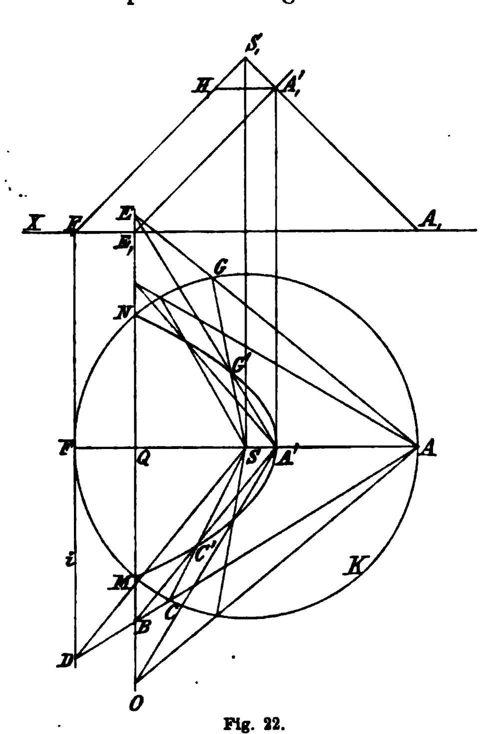


Fig. 22.

Durch S ziehen wir zunächst den Strahl, welcher senkrecht zu O steht. Derselbe trifft den Kreis in A und F. Legen wir durch A die beliebige Gerade AB, deren Fluchtpunkt D ist, so geht die entsprechende Gerade A′B durch B und dieselbe ist parallel zu dem Strahl SD. Hiernach sind A und A′ zwei entsprechende Punkte. Ziehen wir durch den Schnittpunkt C noch den Strahl SC, so trifft derselbe A′B in dem Punkte C′, welcher C entspricht. Sind ebenso AE und A′E zwei andere entsprechende Geraden, GS der Strahl, welcher nach dem Schnittpunkte G der Geraden AE mit dem Kreise geht, so schneidet GS die A′E in dem G entsprechenden Punkte G′ u. s. w. Wir erkennen nun leicht in dieser Konstruktion diejenige, welche zur Bestimmung des Durchschnittes eines geraden Kegels mit einer Ebene angewendet werden kann, wenn O die erste Spur, der Kreis K die Grundfläche und S die Projektion der Spitze des Kegels ist. Dass die Schnittebene in dem vorliegenden Falle parallel zu einer Seitenlinie des Kegels ist, können wir leicht erkennen. Aus der oben angegebenen Bestimmung des Punktes A′ folgt nämlich:

$$SA' : SA = BD : AD$$
$$= FQ : AF.$$

Da nun $SA = \frac{1}{2} AF$, so ist $SA' = \frac{1}{2} FQ$.

Wir konstruieren jetzt einen Aufriss zu der gegebenen Figur, welche wir als Grundriss betrachten können, und nehmen die Projektionsachse X senkrecht zu O. Die zweite Projektion des Kegels ist alsdann ein gleichschenkliges Dreieck $A_1 F_1 S_1$, dessen Höhe beliebig angenommen werden kann. Die Schnittebene steht nach der Lage ihrer ersten Spur O senkrecht zur zweiten Projektionsebene; ihre zweite Spur ist die Gerade $E_1 A_1'$, welche den Schnittpunkt E_1 der Achse O und der Projektionsachse mit dem senkrecht über A′ auf $A_1 S_1$ liegenden Punkte A_1' verbindet. Es ist jetzt zu beweisen, dass $E_1 A_1'$ parallel zu der Seitenlinie $F_1 S_1$ ist. Ziehen wir $A_1' H_1$ parallel zur Achse X, so wird diese Parallele durch SS_1 in zwei gleiche Teile geteilt, von welchen der rechts liegende gleich A′S ist. Folglich ist $A_1'H_1 = 2A'S = FQ = F_1 E_1$, mithin ist $E_1 A_1'$ parallel zu $F_1 S_1$.

Nehmen wir als zweiten besonderen Fall an, dass die Kollineationsachse O den Kreis K berühre und der Berührungspunkt S zugleich das Kollineationscentrum sei (Fig. 23). In C berühre die Fluchtlinie i den Kreis K, dann sind C und S die Endpunkte eines zur Achse O senkrechten Durchmessers. Ziehen wir durch C die Sekante BC beliebig, dann ist die entsprechende Gerade BD parallel zu SC (da C der Fluchtpunkt von BC ist). Nun schneidet BC den Kreis in A, folglich wird durch den Strahl SA der A entsprechende Punkt A′ auf BD bestimmt. Man sieht leicht, dass CA ⊥ SA und folglich auch ∠BSA = ∠ACS ist. Ziehen wir

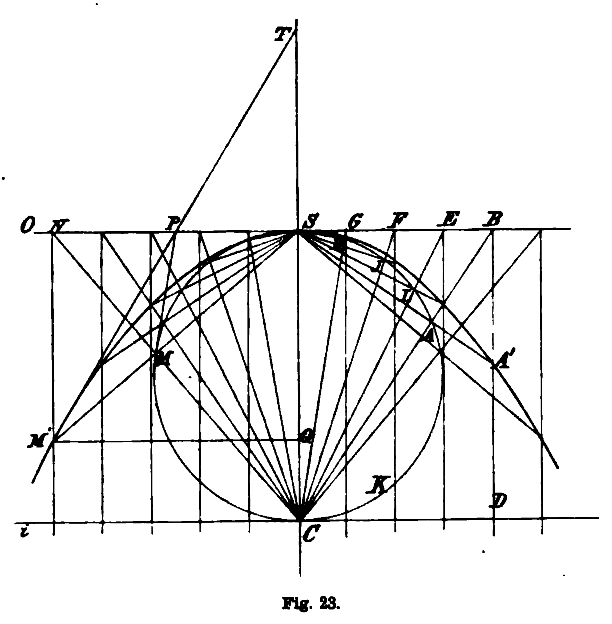


Fig. 23.

deshalb von C aus beliebig viele andere derartige Geraden CG, CF, CE . ., so sind die entsprechenden Geraden die durch G, F, E . . gehenden Parallelen zu CS. Die Strahlen, welche von S aus durch die Schnittpunkte H, J, L . . der ersteren mit dem Kreise gehen, stehen bez. senkrecht zu CG, CF, CE . . . Es gehen deshalb von den Punkten S und C zwei Gruppen von Strahlen aus (Strahlenbüschel), welche bez. gleiche Winkel mit einander bilden, d. h. kongruent sind. Schneiden die von C ausgehenden Geraden

auf O gleiche Strecken ab (SG = GF = FE = . . .), so werden die Kollineationsstrahlen auf jeder zu CS parallelen Geraden ebenfalls gleiche Abschnitte machen. Es ergiebt sich hieraus leicht eine bekannte Konstruktion der Parabel.

M sei ein Punkt des Kreises, M′ der entsprechende Punkt der Parabel; CN und NM′ seien die einander entsprechenden Geraden, welche durch M bez. M′ gehen. Ferner sei MP die Tangente des Kreises im Punkte M, dann ist M′P die entsprechende Tangente im Punkte M′ der Parabel. Aus der Eigenschaft der Tangenten des Kreises folgt aber: PM = PS und folglich ist P auch die Mitte der Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks MNS. Verlängern wir noch M′P bis T, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke M′NP und PST, dass ST = M′N = SQ (wenn M′Q ‖ NS). Hieraus ergiebt sich die schon in (IV, 28, I. Teil) angegebene Tangentenkonstruktion.

21) Die Fluchtlinie i schneide den gegebenen Kreis (Fig. 24). In diesem Falle entsprechen den beiden Schnittpunkten unendlich ferne

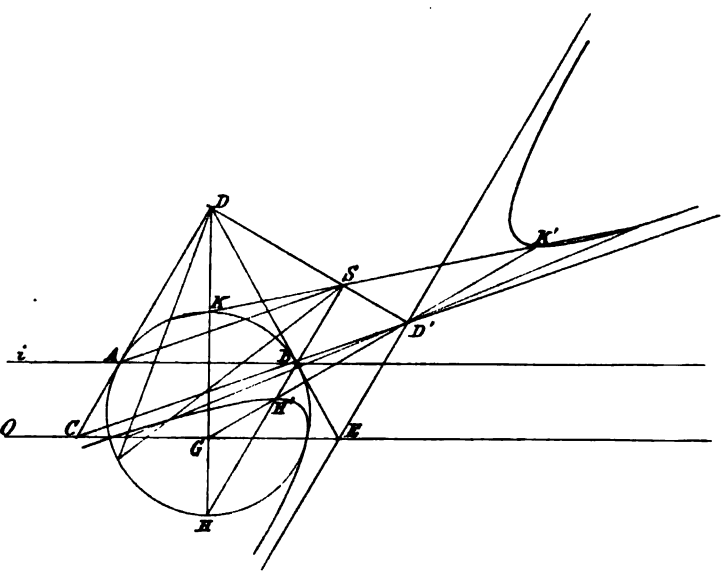


Fig. 24.

Punkte der kollinearen Figur. Die Konstruktion ist die gleiche wie in Fig. 21. Wir zeichnen die Tangenten CD und DE, welche den gegebenen Kreis in den Schnittpunkten A und B mit der Fluchtlinie i berühren. Diesen Tangenten entsprechen die zu den Strahlen SA und SB parallelen Tangenten CD′ bez. ED′. Die Berührungspunkte liegen, als den Fluchtpunkten A und B entsprechend, unendlich fern. Da nun der Schnittpunkt D′ dem Punkte D entspricht, so ziehen wir durch letzteren eine beliebige Sekante DG, dann entspricht dieser die Gerade GD′. Die Strahlen, welche von S durch

die Schnittpunkte H und K gezogen werden, bestimmen alsdann auf GD′ die beiden der kollinearen Kurve angehörigen Punkte H′ und K′. Hiernach kann man beliebig viele Punkte der Kurve, welche in diesem Falle eine Hyperbel ist, ermitteln.

Wir betrachten auch hier zunächst den besonderen Fall, wenn das Kollineationscentrum im Mittelpunkt des Kreises liegt (Fig. 25).

Der Durchmesser AC stehe senkrecht zu O. Wir bestimmen alsdann zuerst die den Punkten A und C entsprechenden Punkte A′ und C′. Zu dem Zwecke ziehen wir durch A eine beliebige Sekante AF, welche die Achse O in G und die Fluchtlinie in F schneidet. Die AF entsprechende Gerade geht durch G und sie ist parallel mit dem Strahl SF. Sie schneidet AS in A′. Ziehen wir von S den Strahl nach dem zweiten Schnittpunkte B mit dem Kreise, so erhalten wir auf A′G auch noch den B entsprechenden Punkt B′. Auf gleiche Weise ergiebt sich C′ als dem C entsprechender Punkt. Den beiden Tangenten des Kreises in T und V entsprechen die beiden Asymptoten WR und QU, welche durch U und W gehen und mit den Strahlen ST und SV parallel sind. In dieser Konstruktion erkennt man ohne Schwierigkeit wieder diejenige des Durchschnittes einer Ebene mit einem geraden Kegel, wenn der gegebene Kreis die Grundfläche, S die Horizontalprojektion der Spitze und O die Horizontalspur der Schnittebene ist. Dem Bogen TAV entspricht der links liegende und dem Bogen TCV der rechts liegende Teil der Hyperbel.

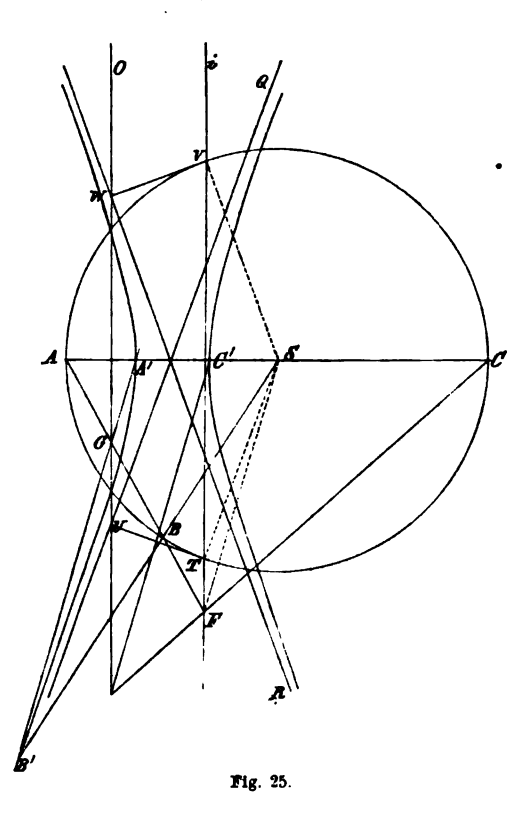


Fig. 25.

Das Kollineationscentrum S liege auf dem Umfang des Kreises, die Achse O berühre den Kreis in dem anderen Endpunkt des von S ausgehenden Durchmessers und die Fluchtlinie i gehe durch den Mittelpunkt des Kreises (Fig. 26). Nach 15) fällt die zweite Fluchtlinie i′ unter dieser Voraussetzung mit i zusammen.

Die Tangenten in T und U stehen in diesem Falle senkrecht zu O und die ihnen entsprechenden Tangenten der Hyperbel, d. h. die Asymptoten derselben gehen durch W und V und sind parallel den Strahlen ST und SU, woraus sich leicht ergiebt, dass dieselben durch den Mittelpunkt des Kreises gehen und senkrecht zu einander stehen. In diesem Falle wird die Kurve eine gleichseitige Hyperbel genannt. Ist BG eine beliebige Sekante, welche die Tangenten WT und UV in A und B und den Kreis in D und E schneidet, so bestimmen wir auf den Asymptoten durch die Strahlen SA und SB die A und B entsprechenden Punkte Punkte A′ und B′. Auf der Geraden A′B′ liegen dann auch wiederum die D und E entsprechenden Punkte D′ und E′, welche man durch die Strahlen SD und SE bestimmt.

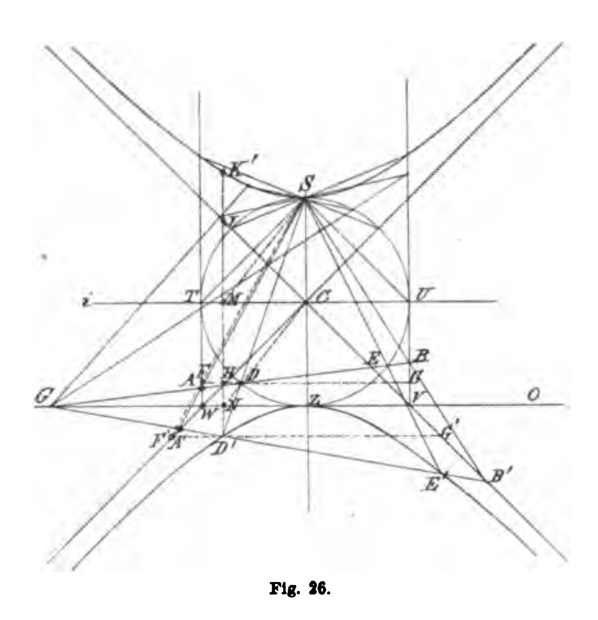


Fig. 26.

Ziehen wir durch D die Sekante FG parallel zu O, dann ist die entsprechende Gerade F′G′, welche durch D′ geht, ebenfalls parallel zur Kollineationsachse. F und F′ liegen als entsprechende Punkte auf einem durch S gehenden Strahl. Ziehen wir die Gerade D′K′ senkrecht zu O, so entspricht dieser die durch C und D gehende Gerade NC; die letztere ist aber parallel zu Strahl SM. Es folgt hieraus: $\angle DCZ = \angle MSC$ und $\angle DSZ = \frac{1}{2}\angle DCZ = \frac{1}{2}\angle MSC$. Ferner ist $\angle MSD' = \angle DSZ = \angle MD'S$ und hieraus ergiebt sich, dass $\triangle MD'S$ gleichschenklig ist, $SM = D'M$. Zieht man also SM von S aus beliebig und macht MD′ und MK′ senkrecht zu i und jede gleich SM, so sind D′ und K′ Punkte der gleichseitigen Hyperbel.

Anmerkung. Es sei $CS = CZ = a$, $CM = y$, dann ist: $MS = \sqrt{a^2 + y^2} = MD'$. Da $MJ = MH = CM = y$, so ist: $D'J = \sqrt{a^2 + y^2} + y$ und $D'H = \sqrt{a^2 + y^2} - y$, folglich $D'J \,.\, D'H = a^2$ oder auch $D'H \,.\, HK' = a^2$. Da durch eine beliebige Parallelprojektion die Verhältnisse der in diesen Formeln vorkommenden Strecken nicht geändert werden, so gilt der Satz auch für nicht gleichseitige Hyperbeln.

Affinität.

22) Die allgemeinen Beziehungen zweier kollinearen Systeme sind im Vorhergehenden festgestellt. Wir haben nun noch einige spezielle Fälle zu betrachten, welche durch besondere Lagen des Projektionscentrums und der Kollineationsachse eintreten können.

Das Kollineationscentrum liege unendlich fern, die Kollineationsstrahlen sind demnach parallel. In diesem Falle, welcher schon in 1) und 2) d. Abschn. auftrat, wird die Beziehung zweier entsprechenden Figuren Affinität genannt.

Sind A und A′ (Fig. 27), B und B′ zwei Paare entsprechender Punkte, ferner α und β die Schnittpunkte der parallelen Strahlen, AA′ und BB′ mit der Achse O, so sind AB und A′B′ entsprechende Geraden, welche sich in einem Punkte D auf O treffen. Hieraus ergiebt sich leicht:

$$A\alpha : A'\alpha = B\beta : B'\beta$$

oder $$\frac{A\alpha}{A'\alpha} = \frac{B\beta}{B'\beta} = \delta$$

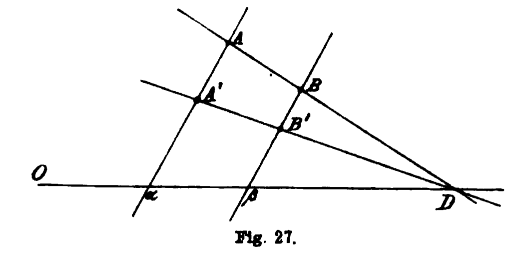


Fig. 27.

d. h. das Verhältnis δ der Abschnitte, welche durch zwei einander entsprechende Punkte A und A′, von der Achse aus gerechnet auf einem Kollineationsstrahle abgeschnitten werden, ist konstant. Wir nehmen δ positiv an, wenn A und A′ auf derselben Seite und negativ, wenn die beiden Punkte auf verschiedenen Seiten der Achse O liegen.

Leicht ergiebt sich, dass das Verhältnis zweier von entsprechenden Linien eingeschlossenen Flächen ebenfalls gleich δ ist. So gilt z. B. für Fig. 1 bekanntlich der Satz $\frac{A'B'C'D'E'}{ABCDE} = \cos\alpha$. Man nennt δ die Charakteristik.

Fluchtlinien und Fluchtpunkte liegen im Falle der Affinität unendlich fern. Parallelen Geraden des einen Systems entsprechen deshalb unter sich parallele Geraden des anderen.

Stehen die Kollineationsstrahlen senkrecht zur Achse und ist die Charakteristik gleich -1, so liegen je zwei entsprechende Punkte zu beiden Seiten der Achse gleich weit von derselben entfernt. Die Systeme sind in diesem Falle kongruent und es kann das eine durch Drehung um die Achse O mit dem anderen zur Deckung gebracht werden. In diesem Falle tritt noch eine bemerkenswerte Beziehung der beiden Systeme auf. Wir können nämlich jeden Punkt der Ebene als dem einen oder dem anderen System angehörig betrachten. Der A entsprechende Punkt A′ wird gefunden, wenn

man das von A zur Achse O gefällte Lot $A\alpha$ um sich selbst verlängert. Ist nun B ein Punkt des ersten Systems, welcher mit A′ zusammenfällt, so finden wir durch die gleiche Konstruktion, dass der entsprechende Punkt B′ in A liegt. Demnach entsprechen sich bei der Charakteristik — 1 zwei Punkte A und A′ der beiden affinen Systeme doppelt. Je nachdem man A als Punkt des einen oder des anderen Systems betrachtet, wird der entsprechende Punkt jedesmal mit A′ zusammenfallen. Übrigens findet diese Beziehung bei der Charakteristik — 1 auch noch statt, wenn die Kollineationsstrahlen nicht senkrecht zur Achse O stehen. Diese gegenseitige Beziehung zweier Systeme wird **Involution** genannt.

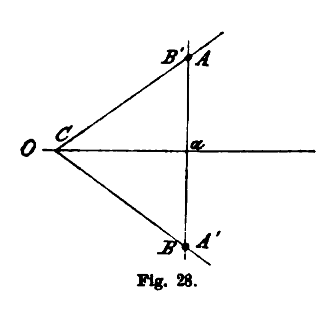


Fig. 23.

Ist die Charakteristik + 1, so fallen die beiden entsprechenden Systeme zusammen.

Aufgaben. Zu einer gegebenen Figur F die affine Figur zu konstruieren, wenn die Charakteristik 1) $\delta = \frac{2}{3}$, 2) $\delta = -\frac{1}{2}$ ist.

23) Die einem Kreise affine Kurve ist eine Ellipse; wir können dieselbe ja stets als Durchschnitt eines Cylinders von kreisförmiger Grundfläche mit einer beliebigen Ebene ansehen. So wird man z. B. in Fig. 83 (I. Teil) die affine Beziehung zwischen der Grundfläche K_1 und der umgeklappten Schnittfigur des Cylinders leicht erkennen.

Am einfachsten gestaltet sich die Konstruktion, wenn die Kollineationsachse ein Durchmesser des Kreises ist und die Kollineationsstrahlen senkrecht zur Achse stehen. Dieser Fall der Affinität führt sofort zu der schon in (IV, 5 und 6, I. Teil) angegebenen Konstruktion der Ellipse, welche darauf beruht, dass jedes von einem Punkt des Umfanges des Kreises auf die Kollineationsachse gefällte Lot durch den Umfang der Ellipse nach demselben Verhältnis geteilt wird. Bezeichnen wir die halben Achsen der Ellipse mit a und b, so ist hiernach die Charakteristik $\frac{a}{b}$.

Folgende Aufgaben sind jetzt leicht zu lösen (s. IV 9, 10, 11).

24) An eine durch grosse und kleine Achse gegebene Ellipse für einen gegebenen Punkt derselben die Tangente zu ziehen.

Anl. zur Aufl. Wir betrachten die Ellipse als affin zu dem um die grosse Achse gezeichneten Hauptkreis, und bestimmen denjenigen Punkt des letzteren, welcher dem gegebenen Berührungspunkte entspricht. Durch diesen ziehen wir die Tangente an den Kreis und bestimmen dann diejenige Gerade, welche der letzteren entspricht.

25) Von einem gegebenen Punkte aus Tangenten an eine durch grosse und kleine Achse gegebene Ellipse zu ziehen.

26) Den Durchschnitt einer Geraden g mit einer durch grosse und kleine Achse gegebenen Ellipse zu bestimmen. (Vgl. auch IV, 11, I. Teil.)

27) An eine durch grosse und kleine Achse bestimmten Ellipse Tangenten zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel sind.

28) Parallelen Sehnen des Kreises entsprechen parallele Sehnen der Ellipse. Da der zu ersteren senkrechte Durchmesser des Kreises jene Sehnen halbiert, so wird auch der entsprechende Durchmesser der Ellipse die entsprechenden Sehnen der letzteren halbieren. Zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser des Kreises haben die Eigenschaft, dass jeder von ihnen diejenigen Sehnen halbiert, welche zu dem anderen Durchmesser parallel sind; folglich haben die entsprechenden Durchmesser (konjugierte Durchmesser) der Ellipse dieselbe Eigenschaft (s. IV, 12, I. Teil), sie stehen nur im Allgemeinen nicht senkrecht zu einander. Es giebt nur ein Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse, welche einen rechten Winkel mit einander bilden, nämlich die beiden Hauptachsen.

29) Stehen die Kollineationsstrahlen nicht senkrecht zur Achse (Fig. 29) und sind EF und AG zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser des Kreises, EF zugleich Kollineationsachse und ist A′, der dem A entsprechende Punkt, gegeben, so ist die Richtung der Kollineationsstrahlen durch AA′ bestimmt. Der Geraden AB entspricht alsdann A′B in der affinen Figur. Einer anderen zu O senkrechten Geraden CD entspricht die Gerade DC′, welche zu A′B parallel ist. Auf der letzteren wird durch den Kollineationsstrahl CC′ der dem C entsprechende Punkt C′ bestimmt. Wir erkennen hieraus sofort die schon in (IV, 18, I. Teil) angegebene Konstruktion der Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern wieder, welche mit der soeben gefundenen völlig übereinstimmt. Auch die in der Einleitung des I. Teiles angegebene schiefe Projektion des Kreises stellt sich hiernach als eine demselben affine Ellipse dar.

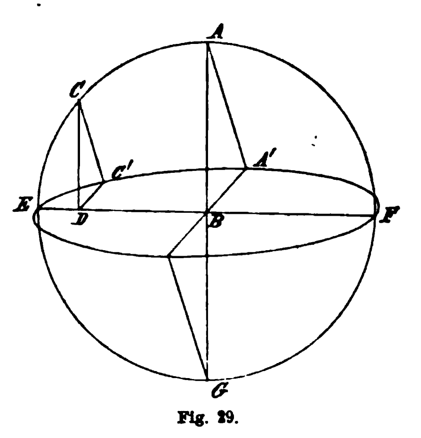


Fig. 29.

Aufgaben.

30) Zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse AB und CD sind gegeben. Man soll die Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden g mit der Ellipse bestimmen (Fig. 30).

Aufl. Über AB als Durchmesser zeichnen wir einen Kreis, welcher

nach 29) der gegebenen Ellipse affin ist, wenn AB die Kollineationsachse ist. Dem Durchmesser CD entspricht dann der zu AB senkrechte Durchmesser des Kreises und der Endpunkt D′ des letzteren dem Punkte D; endlich ist durch D und D′ die Richtung der Kollineationsstrahlen bestimmt. Wir bestimmen jetzt den einem Punkte H der Geraden g entsprechenden Punkt H′ durch die Konstruktion: EH ∥ DM, E′H ∥ D′M und HH′ ∥ DD′. Der Geraden g entspricht nun die Gerade g′, welche durch H′ und den Schnittpunkt L der ersteren mit der Achse O geht. g′ schneidet den Kreis in F′ und G′. Die gesuchten Punkte F und G, welche diesen Schnittpunkten entsprechen, werden nun durch die Kollineationsstrahlen F′F und G′G bestimmt.

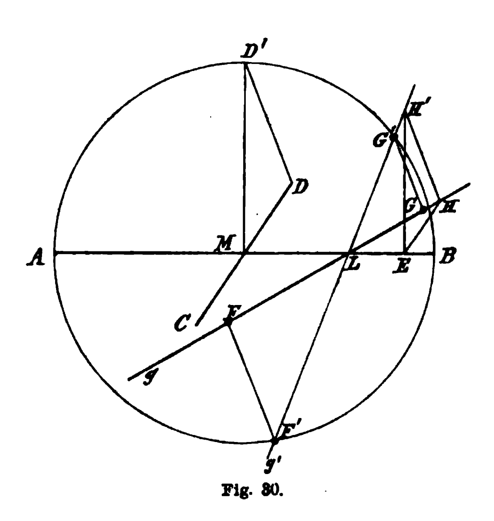


Fig. 30.

30) Zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse sind gegeben. Man soll die Länge eines anderen, seiner Lage nach gegebenem Durchmessers und die seines konjugierten Durchmessers finden.

31) Durch einen gegebenen Punkt einer Ellipse, welche durch ein Paar konjugierter Durchmesser bestimmt ist, die Tangente zu ziehen.

32) An eine durch 2 konjugierte Durchmesser gegebene Ellipse Tangenten zu ziehen, welcher einer gegebenen Geraden parallel sind.

33) Von einem Punkte M aus Tangenten an eine durch ein Paar konjugierter Durchmesser gegebenen Ellipse zu ziehen und die Berührungspunkte derselben zu bestimmen.

34) Liegen ein Kreis und eine Ellipse, oder auch zwei Ellipsen, in einer Ebene, so dass an dieselben zwei gemeinschaftliche parallele Tangenten gezogen werden können, so besteht zwischen beiden Kurven Affinität. Die Kollineationsstrahlen sind parallel zur Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Kurven und zu jenen gemeinschaftlichen Tangenten. Die Berührungspunkte A, B und A′, B′ (Fig. 31), so wie die Mittelpunkte C und C′ sind einander entsprechende Punkte. Die affine Beziehung beider Kurven erkennen wir leicht, wenn wir berücksichtigen, dass der Durchmesser, welcher die Berührungspunkte A′ und B′ verbindet, dem Durchmesser AB entspricht. Der A′B′ konjugierte Durchmesser D′E′ ist den Tangenten in A′ und B′ parallel, deshalb fällt derselbe in die Gerade CC′. Ihm entspricht der

Durchmesser DE des Kreises, welcher ebenfalls in CC′ liegt und senkrecht zu AB steht. Es entsprechen also die beiden konjugierten Durchmesser

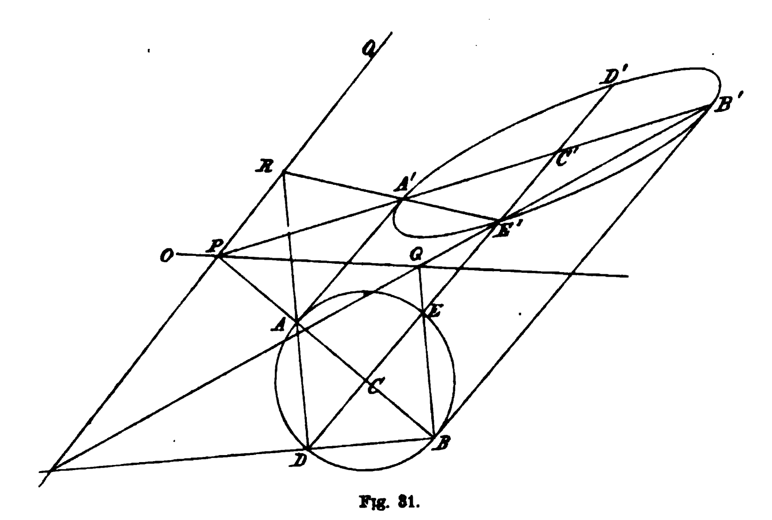


Fig. 31.

A′B′ und D′E′ zwei aufeinander senkrechten Durchmessern des Kreises, woraus sich die behauptete Beziehung ergiebt.

Wir können die kollineare Verwandtschaft der beiden Kurven auch sofort wieder erkennen, wenn wir den Kreis als die Grundfläche eines Cylinders und die Ellipse als Projektion eines Schnittes desselben ansehen. Doch sind hierbei zwei verschiedene Lagen der Kollineationsachse möglich. Wir können nämlich dem Halbkreise ADB die halbe Ellipse A′D′B′ entsprechen lassen, dann liegt die Kollineationsachse O zwischen den beiden Kurven; sie ist bestimmt durch die Schnittpunkte P und Q der Geraden AB und A′B′ bez. BE und B′E′. Oder es entsprechen sich der Halbkreis ADB und die halbe Ellipse A′E′B′ (also dem Punkte D entspricht E′). In diesem Falle ergiebt sich O_1 als Kollineationsachse, welche durch P und den Schnittpunkt R der beiden entsprechenden Geraden AD und A′E′ geht.

Im Sinne der elementaren Geometrie bedeutet dies nichts anderes, als dass es zwei verschiedene Ebenen giebt, welche den Cylinder in Ellipsen schneiden, deren Projektionen auf der Ebene der Grundfläche zusammenfallen. Jede der gefundenen Kollineationsachsen kann die Spur einer solchen Ebene sein.

35) Durch die vorige Betrachtung finden wir auch ein Mittel aus zwei konjugierten Durchmessern einer Ellipse die Hauptachsen derselben zu konstruieren (Fig. 32).

Sind D′E′ und F′G′ die gesuchten Hauptachsen, DE und FG die denselben entsprechenden Durchmesser des Kreises und treffen sich dieselben

paarweise in den Punkten M und N der Kollineationsachse O, so haben die rechtwinkligen Dreiecke MCN und MC′N die Hypothenuse MN gemeinschaftlich. Durch die 4 Punkte M, C, N, C′ lässt sich deshalb ein Kreis legen, dessen Mittelpunkt hiernach auf MN liegen muss. Da ausserdem noch zwei Punkte C und C′ des Kreises bekannt sind, so kann derselbe leicht konstruiert werden. Hierdurch ergeben sich die Punkte M und N, darnach die Durchmesser MC′, NC′, MC und NC und durch die Kollineationsstrahlen, welche man durch die 4 Punkte D, E, F und G zieht, auch die entsprechenden Endpunkte D′, E′, F′ und G′ der gesuchten Durchmesser.

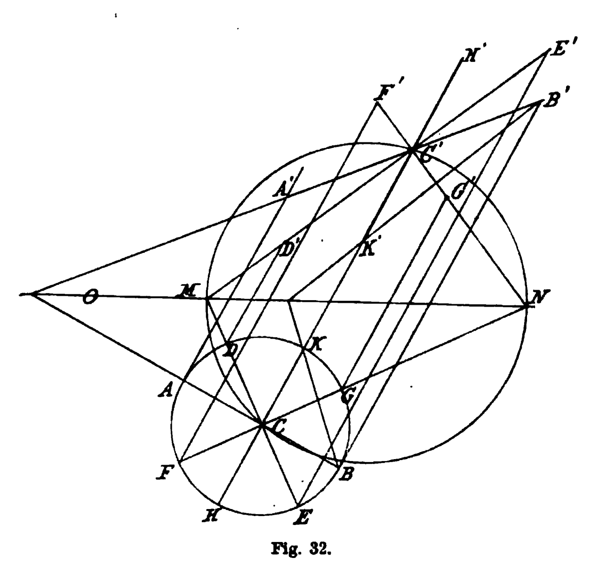


Fig. 32.

Eine andere Lösung dieser Aufgabe findet man im I. Teil, IV, 20. Der Anfänger wird in derselben nun leicht kollineare Beziehungen wieder erkennen.

Man kann diese Aufgabe benutzen, um z. B. in den Figuren 127 und 128 im I. Teil die Hauptachsen der Durchschnitte der Cylinder- bez. Kegelfläche mit der zweiten Projektionsebene zu bestimmen.

Perspektivische Ähnlichkeit.

36) Liegt das Kollineationscentrum im Endlichen, die Kollineationsachse dagegen unendlich fern, so sind je zwei entsprechende Geraden parallel. Die entsprechenden Figuren sind deshalb ähnlich. Sie sind im Sinne der elementaren darstellenden Geometrie als Projektionen paralleler Schnitte eines pyramidalen Raumes zu betrachten.

Ist das Kollineationscentrum S (Fig. 33) gegeben und irgend eine Figur z. B. das Dreieck ABC, sowie derjenige Punkt A′, welcher dem Eckpunkte A entspricht, so kann man die entsprechende Figur, hier das Dreieck A′B′C′ sehr leicht zeichnen, da $A'B' \parallel AB$, $A'C' \parallel AC$ und $B'C' \parallel BC$ sein muss. Die Abstände zweier entsprechenden Punkte von S haben, wie man leicht sieht, stets dasselbe Verhältnis: $\frac{AS}{A'S} = \frac{BS}{B'S} = \frac{CS}{C'S} = \delta$.

Man nennt δ wiederum die Charakteristik und nimmt dieselbe positiv an, wenn je zwei entsprechende Punkte auf derselben Seite von S, dagegen negativ, wenn sie auf den Kollineationsstrahlen zu verschiedenen Seiten von S liegen.

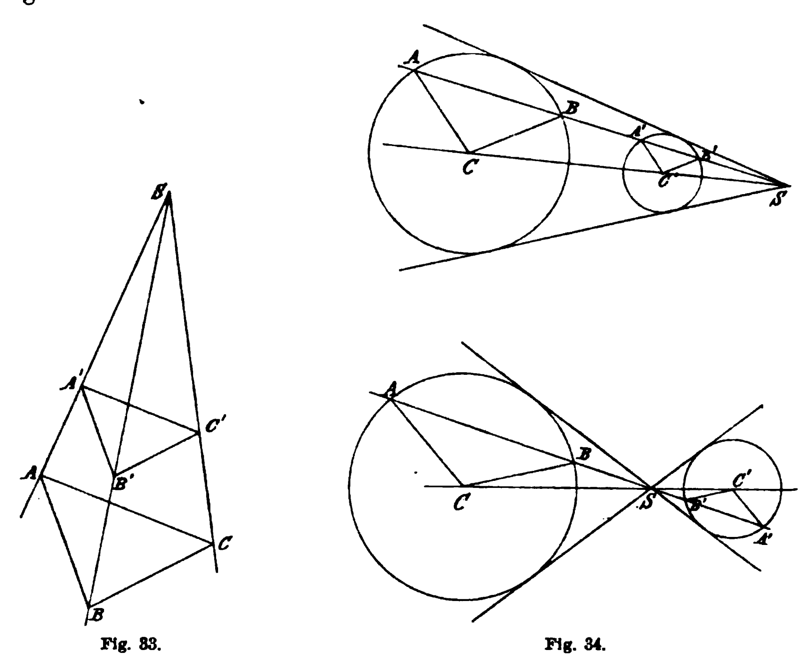


Fig. 33. Fig. 34.

Die perspektivisch ähnliche Figur zu einem Kreise muss nach den oben gegebenen Erläuterungen wiederum ein Kreis sein. Irgend ein Kollineationsstrahl schneidet die beiden Kreise in zwei Paaren entsprechender Punkte A, A′ und B, B′ (s. Fig. 34), wo dieser Fall sowohl für ein positives wie für ein negatives δ dargestellt ist. Die Halbmesser AC und A′C′, welche zwei entsprechende Punkte mit den Mittelpunkten verbinden, sind parallel.

Man sieht hieraus, dass das Kollineationscentrum entweder mit dem äusseren oder dem inneren Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise zusammenfällt, je nachdem δ positiv oder negativ ist. In diesen Punkten treffen sich auch die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise.

Wir lösen hiernach folgende Aufgaben.

37) Durch einen Punkt A einen Kreis zu legen, welcher die Schenkel eines gegebenen Winkels BSD berührt (Fig. 35).

Aufl. Wir ziehen die Halbierungslinie CS des gegebenen Winkels und nehmen auf derselben den Mittelpunkt C′ eines Kreises K′, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels berührt, beliebig an. Dieser Kreis ist dem gesuchten Kreise K perspektivisch ähnlich. Ziehen wir deshalb durch A

den Strahl AS, so trifft dieser den Kreis K in zwei Punkten A' und A'', von denen jeder als ein dem A entsprechender Punkt angesehen werden kann. Dem Halbmesser A'C' entspricht nun die Parallele AC, wodurch

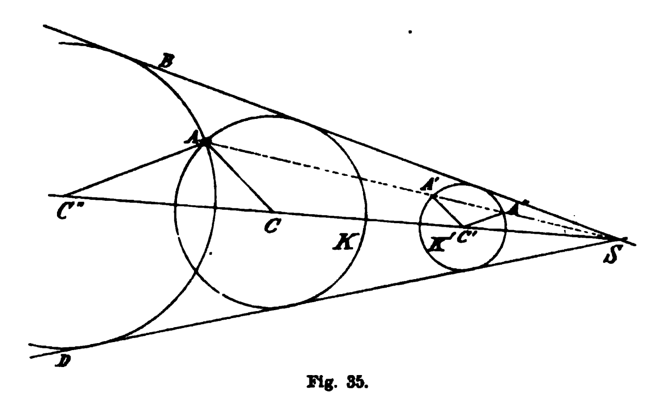


Fig. 35.

sich C als Mittelpunkt des gesuchten Kreises ergiebt. Betrachten wir A'' als A entsprechend, so finden wir den Mittelpunkt C'' eines zweiten Kreises, wenn wir AC'' parallel zu A''C' ziehen.

38) Durch zwei Punkte A und B einen Kreis zu legen, welcher eine gegebene Gerade CD berührt (Fig. 36).

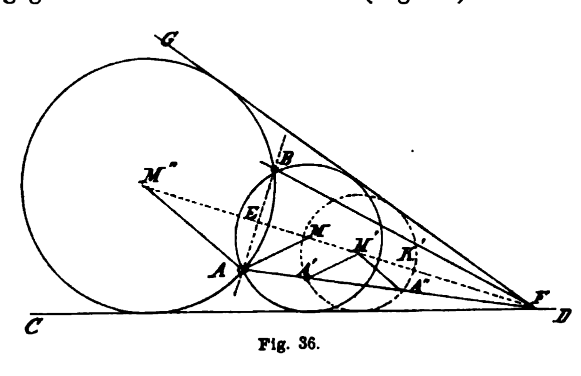


Fig. 36.

Aufl. Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt auf der Geraden EF, welche AB halbiert und senkrecht zu derselben steht. Leicht ergiebt sich, dass der Kreis auch die Gerade FG berührt, wenn $\angle EFG = \angle CFE$ ist. Der gesuchte Kreis ist deshalb jedem Kreise perspektivisch ähnlich, welcher die Gerade CD berührt und dessen Mittelpunkt auf EF liegt. Wir nehmen deshalb auf EF den Mittelpunkt M' eines Kreises K', welcher CD berührt, beliebig an. Der Kollineationsstrahl AF trifft K' in zwei Punkten A' und A''. Ziehen wir nun AM parallel zu A'M', so ist M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Nehmen wir aber A'' als A entsprechend an, so finden wir durch die zu A''M' parallele Gerade AM'' den Mittelpunkt M'' eines zweiten Kreises, welcher ebenfalls der Aufgabe genügt.

39) Einen Kreis zu konstruieren, welcher einen gegebenen Kreis und zwei gegebene Geraden berührt.

40) Einen Kreis zu konstruieren, welcher zwei Seiten eines Dreiecks ABC berührt und auf der dritten Seite eine Sehne von gegebener Länge m abschneidet (Fig. 37).

Aufl. Es sei CL die Halbierungslinie des Winkels ACB. M′ der Mittelpunkt eines Kreises K′, welcher die Seiten AC und BC berührt. Derselbe ist dem gesuchten Kreise perspektivisch ähnlich, wenn wir C als Kollineationscentrum betrachten. Durch M′ ziehen wir FG senkrecht zu AB und durch C eine Parallele CF zu AB. Ferner machen wir $D''G = GE'' = \frac{1}{2}$ m, so dass $D''E'' = m$ ist, und ziehen D″F und FE″. Die letzteren treffen den Kreis K′ in D′ und E′. Die Sehne D′E′ wird hiernach parallel zu AB; wir verlängern dieselbe, bis sie AC und BC in A′ bez. B′ schneidet. Das Dreieck A′B′C und den Kreis K′ können wir nun als eine dem gesuchten Kreise und dem gegebenen Dreieck ABC perspektivisch ähnliche Figur betrachten, wenn C das Kollineationscentrum ist. Die Strahlen CD′ und CE′ treffen verlängert AB in den D′ und E′ entsprechenden Punkten D und E. Den Mittelpunkt M finden wir leicht durch die Gerade DM, welche wir parallel zum entsprechenden Halbmesser D′M′ ziehen.

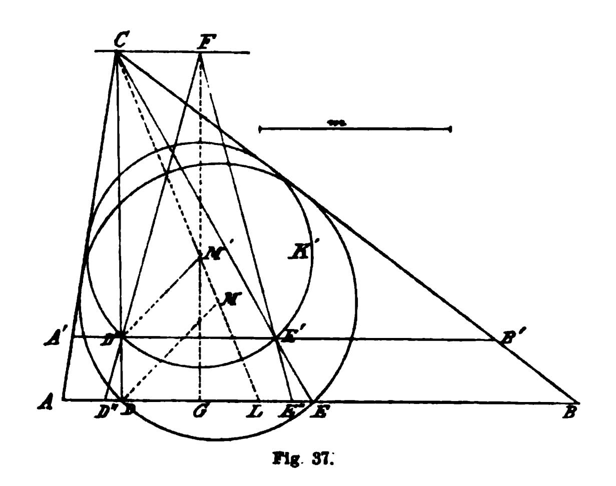


Fig. 37.

Man sieht leicht hieraus, dass durch Anwendung der Gesetze der perspektivischen Ähnlichkeit zahlreiche Aufgaben der Planimetrie gelöst werden können. Zur eigenen Übung verweisen wir auf die Aufgaben am Schlusse des Abschnittes.

Perspektivische Kongruenz.

41) Liegen Kollineationscentrum und Achse unendlich fern, so sind alle Kollineationsstrahlen parallel. Da der Schnittpunkt zweier entsprechenden Geraden in diesem Falle unendlich entfernt liegt, so sind dieselben ebenfalls unter sich parallel. Sind z. B. ABC und A′B′C′ (Fig. 38) zwei entsprechende Dreiecke, deren Ecken auf den parallelen Strahlen a, b und c liegen, so ist AB ‖ A′B′; AC ‖ A′C′; BC ‖ B′C′. Die Kongruenz dieser entsprechenden Figuren ist sofort zu erkennen. Im Sinne der elementaren darstellenden Geometrie können wir beide als die Projektionen zweier

parallelen Schnitte eines prismatischen Raumes betrachten. Um den einem beliebigen Punkte M entsprechenden Punkt M' zu finden, ziehe man von M eine Gerade nach einem der gegebenen Punkte, z. B. nach A. Die entsprechende Gerade A'M' ist parallel zu AM und der durch M gehende Parallelstrahl bestimmt hiernach den Punkt M'.

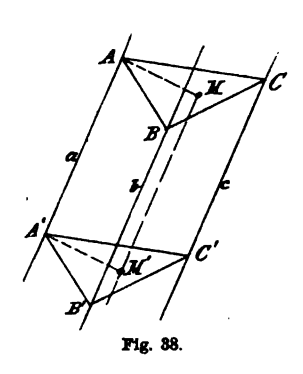


Fig. 38.

Involution.

42) Bei der Affinität haben wir bereits einen besonderen Fall des Entsprechens zweier kollinearen Figuren, nämlich die Involution, kennen gelernt, in welchem je zwei entsprechende Punkte A und A' mit einander vertauscht werden können. Es entspricht dem Punkte A jedesmal der Punkt A', einerlei, ob man A als dem ersten oder dem zweiten System angehörig betrachtet. Wir wollen jetzt untersuchen, ob bei dem allgemeinen Fall der Kollineation (wenn Achse und Centrum im Endlichen liegen) ebenfalls Involution eintreten kann. Zuvor wollen wir aber den für die Affinität und perspektivische Ähnlichkeit aufgestellten Begriff der Charakteristik verallgemeinern.

Bezeichnen wir den Durchschnitt des durch A gehenden Strahles und der Achse O mit α, so ist die Lage des Punktes A bestimmt durch das Verhältnis der Abschnitte AS und Aα. Stellen wir dieses Verhältnis durch den Bruch $\frac{AS}{A\alpha}$ so fest, dass also der Zähler stets den Abstand des Punktes A vom Kollineationscentrum S, der Nenner dagegen den Abschnitt des Strahles von A bis zur Achse O bedeutet, so können wir den Punkt A jederzeit aus dem gegebenen Verhältnis konstruieren. Ist z. B. das Abstandsverhältnis $\frac{AS}{A\alpha} = \frac{3}{5}$, so tragen wir von α aus auf O (Fig. 39) eine beliebige Strecke fünfmal und auf einer zu O parallelen Geraden, welche durch S geht, dieselbe Strecke dreimal, aber in entgegengesetzter Richtung ab. Die Verbindungslinie BC der Endpunkte beider Strecken schneidet Sα, wie man leicht aus der Ähnlichkeit der entstandenen Dreiecke erkennt, in dem gesuchten Punkte A, für welchen $\frac{AS}{A\alpha} = \frac{3}{5}$ ist.

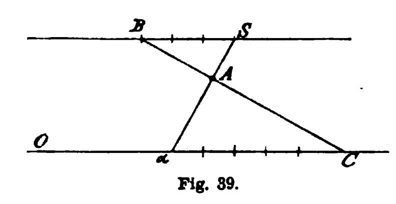


Fig. 39.

Nehmen wir an, die Strecke AS sei positiv, wenn sie von S aus nach O gerichtet ist, und die Strecke αA ebenso, wenn sie von α aus nach S

gerichtet ist, so wird durch das Abstandsverhältnis die Lage des Punktes unzweideutig festgestellt, wenn wir Zähler und Nenner desselben die entsprechenden Vorzeichen hinzufügen. Liegt A auf der Verlängerung von $S\alpha$ über α hinaus, so ist $A\alpha < o$, $AS > o$, ferner, wenn man die absoluten Längen vergleicht: $AS > A\alpha$. Wenn dagegen A auf der Verlängerung des Strahles $S\alpha$ über S hinaus liegt, so ist $AS < o$, $A\alpha > o$ und in Bezug auf die absoluten Längen $AS < A\alpha$. Hieraus folgt: Wenn das Abstandsverhältnis $\frac{AS}{A\alpha} > o$, so liegt der Punkt A zwischen S und α. Ist $\frac{AS}{A\alpha}$ negativ und dem Werte nach grösser als 1, so liegt A auf dem über α hinaus verlängerten Strahle und wenn bei negativem Abstandsverhältnis der absolute Wert desselben kleiner als 1 ist, so liegt A auf der Verlängerung des Strahles über S hinaus.

Man konstruiere hiernach die Lagen des Punktes A, wenn das Abstandsverhältnis $\frac{AS}{A\alpha}$ folgende Werte hat: 1) $\frac{2}{9}$; 2) $-\frac{5}{8}$; 3) $\frac{7}{8}$; 4) $-\frac{4}{3}$.

Betrachten wir zwei entsprechende Punkte A und A′ zweier kollinearen Systeme, so können dieselben in Bezug auf die Punkte S und α die in den Figuren 40—43 dargestellten Lagen haben. Entweder liegen beide einander entsprechende Punkte auf dem Kollineationsstrahle zwischen S und α oder beide ausserhalb der Strecke $S\alpha$ (s. Fig. 40, bez. 43); oder ein Punkt liegt innerhalb der Strecke $S\alpha$ und der andere entweder auf der Verlängerung des Strahles über S hinaus (Fig. 41) oder auf der entgegengesetzten Verlängerung über α hinaus (Fig. 42). Das Abstandsverhältnis des Punktes A sei $\frac{AS}{A\alpha} = k$ und dasjenige des Punktes A′, nämlich $\frac{A'S}{A'\alpha} = k'$, dann wird das Verhältnis $\frac{k}{k'} = \delta$ allgemein die Charakteristik der Kollineation genannt. Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass für jedes Paar entsprechender Punkte δ denselben Wert besitzt. Ist B (Fig. 40) ein beliebiger Punkt des ersten Systems, so ziehen wir die Gerade durch A und B bis zum Durchschnitt C mit der Kollineationsachse; die entsprechende

Fig 40.

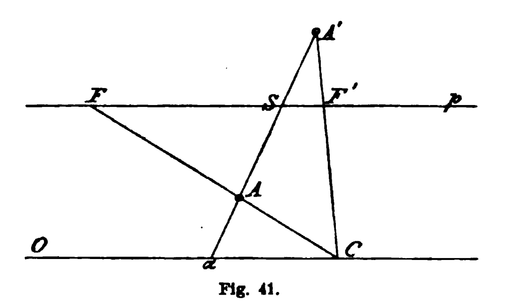


Fig. 41.

Gerade geht durch C und A′ und der Kollineationsstrahl SB bestimmt auf der letzteren den entsprechenden Punkt B′. Wir ziehen durch S die Ge-

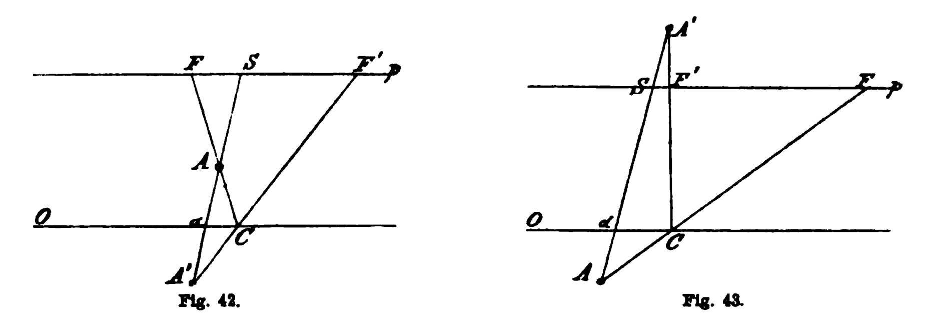


Fig. 42. Fig. 43.

rade p parallel zur Achse O und verlängern AB und A′B′ bis p in F bez. F′ getroffen wird. Dann ist:

$$\frac{AS}{A\alpha} = \frac{FS}{\alpha C} = k \text{ und } \frac{A'S}{A'\alpha} = \frac{F'S}{\alpha C} = k', \text{ folglich } \delta = \frac{k}{k'} = \frac{FS}{F'S}.$$

Ebenso:

$$\frac{BS}{B\beta} = \frac{FS}{\beta C} = l \text{ und } \frac{B'S}{B'\beta} = \frac{F'S}{\beta C} = l', \text{ folglich } \frac{l}{l'} = \frac{FS}{F'S} = \delta.$$

Die Charakteristik δ hat demnach für jedes Paar entsprechender Punkte denselben konstanten Wert; sie kann als einfaches Verhältnis der Abstände irgend zweier auf p liegenden entsprechenden Punkte F und F′ von S ausgedrückt werden. Für die oben angegebenen gegenseitigen Lagen zweier entsprechenden Punkte sind die zugehörigen Lagen dieser Strecken in den Figuren 40—43 angegeben. Ist δ positiv, so liegen FS und F′S auf derselben Seite und bei negativem δ zu verschiedenen Seiten des Punktes S auf der Geraden p.

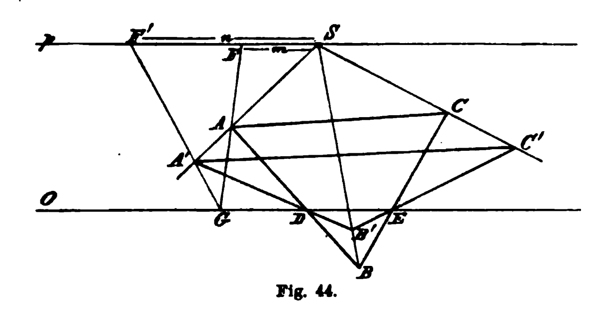


Fig. 44.

Hiernach können wir die Aufgabe lösen, zu einer gegebenen Figur die kollineare Figur zu konstruieren, wenn ausser S und O noch die Charakteristik δ gegeben ist.

Beispiele.

43) Zu einem gegebenen Dreieck ABC das kollineare Dreieck zu finden, wenn die Charakteristik $\delta = \frac{m}{n}$ gegeben ist. m > o und n > o (Fig. 44).

Aufl. Wir tragen $FS = m$ und $F'S = n$ auf derselben Seite von S auf p ab. Ziehen wir durch A die Gerade AF und verlängern dieselbe bis zum Durchschnitt G mit der Achse O, so ist GF′ die entsprechende Gerade, auf welcher der gesuchte Punkt A′ durch den Strahl SA bestimmt wird. In gleicher Weise findet man die anderen Eckpunkte. Die Schnittpunkte D und E entsprechen sich selbst, deshalb gehen A′B′ bez. B′C′ durch diese Punkte.

44) Zu einem gegebenen Sechseck die kollineare Figur zu finden, wenn die Charakteristik $\delta = -\frac{3}{4}$ ist.

45) Wenn die Charakteristik δ den Wert $+1$ hat, so sind FS und FS′ einander gleich, es fallen also F und F′ zusammen. Dasselbe gilt für je zwei entsprechende Punkte der kollinearen Systeme; die letzteren sind in diesem Falle identisch. Ist aber $\delta = -1$, dann liegen F und F′ zu beiden Seiten gleichweit von S entfernt (Fig. 45). Der einem Punkte A entsprechende Punkt A′ wird gefunden, wenn man durch A die Gerade AF zieht und bis zum Durchschnitt C mit der Achse O verlängert. Hieraus ergiebt sich die entsprechende Gerade CF′, auf welcher durch den Strahl SA der gesuchte Punkt A′ bestimmt wird. Vertauschen wir nun F mit F′, was ja gestattet ist, weil $SF = SF'$, so wird auch A mit A′ vertauscht werden können, d. h. wenn wir A′ als einen Punkt B des ersten Systems ansehen, so würde die vorige Konstruktion den mit A zusammenfallenden Punkt B′ als entsprechenden Punkt ergeben.

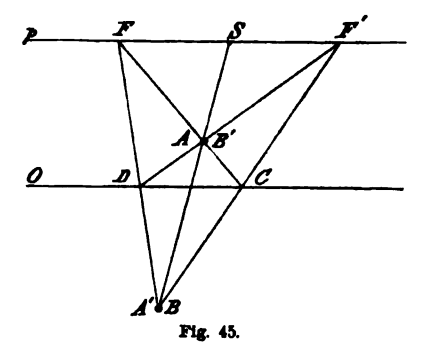


Fig. 45.

Zieht man übrigens die Gerade BF und die ihr entsprechende Gerade DF′, so ist leicht zu übersehen, dass letztere den Strahl BS in A (B′) trifft. In dem Dreieck A′FF′ ist A′S eine Mittellinie, welche die zu p Parallele CD halbiert, folglich treffen sich CF und DF′ in einem Punkte der Mittellinie.

Wir haben hier also wieder die besondere Art des Entsprechens zweier kollinearen Figuren, welche Involution genannt wird. Das bedeutet, ob ein Punkt A dem einen oder anderen System angehört, der entsprechende Punkt liegt jedesmal in demselben Punkte A′.

Um zu einer gegebenen Figur K die kollineare Figur K′ zu zeichnen, welche mit der ersten involutorisch ist, genügt es, die Kollineationsachse O und das Centrum S zu kennen.

Besondere Beachtung verdienen bei der Involution noch die Fluchtlinien. Es ist nämlich die Charakteristik $\delta = \frac{FS}{F'S}$ (s. Fig. 46).

Ist nun J der Fluchtpunkt der Geraden AB und J′ derjenige der Geraden A′B (also SJ ∥ A′B und SJ′ ∥ AB), so folgt: $\frac{FS}{F'S} = \frac{FJ}{BJ} = \frac{BJ'}{J'F'}$.

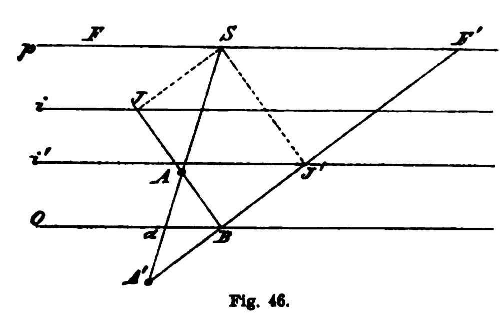


Fig. 46.

Wenn also FS = F′S ist, so folgt hieraus FJ = BJ und BJ′ = J′F′, d. h. die Fluchtlinien i und i′ fallen in eine zusammen, welche in der Mitte zwischen O und p liegt.

Man kann demnach zur Konstruktion beliebig viele Paare entsprechender Punkte, wie F und F′, welche gleichweit von S entfernt auf p liegen, oder auch die in der Mitte zwischen O und p liegende gemeinsame Fluchtlinie beider Systeme benutzen.

Vermischte Aufgaben.

46) Gegeben die Kollineationsachse O und das Centrum S. Man soll zu einem gegebenen Dreieck das mit demselben in Involution befindliche Dreieck konstruieren.

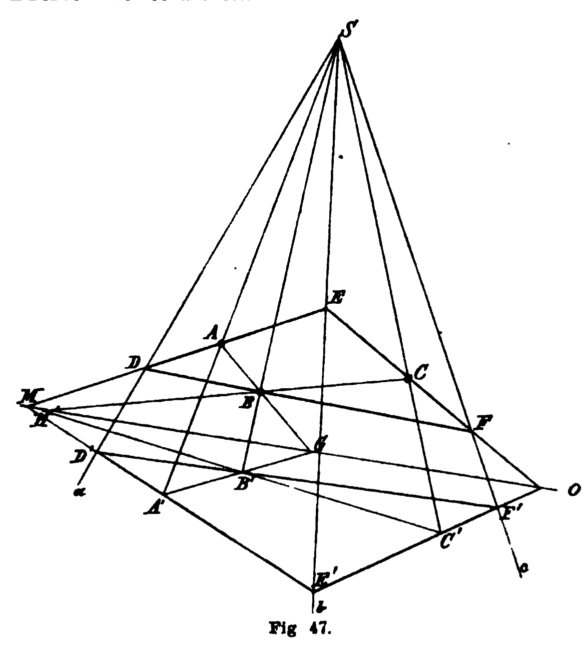


Fig 47.

47) Zu einem gegebenen Kreise die kollineare Figur zu zeichnen, welche mit demselben in Involution steht und zwar für die drei Fälle, wenn der Kreis die gemeinschaftliche Fluchtlinie 1) schneidet, 2) berührt, 3) nicht schneidet.

48) Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf drei durch einen Punkt S gehenden Geraden a, b und c liegen und dessen Seiten durch drei gegebene Punkte A, B und C gehen (Fig. 47).

Aufl. Wir zeichnen ein beliebiges Dreieck D′E′F′, dessen Ecken auf a, b, bez. c liegen. Dieses Dreieck ist dem gesuchten kollinear. Ziehen wir nun die Strahlen SA,

SB und SC, so schneiden dieselben die Seiten des Dreiecks D′E′F′ in den A, B, C entsprechenden Punkten A′, B′ und C′. Die Schnittpunkte G und H zweier Paare entsprechender Geraden, nämlich AB, A′B′ bez. BC, B′C′ bestimmen die Kollineationsachse. Verlängern wir nun D′E′, bis O in M getroffen wird, dann geht die D′E′ entsprechende Gerade DE durch A und M. Hieraus ergeben sich dann die beiden andern Seiten DF und EF des gesuchten Dreiecks von selbst.

Ein zweites Dreieck erhalten wir, wenn wir die Annahme machen, dass der A entsprechende Punkt A′ auf D′F′ und der B entsprechende Punkt B′ auf D′E′ liegt. Durch weitere Kombinationen findet man leicht, dass im Ganzen sechs Dreiecke möglich sind, welche der Aufgabe genügen. Es ist für den Anfänger nützlich, diese Fälle einzeln graphisch darzustellen.

Anm. Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgehen, dass diese Aufgabe auf ähnliche Weise mit Hülfe der elementaren darstellenden Geometrie gelöst werden kann, wenn man die drei Strahlen als Projektionen der Kanten eines pyramidalen Raumes, A, B, C als die Projektionen von drei Punkten, welche in je einer der Seitenflächen desselben liegen, betrachtet. Das gesuchte Dreieck ist die Projektion eines Schnittes des pyramidalen Raumes, dessen Ebene durch die drei gegebenen Punkte bestimmt ist.

49) Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf drei durch einen Punkt S gehenden Strahlen liegen, von welchem eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht und die beiden anderen zwei gegebenen Geraden parallel sind. (Perspektivische Ähnlichkeit.)

50) Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf drei beliebigen Geraden liegen und dessen Seiten drei anderen gleichfalls gegebenen Geraden parallel sind. (Perspektivische Ähnlichkeit.)

51) Ein Quadrat zu zeichnen, welches einem gegebenen Viereck kollinear ist.

52) Die Projektion eines sechsseitigen Prismas ist gegeben. Man soll die Durchschnittsfigur einer Ebene mit dem Prisma finden, wenn 1) drei Eckpunkte derselben, 2) drei auf den Seitenflächen liegende Punkte, durch welche die Schnittebene geht, gegeben sind.

53) Dieselbe Aufgabe für eine fünfseitige Pyramide zu lösen, deren Projektion gegeben ist.

54) Ein Fünfeck zu zeichnen, dessen Ecken auf fünf durch einen Punkt S gehenden Strahlen liegen und von welchem drei seiner Seiten durch drei gegebene Punkte gehen.

55) Durch einen Punkt A eine Gerade zu ziehen, welche nach dem unzugänglichen Schnittpunkte zweier anderen Geraden b und c geht. (Perspektivische Ähnlichkeit oder Kollineation.)

56) Gegeben ein Parallelogramm ABCD, eine Gerade g und ein Punkt P; man soll durch P eine Parallele ohne Hülfe des Zirkels zu g ziehen (Fig. 48).

Aufl. Wir konstruieren zu ABCD eine kollineare Figur, indem wir g als Kollineationsachse und P als den Fluchtpunkt von zwei gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms z. B. AB und CD ansehen. Wir verlängern demnach AB und CD bis zu ihren Schnittpunkten E bez. F mit g, dann erhalten wir in EP und FP die BE und CF entsprechenden Geraden. Durch den Punkt K, in welchem die Diagonale BD die Achse g trifft, ziehen wir die entsprechende Gerade KR beliebig. Die letztere schneidet EP und FP bez. in B′ und D′. Verbinden wir diese Punkte bez. mit den Punkten H und G, in welchen AD und BC die Achse g treffen, so erhalten wir die ABCD entsprechende Figur A′B′C′D′.

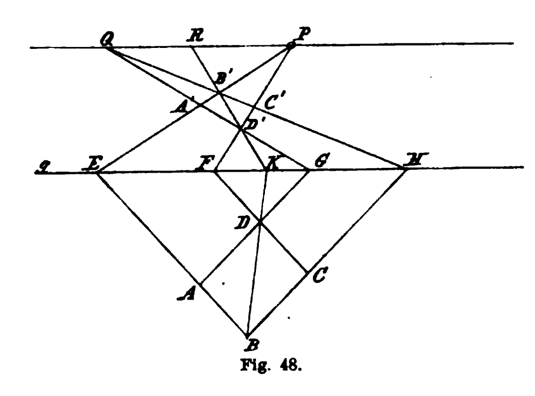


Fig. 48.

Der Schnittpunkt Q ist der Fluchtpunkt der beiden Geraden A′D′ und B′C′; folglich ist PQ eine Fluchtlinie, also ist sie auch parallel zu g.

57) Zieht man von einem Punkte S der Diagonale AC eines beliebigen Vierecks ABCD (Fig. 49) zwei Transversalen, welche die Seiten des Vierecks in den Punkten F, G, H, J treffen, so schneiden sich die Verbindungslinien der Punkte F und J bez. G und H in einem Punkte K der anderen Diagonale des Vierecks. (Leicht durch Kollineation zu beweisen.)

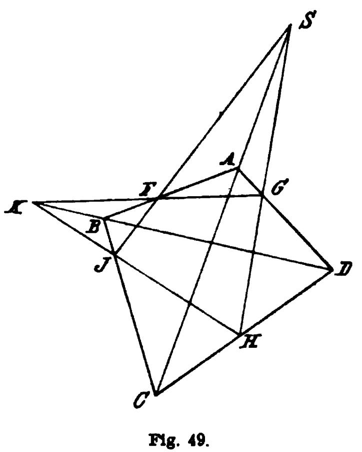


Fig. 49.

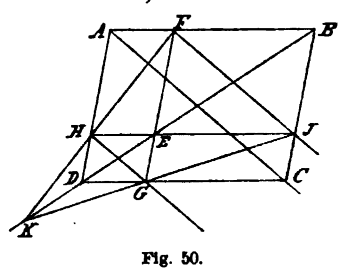


Fig. 50.

58) Es sei ABCD (Fig. 50) ein Parallelogramm. Zieht man durch einen beliebigen Punkt E der einen Diagonale die Parallelen FG und HJ zu den Seiten des Parallelogramms, so wird das letztere in vier Parallelogramme zerlegt. Die Diagonalen HF und GJ treffen sich in einem Punkte K der Diagonale BD. (Perspektivische Ähnlichkeit.)

59) Die äusseren Ähnlichkeitspunkte je zweier von drei Kreisen liegen auf einer Geraden (Fig. 51).

Beweis. Man ziehe durch die drei Mittelpunkte die parallelen Radien C′D′, C″D″, C‴D‴, dann ergeben sich die Ähnlichkeitspunkte J_1, J_2, J_3 als Durchschnitte der Geradenpaare (C′C″, D′D″), (C′C‴, D′D‴), (C″C‴, D″D‴). Die Dreiecke C′C″C‴ und D′D″D‴ sind affin (die Affinitätsstrahlen sind jene parallelen Radien, folglich schneiden sich die Paare der entsprechenden Seiten auf der Affinitätsachse O.

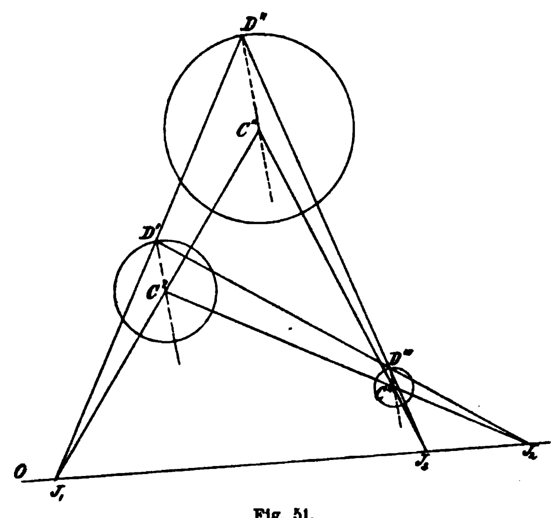


Fig. 51.

In der elementaren darstellenden Geometrie ergiebt sich dieser Satz ebenfalls sehr einfach. Wir können die drei Kreise als die Projektionen von drei Halbkugeln betrachten, welche auf der Zeichenfläche liegen. Die Ähnlichkeitspunkte J_1, J_2, J_3 sind die Spitzen der Kegelflächen, welche je zwei der Kugelflächen einschliessen und berühren. Durch diese drei Punkte muss folglich die Spur der Ebene gehen, welche die drei Kugelflächen berührt.

Man beweise ebenso, dass je zwei innere und ein äusserer Ähnlichkeitspunkt in gerader Linie liegen.

60) Einem gegebenen Viereck einen Rhombus einzubeschreiben. (Perspektivische Ähnlichkeit.)

61) Gegeben ein beliebiges Viereck ABCD (Fig. 52). Man soll ein Kollineationscentrum so bestimmen, dass die dem gegebenen Viereck entsprechende Figur α) ein Quadrat, β) ein Rechteck von gegebenem Seitenverhältnis wird.

Aufl. α) Wir verlängern je zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks ABCD bis zu ihren Schnittpunkten F und G, und betrachten die durch F und G gehende Gerade p als Fluchtlinie. Über FG als Durchmesser zeichnen wir einen Kreis k; verlängern ferner eine der Diagonalen, z. B. BD bis zum Fluchtpunkt H. Wir bestimmen nun den Punkt S auf dem Umfang des Kreises k so, dass SH den Winkel FSG halbiert; dies wird aber erreicht, wenn wir durch die Mitte E des unter FG liegenden Halbkreises und durch H die Gerade ES ziehen. Nehmen wir den so bestimmten Punkt S als Kollineationscentrum und die Gerade O, welche parallel zu p, sonst aber willkürlich gewählt werden kann, als Kollineationsachse an, so

ist die dem gegebenen Viereck entsprechende Figur leicht zu konstruieren. Die Seiten AB und CD verlängern wir bis J und K und ziehen durch die letzteren die Geraden a bez. b parallel zu dem Strahle SF, ebenso die Geraden c und d durch die Punkte M bez. L, in welchen O von AD und BC

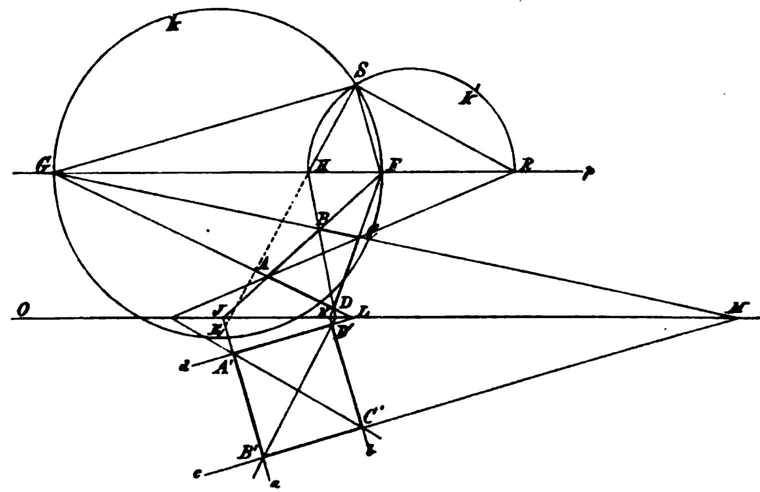


Fig 52.

getroffen wird, parallel zu dem Strahle SG; dann wird von diesen Geraden das ABCD entsprechende Viereck A'B'C'D' gebildet. Da nun die Seiten des letzteren den Schenkeln des rechten Winkels FSG paarweise parallel sind, ferner die der Diagonale BD entsprechende Gerade B'D' parallel mit SH ist, so folgt, dass B'D' auch den rechten Winkel A'D'C' halbiert. Hieraus ergiebt sich, dass A'B'C'D' ein Quadrat ist.

Anm. Verlängert man die Diagonale AC bis zum Fluchtpunkt R, und zeichnet über HR als Durchmesser einen andern Kreis k', so ergiebt sich δ auch als Schnittpunkt der beiden Kreise k und k'. Warum?

Aufl. β) Ist wieder FG (Fig. 53) die wie in α) bestimmte Fluchtlinie, k der über FG als Durchmesser gezeichnete Kreis, H der Fluchtpunkt der Diagonale, ferner $\alpha\beta\gamma\delta$ ein Rechteck, welchem das zu konstruierende Rechteck ähnlich sein soll, dann machen wir $\angle FGE = \angle \alpha\beta\delta$ und ziehen durch E und H die Gerade ES, dann ist S das gesuchte Kollineationscentrum. Die Lage des dem Viereck ABCD entsprechenden Rechtecks A'B'C'D ergiebt sich wie in α); dasselbe wird dem Rechteck $\alpha\beta\gamma\delta$ ähnlich sein. Die Kollineationsachse O ist parallel zu p, sonst aber beliebig anzunehmen.

Man vergl. die Aufgaben II, 23 und 24 im III. Teile d. W.

62) Es ist ein beliebiges Fünfeck ABCDE gegeben. Es soll ein demselben kollineares Fünfeck gefunden werden, um welches sich ein Kreis beschreiben lässt (Fig. 54).

Anl. zur Aufl. Wir ziehen die Diagonale CE und bestimmen ein Rechteck A′B′C′E′, welches dem Viereck ABCE kollinear ist. Wir zeichnen als zunächst die Fluchtlinie p, welche durch die Schnittpunkte F und G der

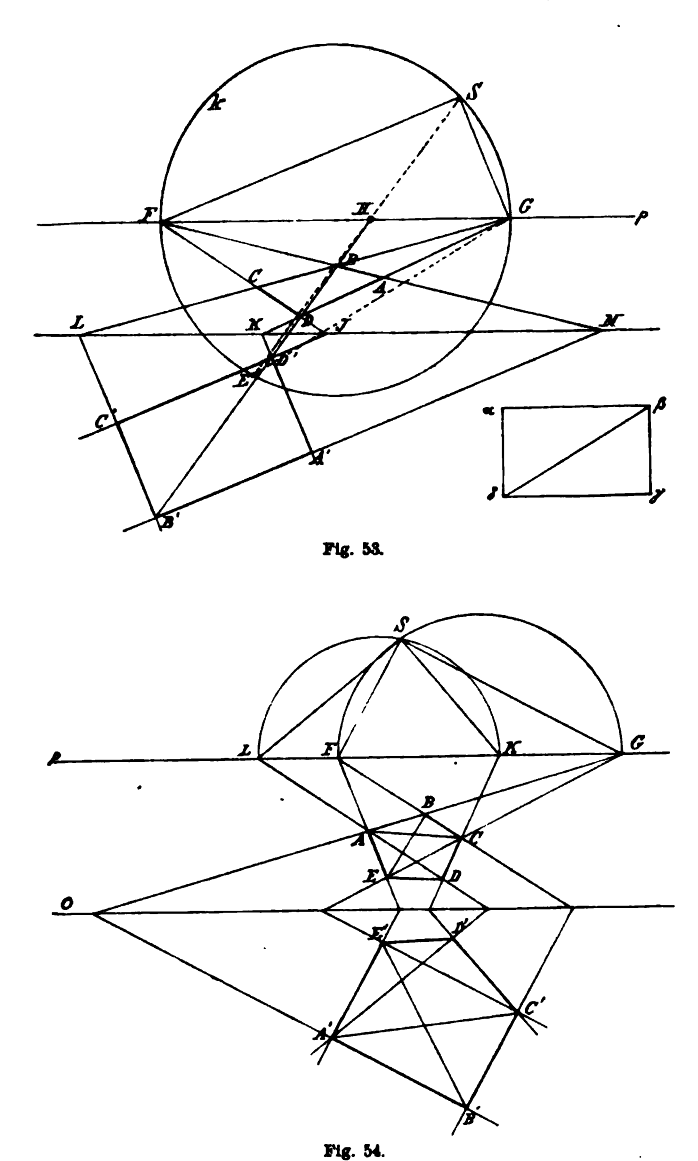


Fig. 53.

Fig. 54.

Seitenpaare AE und BC bez. AB und CE geht. Das Kollineationscentrum muss dann (s. 61) auf dem über FG als Durchmesser gezeichneten Kreise liegen. Den beiden Diagonalen AC und BE werden die Diagonalen A′C′

und B'E' des kollinearen Rechtecks A'B'C'E' entsprechen; folglich ist der Schnittpunkt des letzteren der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Eckpunkte jenes Rechtecks geht. Verlängern wir noch die Seite CD und die Diagonale AD bis K bez. L, zeichnen über KL als Durchmesser einen Kreis und nehmen den Schnittpunkt S der beiden Kreise als Kollineationscentrum an, so werden die CD und AD entsprechenden Geraden C'D' bez. A'D' parallel zu SK bez. SL; dieselben bilden also einen rechten Winkel miteinander. Der Schnittpunkt D', welcher D entspricht, liegt hiernach auch auf dem Kreise, welcher dem Rechteck A'B'C'E' umbeschrieben ist. Nach diesen Andeutungen ist die Konstruktion leicht auszuführen.

63) Ein Fünfeck ABCDE ist gegeben. Man soll ein demselben kollineares Fünfeck konstruieren, welchem ein Kreis einbeschrieben werden kann.

64) Ein beliebiges Dreieck ABC ist gegeben. Man soll ein demselben kollineares gleichseitiges Dreieck konstruieren. Wie viele Lösungen sind möglich?

65) Das Dreieck ABC und die Fluchtlinie i ist gegeben; man soll das Kollineationscentrum so bestimmen, dass das ABC entsprechende Dreieck gleichseitig wird.

66) Man soll ein dem Dreick ABC kollineares Dreieck konstruieren, welches einem gegebenen Dreick $\alpha\beta\gamma$ ähnlich ist, wenn die Fluchtlinie i gegeben ist.

67) Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben ist eine Seite a, die Summe der beiden andern Seiten und die zu a gehörige Höhe h_1.

68) In einen geraden Kegel eine die Mantelfläche berührende Kugel zu legen, welche die Grundfläche in einem Kreise von gegebenem Halbmesser schneidet.

Man s. Aufgabe 40.

69) In eine beliebige dreiseitige Pyramide eine Kugel zu legen, welche drei Seitenflächen derselben berührt und die vierte in einem Kreise von gegebenem Halbmesser schneidet.

70) In einen geraden Kegel eine die Mantelfläche berührende Kugel zu legen, welche durch einen innerhalb des Kegels liegenden Punkt geht.

71) Ein schiefer Kegel mit kreisförmiger Grundfläche werde von einer Ebene in einer Ellipse geschnitten. Man soll die Hauptachsen derselben bestimmen (Fig. 55).

Aufl. Wir stellen die Projektionsebenen so auf, dass die Schnittebene QRT senkrecht zu P_2 steht. Die zweite Projektion des Schnittes wird alsdann durch die mit der Spur RT zusammenfallende Gerade C_2D_2 dargestellt. Die beiden Seitenlinien A_2S_2 und B_2S_2, welche die zweite Projektion des Kegels begrenzen und deren erste Projektionen A_1S_1 und B_1S_1 durch die Endpunkte des zur Achse OX parallelen Durchmessers der Grundfläche gehen,

werden von der Ebene QRT in den Punkten $(C_1 C_2)$, $(D_1 D_2)$ getroffen. Zugleich bemerken wir, dass die Tangenten in diesen Punkten der Durchschnittskurve senkrecht zu P_2 stehen, da ihre zweiten Projektionen die Punkte C_2 und D_2 sind. Folglich ist $(C_1 D_1, C_2 D_2)$ ein Durchmesser der Schnittkure. Der konjugierte Durchmesser $J_1 K_1$ ist jenen Tangenten parallel, folglich steht derselbe ebenfalls senkrecht zu OX. Um die Länge desselben zu bestimmen, projicieren wir den Mittelpunkt M_1 aus S_1 auf $A_1 B_1$ nach H_1 und ziehen $E_1 F_1$ durch H_1 parallel zu $J_1 K_1$, dann schneiden die beiden Geraden $E_1 S_1$ und $F_1 S_1$ jenen Durchmesser in den gesuchten Endpunkten J_1 und K_1. Durch die beiden konjugierten Durchmesser $E_1 F_1$ und $J_1 K_1$ ist die Durchschnittskurve bestimmt. Die Drehung der Ebene QRT um den Winkel ORT bringt die beiden Durchmesser in die erste Projektionstionsebene nach CD bez. JK und nun lassen sich die Hauptachsen sowohl für die erste Projektion als auch für die wahre Gestalt des Schnittes nach 35) leicht angeben.

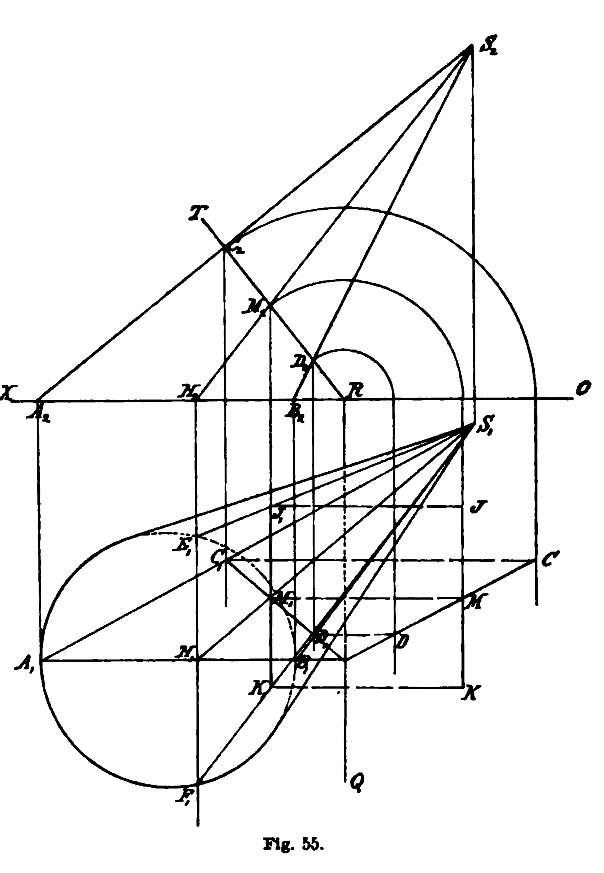


Fig. 55.

72) Die Durchschnittspunkte zweier durch ihre Hauptachsen gegebenen ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen zu bestimmen.

73) Durch einen Punkt M innerhalb einer Ellipse, von welcher die beiden Hauptachsen oder zwei konjugierte Durchmesser gegeben sind, eine Sehne zu ziehen, welche in M halbiert wird.

74) In ein gleichschenkliges Dreieck 3 Kreise zu zeichnen, welche sich untereinander, und je zwei Seiten des Dreiecks berühren. (Besonderer Fall der Malfattischen Aufgabe.) Leicht durch perspektivische Ähnlichkeit zu lösen.

75) Gegeben die beiden geraden Projektionen $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ eines beliebigen Dreiecks. Man soll ein Projektionscentrum S so bestimmen, dass die Projektion des gegebenen Dreiecks aus S auf P_1 einem gegebenen Dreieck ähnlich wird.

B. Kollineation im Raume.

1) Die Eigenschaften kollinearer Beziehungen zwischen zwei ebenen Figuren, dass nämlich je zwei entsprechende Punkte auf demselben durch das Kollineationscentrum gehenden Strahle liegen und zwei entsprechende Geraden auf der Kollineationsachse zusammentreffen, lassen sich auch auf räumliche Systeme ausdehnen. Nur setzen wir fest, dass an die Stelle einer Kollineationsachse eine Ebene tritt, in welcher die Schnittpunkte von je zwei entsprechenden Geraden der beiden Systeme liegen. Diese Ebene heisst dann die Kollineationsebene. Zur graphischen Darstellung kollinearer Systeme des Raumes bedienen wir uns der in der darstellenden Geometrie üblichen geraden Projektionen.

Es seien S_1 und S_2 (Fig. 56) die beiden Projektionen des Kollineationscentrums; die Geraden g_1 und g_2, welche senkrecht zur Achse OX gezogen sind, seien die Projektionen der Kollineationsebene, welche wir senkrecht zu den beiden Projektionsebenen P_1 und P_2 annehmen; ferner seien (A_1, A_2) und $(A_1' A_2')$ die Projektionen von zwei entsprechenden Punkten, dann können wir den einem anderen Punkte B $(B_1 B_2)$ entsprechenden Punkt leicht wie früher bestimmen. Wir ziehen die Gerade $(A_1 B_1, A_2 B_2)$; dieselbe trifft die Kollineationsebene in dem Punkte (F_1, F_2), folglich ist $(A_1' F_1, A_2' F_2)$ die $(A_1 F_1, A_2 F_2)$ entsprechende Gerade, auf welcher wir nun durch den Strahl $(S_1 B_1, S_2 B_2)$ den $(B_1 B_2)$ entsprechenden Punkt (B_1', B_2') erhalten.

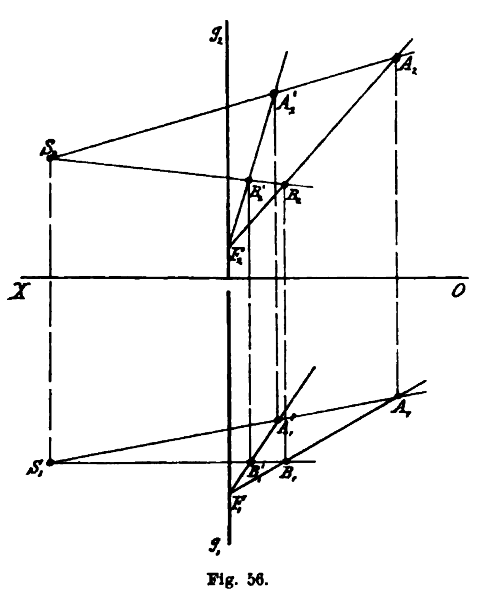


Fig. 56.

Leicht ergeben sich hieraus für die Kollineation räumlicher Systeme folgende Gesetze.

Die Projektion zweier kollinearen räumlichen Systeme auf einer Ebene,

welche senkrecht zu der Kollineationsebene steht, besteht aus zwei ebenen kollinearen Systemen, für welche die Spur der Kollineationsebene (welche zugleich deren Projektion ist), die Kollineationsachse und die Projektion des Centrums auch das Kollineationscentrum ist.

Zwei entsprechende Geraden liegen in einer Ebene, welche durch das Kollineationscentrum geht.

Zwei entsprechende Ebenen schneiden sich in einer Geraden, welche in der Kollineationsebene liegt.

Zwei entsprechende Systeme werden von einer durch das Kollineationscentrum gehenden Ebene in zwei kollinearen ebenen Systemen geschnitten, für welche die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Kollineationsebene die Kollineationsachse ist.

2) Sind ($B_1 C_1$, $B_2 C_2$) und ($B_1 C_1'$, $B_2 C_2'$) (Fig. 57) die Projektionen zweier entsprechenden Geraden und ziehen wir den Strahl ($S_1 F_1'$, $S_2 F_2'$) parallel zu ($B_1 C_1$, $B_2 C_2$), so schneidet derselbe die entsprechende Gerade in dem Punkte F_1', F_2'), welcher dem unendlich fernen Punkte der Geraden ($B_1 C_1$, $B_2 C_2$) entspricht.

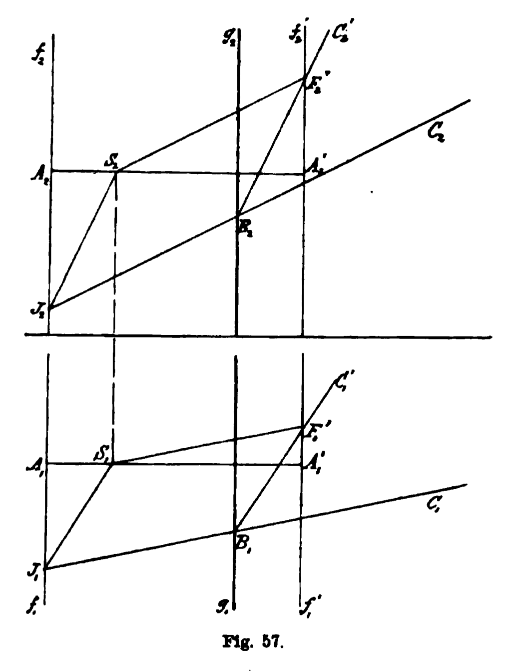


Fig. 57.

Es ist demnach F_2' der Fluchtpunkt der Geraden $B_2 C_2'$, ebenso F_1' der Fluchtpunkt von $B_1 C_1'$. Da aber die Fluchtpunkte aller Geraden, welche dem System der $B_1 C_1$ angehören, auf einer durch F_1' gehenden zu g_1 parallelen Geraden f_1' liegen, so folgt, dass die Fluchtpunkte der zugehörigen räumlichen Geraden in eine zur Kollineationsebene parallele Ebene fallen, deren erste Projektion (Spur) f_1' ist. Die zweite Projektion dieser Ebene, welche die Fluchtebene genannt wird, ist die Gerade f_2', welche parallel zu g_2 ist und durch F_2' geht. In gleicher Weise bestimmen wir die Projektionen der Fluchtebene des anderen Systems, wenn wir durch das Kollineationscentrum den Strahl ($S_1 J_1$, $S_2 J_2$) parallel zu ($B_1 C_1'$, $B_2 C_2'$) ziehen. Derselbe trifft die der letzteren entsprechende Gerade in ihrem Fluchtpunkte (J_1, J_2) und durch diesen geht nun die gesuchte Fluchtebene. Ihre Projektionen (Spuren) sind die zu g_1, g_2) parallelen Geraden f_1 und f_2.

Ziehen wir durch $(S_1 S_2)$ den zur Kollineationsebene senkrechten Strahl, so trifft derselbe die Fluchtebene (f_1', f_2') in dem Punkte $(A_1' A_2')$ und die andere Fluchtebene in (A_1, A_2). Diese Punkte sind die Fluchtpunkte aller Geraden des einen oder anderen Systems, welche senkrecht zur Kollineationsebene stehen.

3) Es ist nun hiernach leicht die zu einem gegebenen Raumgebilde kollineare Figur zu konstruieren. Wir nehmen als Beispiel an, es sei eine dreiseitige Pyramide durch Grund- und Aufriss K_1 und K_2 (Fig. 58) gegeben. S_1 und S_2 seien die Projektionen des Kollineationscentrums, die Ge-

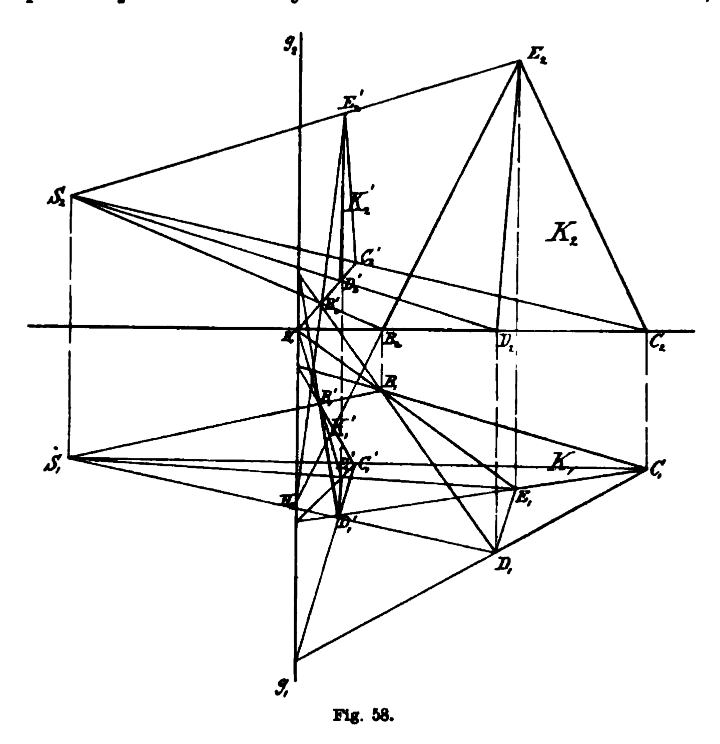


Fig. 58.

raden g_1 und g_2 die Projektionen der Kollineationsebene. Ferner sei der $(E_1 E_2)$ entsprechende Punkt (E_1', E_2') gegeben. Verlängern wir die Gerade $(E_1 B_1, E_2 B_2)$, bis sie die Kollineationsebene in dem Punkte (H_1, H_2) trifft, dann ist $(E_1' H_1, E_2' H_2)$ die entsprechende Gerade und diese wird von dem Strahl $(B_1 S_1, B_2 S_2)$ in dem $(B_1 B_2)$ entsprechenden Punkte (B_1', B_2') geschnitten u. s. f.

Man bemerkt leicht, dass jede Projektion unabhängig von der anderen für sich konstruiert werden kann.

4) Mit Benutzung des Fluchtpunktes $(A_1' A_2')$ der zur Kollineationsebene senkrechten Strahlen finden wir die Abbildung desselben Gegenstandes

auf folgende Weise (Fig. 59). Durch einen der gegebenen Eckpunkte, z. B. $(E_1 E_2)$ ziehen wir die Gerade $(E_1 M_1, E_2 M_2)$ senkrecht zur Kollineationsebene, welche sie in dem Punkte (M_1, M_2) treffen möge. Dann ist $(A_1' M_1,$

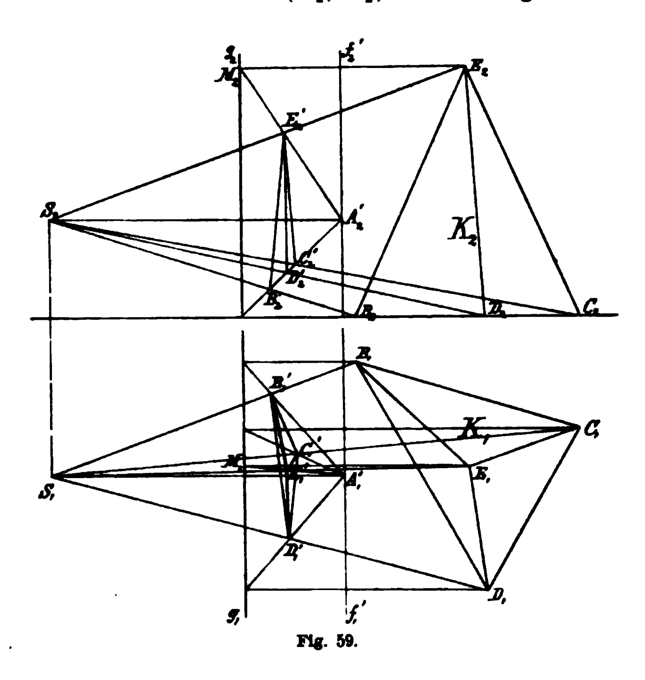


Fig. 59.

$A_2' M_2)$ die $(E_1 M_1, E_2 M_2)$ entsprechende Gerade. Sie wird von dem Strahl $(S_1 E_1, S_2 E_2)$ in dem Punkte $(E_1' E_2')$ geschnitten und dieser ist nun der $(E_1 E_2)$ entsprechende Punkt u. s. f.

5) Wir erkennen in den angegebenen Konstruktionen leicht diejenigen der Reliefperspektive und können deshalb, was die praktische Ausführung derselben anbelangt, auf Abschn. VII d. III. Teiles d. W. verweisen.

6) Liegt das Kollineationscentrum unendlich fern, so tritt Affinität ein. Auch dieser Fall ist in (VII, 16, III. Teil) berücksichtigt worden. Wenn zugleich noch die Kollineationsebene unendlich fern liegt, so sind je zwei entsprechende Gebilde kongruent.

7) Liegt nur die Kollineationsebene unendlich fern, so sind je zwei entsprechende Geraden parallel und entsprechende Gebilde ähnlich. Dies entspricht dem früheren Fall der perspektivischen Ähnlichkeit.

Wir wollen nun an Beispielen zeigen, wie wir die Kollineationen im Raume zur Lösung von Aufgaben verwenden können.

8) Einer durch Grundriss und Aufriss gegebenen dreiseitigen Pyramide (K_1, K_2), welche auf der ersten Projektionsebene steht, soll eine Kugel einbeschrieben werden (Fig. 60).

Aufl. Wir zeichnen die beiden Projektionen (M_1', M_2') irgend einer Kugel, welche die erste Projektionsebene berührt. An diese legen wir drei Berührungsebenen parallel zu den drei Seitenflächen der Pyramide. Diese und die erste Projektionsebene bilden eine der gegebenen ähnliche Pyramide,

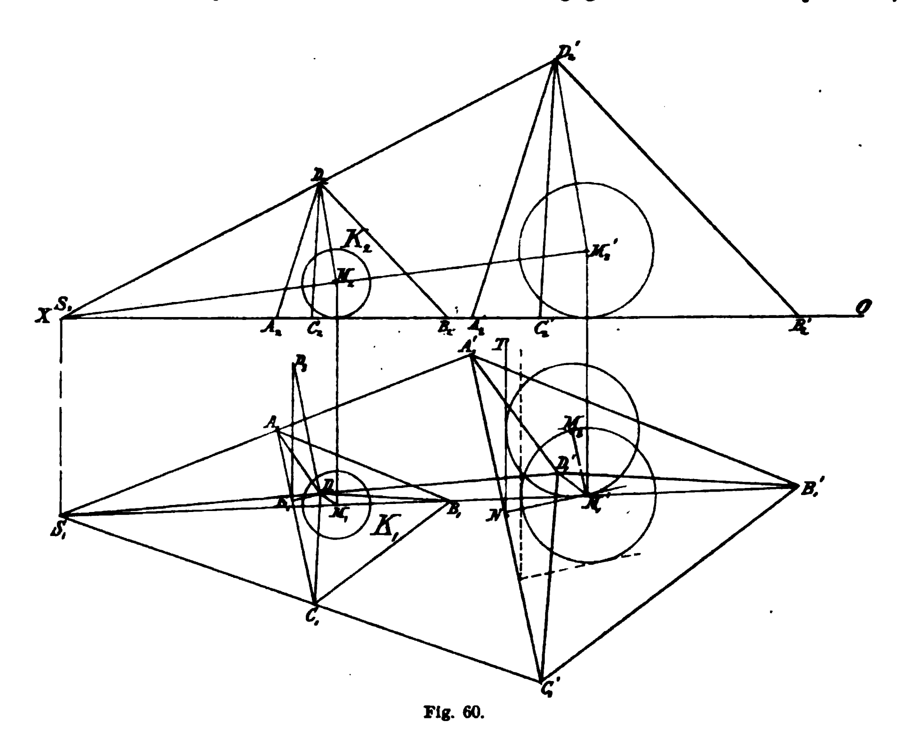


Fig. 60.

für welche die einbeschriebene Kugel gegeben ist. Zur Ausführung konstruieren wir den Neigungswinkel einer Seitenfläche der gegebenen Pyramide ($A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$) mit der ersten Projektionsebene. Wir ziehen $D_1E_1 \perp A_1C_1$, machen ferner D_1D_3 senkrecht zu D_1E_1 und gleich der aus der zweiten Projektion zu entnehmenden Höhe der Pyramide. Alsdann ist $\angle D_1E_1D_3$ der gesuchte Neigungswinkel. Durch den Mittelpunkt der angenommenen Kugel legen wir eine Ebene $M_1'N$, welche senkrecht zu A_1C_1 steht. Dieselbe schneidet die Kugel in einem grössten Kreise und diesen legen wir um die Spur $M_1'N$ in die erste Projektionsebene nieder. Ziehen wir nun die Tangente NT parallel zu D_3E_1, so trifft diese $M_1'N$ im Punkte N und durch den letzteren ziehen wir die Spur $A_1'C_1'$ der einen Berührungsebene parallel zu A_1C_1. In gleicher Weise finden wir die Spuren $A_1'B_1'$ und $B_1'C_1'$ der beiden anderen Ebenen.

(Anmerkung. Da NT und $M_1'N$ Tangenten des umgeklappten grössten Kreises sind, und der Umriss der Kugel im Grundriss durch einen Kreis von der gleichen Grösse

dargestellt wird, so kann man auch den letzteren benutzen, um die Lage der Spur $A_1'C_1'$ zu bestimmen. Man zieht, wie dies in Figur 60 durch punktierte Linien angedeutet, zwei Tangenten parallel zu D_1E_1 bez. D_2E_1 an diesen Kreis, dann werden sich dieselben ebenfalls auf $A_1'C_1'$ treffen.)

Die drei gefundenen Spuren schliessen nun das Dreieck $A_1'B_1'C_1'$ ein, welches die Grundfläche einer der gegebenen Pyramide ähnlichen Pyramide ist. Wir verbinden die ähnlich gelegenen Eckpunkte A_1 und A_1'; B_1 und B_1'; C_1 und C_1' und erhalten in dem Schnittpunkt dieser Geraden das Kollineationscentrum (S_1, S_2). Die Projektion der Spitze der neuen Pyramide liegt auf dem Strahle (S_1D_1) und die noch übrigen Kanten $A_1'D_1'$, $B_1'D_1'$, $C_1'D_1'$ sind parallel zu A_1D_1 bez. B_1D_1, C_1D_1 u. s. f.

Wir ziehen nun durch den Mittelpunkt M_1' der Kugel den Strahl (S_1M_1', S_2M_2'). Auf diesem liegt der Mittelpunkt der gesuchten Kugel. Der letztere wird bestimmt, wenn wir zu einer der Geraden, welche man von den Ecken der Pyramide nach ($M_1'M_2$) ziehen kann, z. B. zu $M_1'D_1'$, die entsprechende Gerade M_1D_1 parallel zieht. Der Halbmesser der gesuchten Kugel ergiebt sich aus dem leicht zu konstruierenden Aufriss als Entfernung der zweiten Projektion M_2 des Mittelpunktes von der Achse OX.

Das Umdrehungsellipsoid.

9) Findet zwischen einem Kreise und einer Ellipse Affinität statt und ist die Kollineationsachse AT parallel zu einer der Hauptachsen, z. B. zur grossen Achse DE der Ellipse (Fig. 61), so ist der Durchmesser des affinen

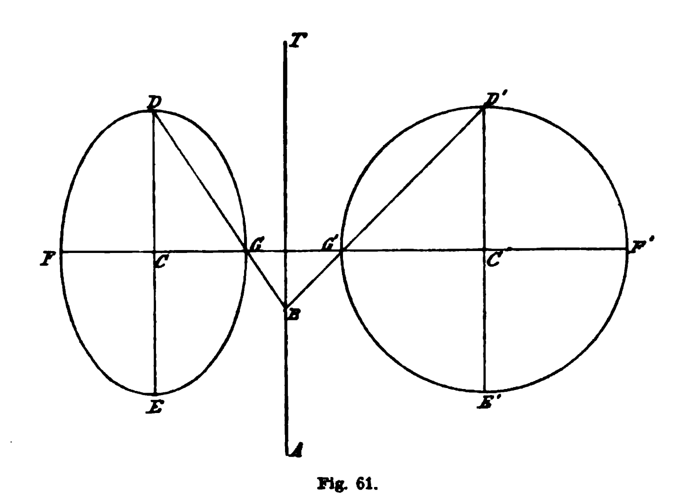


Fig. 61.

Kreises gleich DE. Entsprechende Sehnen der beiden Kurven, z. B. DG und D'G' als Verbindungslinie der Endpunkte der Hauptachsen, treffen in

demselben Punkte B der Achse zusammen. Wird nun die ganze Figur um CC′ gedreht, so beschreiben Ellipse und Kreis ein Umdrehungsellipsoid bez. eine Kugel, für welche nun ebenfalls Affinität stattfindet. Die Kollineationsachse durchläuft bei dieser Drehung die Kollineationsebene. Jeder zu der letzteren parallele Schnitt des Ellipsoids ist ein Kreis, welcher seinem entsprechenden Kreise auf der Kugel gleich ist.

Hiernach können wir leicht die Aufgabe lösen; den Durchschnitt einer Geraden mit einem Umdrehungsellipsoid zu finden (Fig. 62).

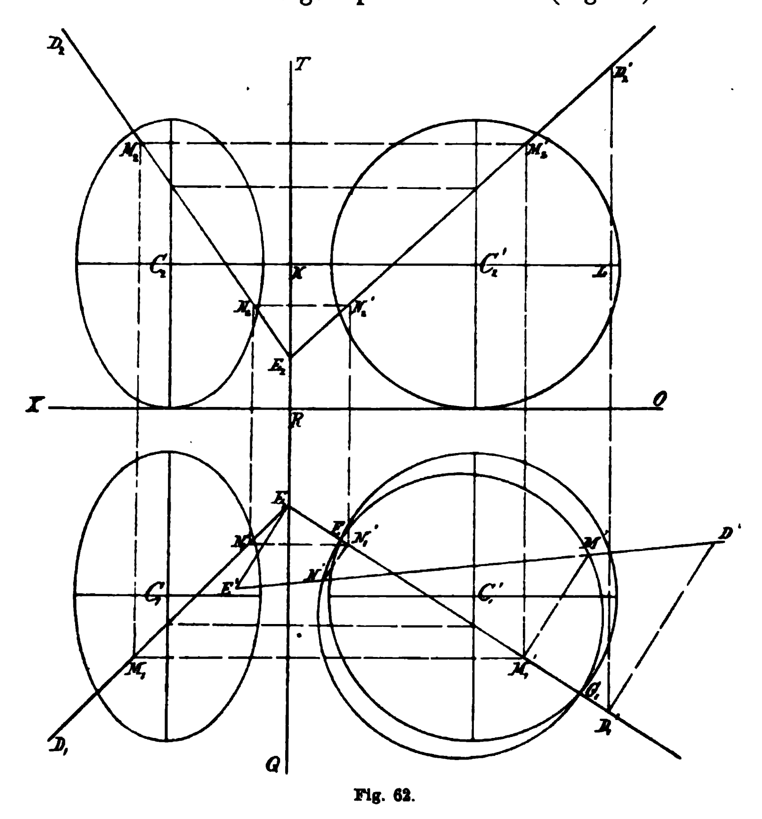


Fig. 62.

Es seien die beiden kongruenten Ellipsen C_1 und C_2, deren grosse Achsen in eine Gerade fallen, welche senkrecht zu OX steht, die beiden Projektionen eines Umdrehungsellipsoids, welches also durch Drehung der Ellipse um ihre kleine Achse entstanden ist. Ferner stellen die Kreise (C_1', C_2') die beiden Projektionen der affinen Kugel dar, welche wie in Fig. 61 konstruiert ist. Die Projektionen der gegebenen Geraden, deren Durchschnitt mit dem Ellipsoid bestimmt werden soll, seien D_1E_1 und D_2E_2. Endlich seien QR und RT, welche beide senkrecht zu OX stehen, die Projektionen der Kollineationsebene.

Zu jeder der beiden Projektionen D_1E_1 und D_2E_2 konstruieren wir die entsprechende Gerade, dann erhalten wir $D_1'E_1$ und $D_2'E_2$ als die Projektionen derjenigen Geraden, welche der gegebenen Geraden entspricht. Um den Durchschnitt von $(D_1'E_1, D_2'E_2)$ mit der Kugel zu bestimmen, legen wir durch diese Gerade eine Ebene, welche senkrecht zur ersten Projektionsebene steht. Dieselbe schneidet die Kugel in einem Kreise vom Durchmesser F_1G_1. Um F_1G_1 drehen wir den Kreis und die Gerade $(D_1'E_1, D_2'E_2)$ bis in eine durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Ebene, welche parallel zur ersten Projektionsebene ist. Der Kreis erscheint dann in wahrer Grösse mit F_1G_1 als Durchmesser. Ferner errichten wir in E_1 und in einem zweiten Punkte D_1' der Projektion $D_1'E_1$ Senkrechten zu der letzteren und tragen auf denselben die Längen $E_1E' = KE_2$ bez. $D_1'D' = D_2'L$ ab. Dann stellt die Verbindungslinie $D'E'$ die umgeklappte Gerade dar und diese schneidet jenen Kreis in M' und N'. Drehen wir die Ebene mit Kreis und Gerade wieder in ihre Lage zurück, so erhalten wir die ersten Projektionen M_1' und N_1' der räumlichen Durchschnittspunkte durch zwei von M' und und N' auf $D_1'E_1$ gefällten Senkrechten. Die zweiten Projektionen M_2' und N_2' werden in bekannter Weise gefunden. Endlich ziehen wir von M_1', N_1', M_2', N_2' die Affinitätsstrahlen, und diese bestimmen auf (D_1E_1, D_2E_2) die Projektionen $(M_1\ M_2)$, (N_1N_2) der gesuchten Durchschnittspunkte.

Anmerkung. Zeichnet man um die grosse Achse der Ellipse als Durchmesser eine Kugel, deren Mittelpunkt mit demjenigen des Ellipsoids zusammenfällt, so berührt dieselbe das letztere in einem grössten Kreise. Diese Kugel und das Ellipsoid stehen, wie man leicht sieht, ebenfalls in affiner Beziehung und die Ebene des Berührungskreises ist die Kollineationsebene. Man löse die vorstehende Aufgabe auch mit Hülfe dieser Kugel.

Leicht erkennt man jetzt auch wie die in Abschn. VIII d. I. Teiles hergeleiteten Gesetze sich mit Hülfe des Begriffes der Kollineation entwickeln lassen.

Das dreiachsige Ellipsoid.

10) Es seien AB, DE und FG (Fig. 63) drei durch einen Punkt C gehende aufeinander senkrecht stehende Geraden. Durch je zwei derselben legen wir eine Ebene und zeichnen in jeder Ebene eine Ellipse, deren Mittelpunkt C ist. Die halben Achsen dieser Ellipsen seien $AC = BC = a$, $CD = CE = b$, $CF = CG = c$. Bewegen wir die Ellipse DFEG parallel mit ihrer Ebene so, dass der Mittelpunkt C die Gerade AB durchläuft, die Hauptachsen sich jedoch stetig derart ändern, dass ihre Endpunkte stets auf den beiden andern Ellipsen liegen, so beschreibt die bewegliche Ellipse eine krumme Oberfläche, welche man das dreiachsige Ellipsoid nennt.

Die bewegliche Ellipse ändert ihre Grösse; sie behält aber fortwährend dieselbe Gestalt. Nehmen wir zum Beweise an, die Ellipse liege in der Entfernung CK vom Mittelpunkt und ihre halben Achsen seien in dieser

Lage b′ und c′. Beschreiben wir um AB als Durchmesser einen Kreis, welcher in der Ebene AEBD liegt, so verhält sich (IV, 5, I. Teil):

$$b' : KL = b : a;$$

ebenso wenn wir uns die Ellipse AFB um AB in dieselbe Ebene hineingedreht denken:

$$c' : KL = c : a.$$

Aus diesen beiden Proportionen folgt aber:

$$b' : c' = b : c,$$

d. h. das Achsenverhältnis der beweglichen Ellipse bleibt stets dasselbe.

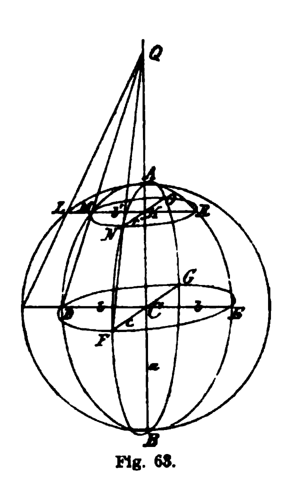


Fig. 63.

Ziehen wir die Geraden DM und FN, so treffen diese in demselben Punkte Q die Achse AB. Q kann auch als Spitze eines Kegels betrachtet werden, dessen Grundfläche die Ellipse DFEG ist. Dann erscheint die Ellipse OMNR als ein zur Grundfläche paralleler Schnitt des Kegels.

Leicht ergiebt sich auch, dass die Oberfläche des Ellipsoids von der um AB sich drehenden Ellipse AFBG durchlaufen wird, wenn bei der Drehung die Achse AB unverändert bleibt, die andere Hauptachse aber sich derart ändert, dass sie stets dem entsprechenden Durchmesser der Ellipse DFEG gleich ist.

Weitere Eigenschaften des dreiachsigen Ellipsoids können wir leicht durch Kollineation auffinden. In Fig. 64 ist das Ellipsoid durch zwei Projektionen dargestellt, wobei vorausgesetzt ist, dass zwei Hauptachsen (2a u. 2b) parallel zur zweiten und die beiden Hauptachsen 2b und 2c parallel zur ersten Projektionsebene sind. Die Umrisse der beiden Projektionen sind Ellipsen mit den entsprechenden Hauptachsen. Ziehen wir in dem Endpunkte (A_1, A_2) der Achse 2b die Tangenten XT und XU an die Grundriss- und Aufrissellipse und konstruieren eine neue Ellipse mit den Achsen $DE = 2a$ und $A_2F = 2c$, welche die Tangente und damit auch die Aufrissellipse ebenfalls in A_2 berührt, dann steht diese Ellipse zu der Aufrissellipse in affiner Beziehung und die Tangente XT ist die Affinitätsachse.

Ferner zeichnen wir im Grundriss einen Kreis, welcher die Grundrissellipse in dem Endpunkte A_1 der Achse 2b berührt und dessen Durchmesser $= 2c$ ist, dann steht dieser Kreis mit der Grundrissellipse ebenfalls in affiner Beziehung und nun ist XU Affinitätsachse.

Diesen Kreis und die vorhin gezeichnete Ellipse können wir nun als Grundriss und Aufriss eines Umdrehungsellipsoids betrachten, welches zu dem gegebenen dreiachsigen Ellipsoid in affiner Beziehung steht. TX und

UX stellen alsdann die Projektionen der Kollineationsebene dar. Legen wir durch die beiden Ellipsoide eine Ebene, welche parallel zur erstern Projektionsebene ist, so wird das dreiachsige Ellipsoid in einer Ellipse und das

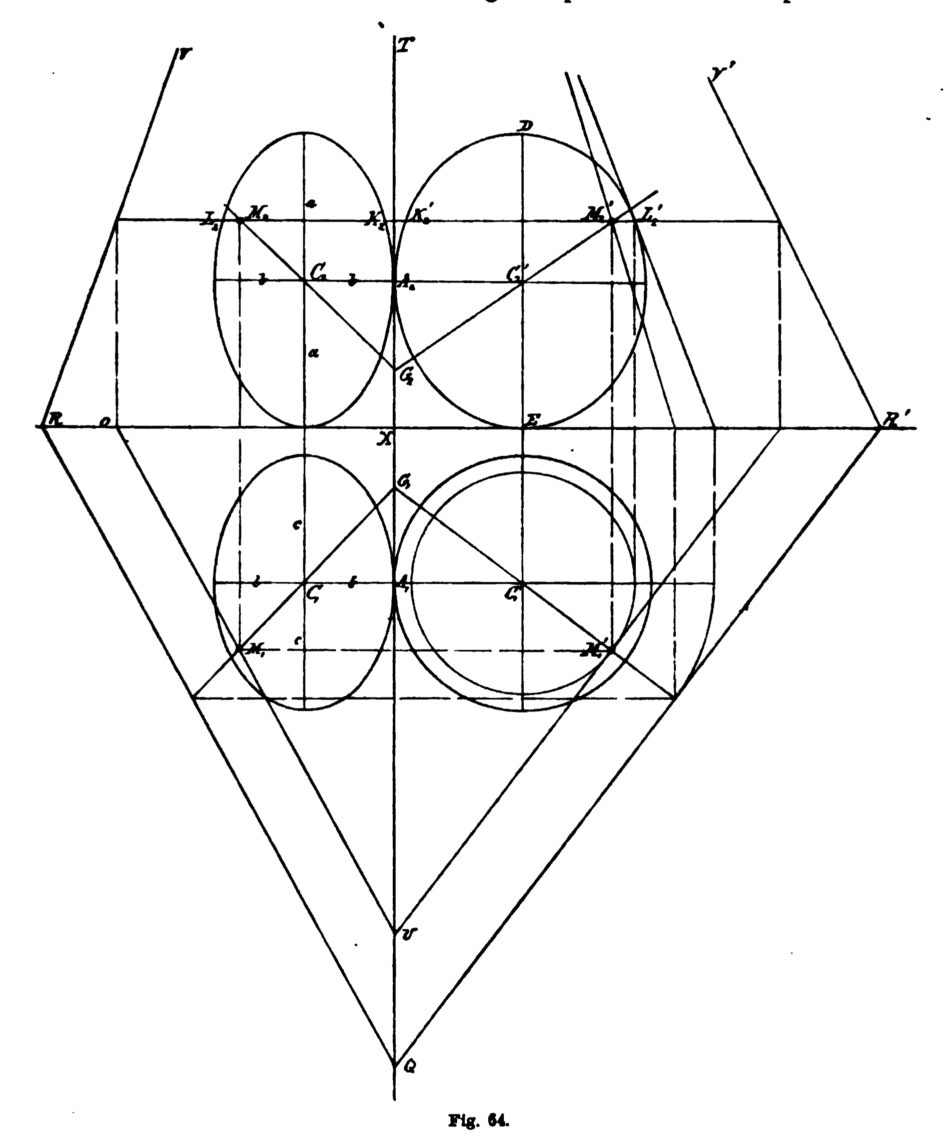


Fig. 64.

Umdrehungsellipsoid in einem Kreise geschnitten, dessen Durchmesser gleich der mit der Kollineationsebene parallelen Hauptachse jener Ellipse ist.

Ist die erste Projektion M_1 eines Punktes, welcher auf dem dreiachsigen Ellipsoid liegt, gegeben, so können wir die zweite Projektion jetzt auf

folgende Weise bestimmen. Wir ziehen die Gerade $M_1 C_1$ und verlängern dieselbe bis G_1. Die $C_1 G_1$ entsprechende Gerade ist $C_1' G_1$, auf welcher wir den M_1 entsprechenden Punkt M_1' durch den Affinitätsstrahl $M_1 M_1'$ bestimmen. Durch M_1' legen wir einen Kreis mit dem Mittelpunkt C_1'. Sehen wir diesen als auf dem Umdrehungsellipsoid liegend an, so finden wir als zweite Projektion desselben die mit OX parallele Gerade $K_2' L_2'$, auf welcher auch die zweite Projektion M_2' des Punktes M_1' liegt. Dem Kreise entspricht nun auf dem dreiachsigen Ellipsoid eine Ellipse, deren zweite Projektion die Gerade $K_2 L_2$ ist. Auf dieser findet man die gesuchte zweite Projektion M_2 des Punktes durch die von M_1 gezogene Senkrechte zur Achse OX. (Oder man zieht die Gerade $M_2' G_2$ durch C_2' und zeichnet die entsprechende Gerade $G_2 C_2$, welche ebenfalls durch M_2 geht.) M_1 stellt auch die erste Projektion eines zweiten Punktes des dreiachsigen Ellipsoids dar, dessen zweite Projektion in gleicher Weise bestimmt werden kann.

Soll durch den Punkt $(M_1 M_2)$ eine Berührungsebene an das dreiachsige Ellipsoid gelegt werden, so bestimmen wir eine solche für den entsprechenden Punkt $(M_1' M_2')$ des Umdrehungsellipsoids nach (VI, 23, I. Teil). Sind QR' und $R'V'$ die Spuren dieser Ebene, so finden wir als Spuren der gesuchten Berührungsebene leicht die entsprechenden Geraden QR und RV.

11) Nach (VIII, 1, I. Teil) ist jeder ebene Schnitt eines Umdrehungsellipsoids eine Ellipse und parallele Schnitte desselben sind stets ähnliche Ellipsen. Folglich gilt das gleiche auch für das affine dreiachsige Ellipsoid. Es entsteht noch die Frage, ob das letztere auch von einer Ebene in einem Kreise geschnitten werden kann. Ist $a > b > c$ und haben wir das Ellipsoid (Fig. 65) so gestellt, dass die Achse $2b$ senkrecht zu P_2 steht, dann können wir mit dem Halbmesser b um C_2 als Mittelpunkt einen Kreis beschreiben, welcher die Ellipse in den Punkten DEF und G schneidet. Die Geraden DE und FG stellen alsdann die Projektionen zweier Schnitte dar, deren Hauptachsen gleich sind ($= 2b$). Folglich haben diese Schnitte Kreisform. Alle hierzu parallelen Schnitte sind denselben ähnlich, folglich giebt es zwei Scharen kreisförmiger Schnitte.

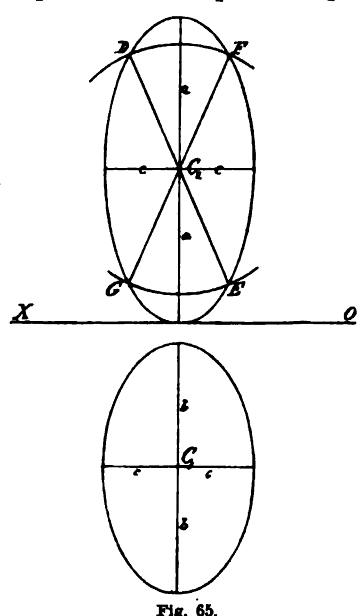


Fig. 65.

Aufgabe. Den Durchschnitt einer Kugel mit einem dreiachsigen Ellipsoid zu finden.

Anl. zur Aufl. Wir suchen die Lage eines Kreisschnittes des Ellipsoids und durchschneiden beide Körper mittelst Ebenen, welche diesem Kreisschnitte parallel sind. Es wird hierzu erforderlich sein, eine neue Projektionsebene zu Hülfe zu nehmen, welche ebenfalls jenen Kreisschnitten parallel ist.

12) Der eben bewiesene Satz giebt uns Anlass zur Erklärung einer anderen Entstehungsweise des dreiachsigen Ellipsoids. DE und HK seien zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse. Um DE wird ein Kreis beschrieben, dessen Ebene senkrecht zur Ebene der Ellipse steht. Wird dieser Kreis parallel mit sich selbst so bewegt, dass sein Mittelpunkt HK durchläuft und sein Umfang stets die gegebene Ellipse schneidet, so beschreibt derselbe ein dreiachsiges Ellipsoid.

In (VIII, 2 u. 3 d. I. Teils) ist der Nachweis geführt, dass ein Umdrehungsellipsoid von einer Cylinderfläche, sowie auch von einer Kegelfläche in einem Kegelschnitt berührt wird. Dasselbe Gesetz ergiebt sich demnach durch Affinität auch für das dreiachsige Ellipsoid.

Aufgaben.

13) Die Durchschnittspunkte einer Geraden mit einem dreiachsigen Ellipsoid zu finden.

Anl. z. Aufl. Man verwandelt das gegebene Ellipsoid und die gegebene Gerade durch Affinität in ein Umdrehungsellipsoid und die entsprechende Gerade, und diese beiden wiederum in eine Kugel und eine Gerade. Die Durchschnittpunkte der beiden letzteren sind leicht zu finden und durch die Affinitätsstrahlen wieder auf die gegebenen Stücke zu übertragen. Das Ellipsoid braucht hierbei nur durch seine Hauptachsen gegeben zu sein, die gesuchten Durchschnittspunkte lassen sich dann durch Zeichnen von geraden Linien oder Kreisen bestimmen. Das Zeichnen der Umrisse der vorkommenden Ellipsoide ist nicht nötig.

14) An ein dreiachsiges Ellipsoid Berührungsebenen zu legen, welche einer gegebenen Geraden parallel sind. (Die Kurve der Berührungspunkte ist zu zeichnen.)

15) Von einem Punkte aus Berührungsebenen an ein Ellipsoid zu legen. Auch in diesem Falle ist die Berührungskurve zu zeichnen.

Man löst diese beiden Aufgaben ebenfalls leicht durch kollineare Umwandlung. Die erhaltenen Kurven bedeuten auch die Lichtgrenzen auf dem Ellipsoid bei Erleuchtung durch parallele Strahlen bez. durch Strahlen, welche von einem Punkte ausgehen.

16) Durch eine gegebene Gerade Berührungsebenen an ein dreiachsiges Ellipsoid zu legen.

17) Den Durchschnitt eines Ellipsoids mit einer Ebene zu finden.

Anl. zur Aufl. Wir nehmen bei der bisher benutzten Lage des drei-

achsigen Ellipsoids an, es seien QR und RT die Spuren einer beliebigen Ebene (Fig. 66). Wir konstruieren nun, wie in Fig. 64, das affine Umdrehungsellipsoid und bestimmen zugleich die den Spuren QR und RT entsprechenden Geraden QR′ und R′T. Die beiden letzteren sind dann die Spuren derjenigen Ebene, welche der gegebenen entspricht. Der Durchschnitt dieser Ebene mit dem Umdrehungsellipsoid wird nach (IV, 41, I. Teil) bestimmt und nun affin auf das gegebene Ellipsoid übertragen. Die in

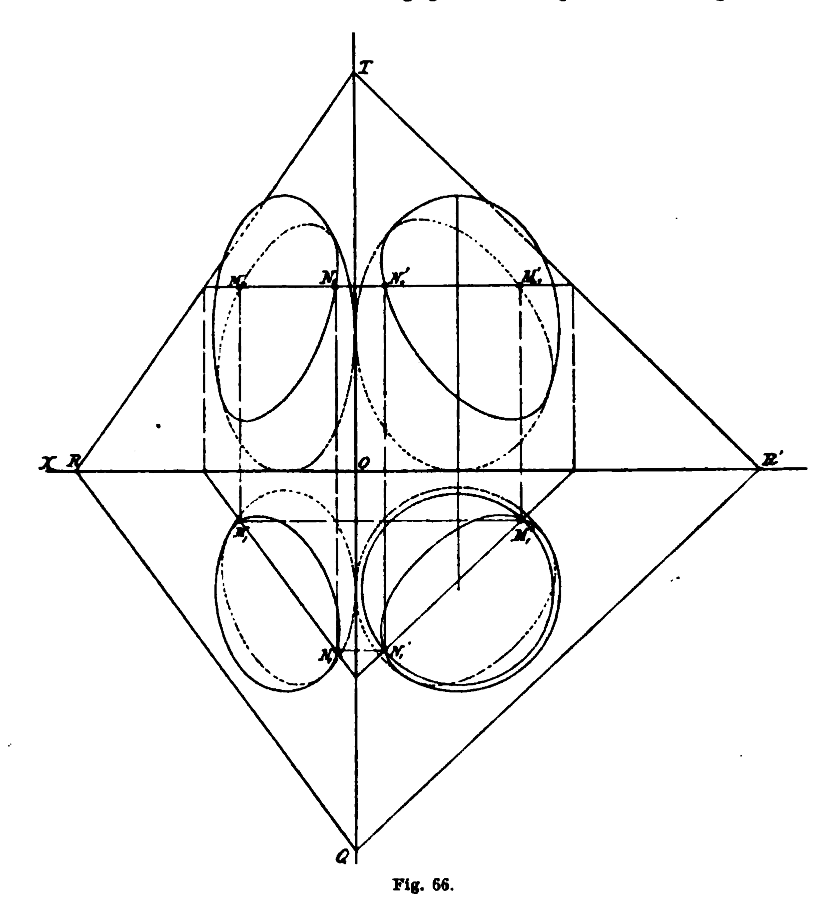


Fig. 66.

Fig. 66 ausgeführte Konstruktion ist so einfach, dass diese Andeutungen vollständig genügen werden.

Andere Lösung.

Der Durchschnitt kann ohne kollineare Umwandlung auch leicht unter Zuhilfenahme der Kreisschnitte des Ellipsoids konstruiert werden (Fig. 67). Stellt die Gerade $A_2 B_2$ die zweite Projektion eines solchen Kreisschnittes dar, so hat die erweiterte Ebene desselben die Spuren TU und UQ, von

denen die letztere bei unserer Annahme der Stellung des Ellipsoids senkrecht zur Achse OX steht. Damit der Kreisschnitt in wahrer Gestalt erscheint, projicieren wir denselben auf eine Ebene T′U′, welche parallel zu A_2B_2 und senkrecht zur zweiten Projektionsebene steht. Auf diese Ebene projicieren wir das Ellipsoid mit einer Reihe von Kreisschnitten und legen hierauf die Ebene in die zweite Projektionsebene nieder. Alsdann haben wir noch die Schnittlinien der Kreisschnitte mit der Ebene QRU auf die neue Ebene zu projicieren, wodurch wir eine Reihe der gesuchten Punkte

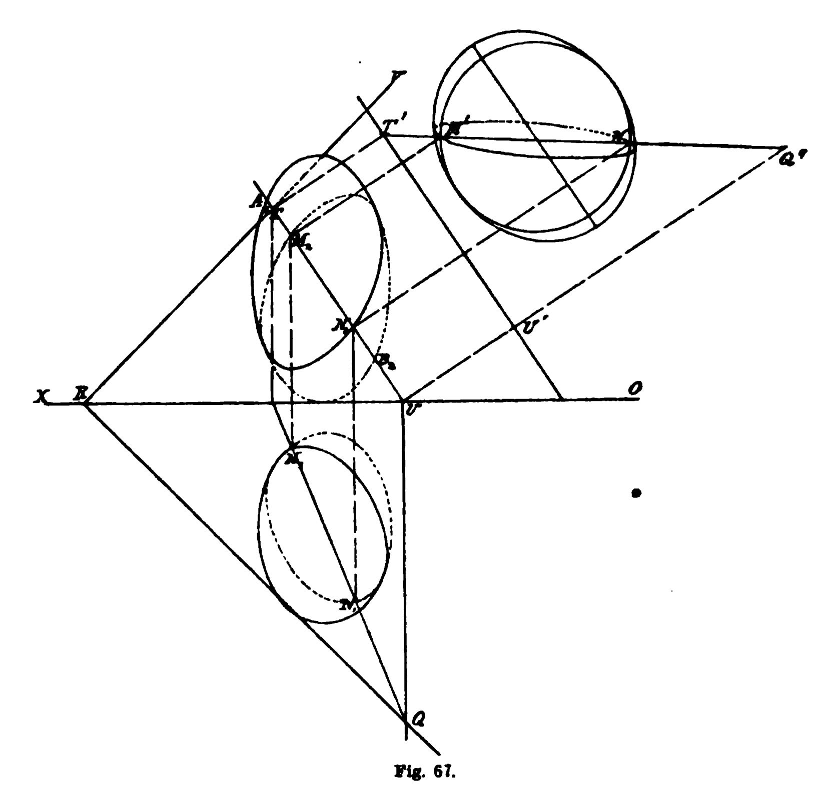


Fig. 67.

erhalten. Leicht ergeben sich daraus durch Zurückprojicieren die ersten und zweiten Projektionen der Durchschnittspunkte.

Übrigens mag noch erwähnt werden, dass man zur Bestimmung von Durchschnittspunkten auch solche elliptische Schnitte benutzen kann, die in einer Projektion kreisförmig erscheinen.

Das Paraboloid.

16) Die Parabel können wir als eine Ellipse mit einem unendlich fernen Brennpunkte betrachten und schliessen demnach, dass durch Drehung einer

Parabel um ihre Achse eine Fläche, das sog. Umdrehungsparaboloid beschrieben wird, welches ähnliche Eigenschaften wie das Umdrehunpsellipsoid besitzt. Insbesondere ist ein beliebiger Schnitt dieser Fläche im Allgemeinen eine Ellipse, welcher in einen Kreis übergeht, wenn derselbe senkrecht zur Achse steht. Ein Schnitt, welcher durch die Achse geht oder parallel zu derselben ist, wird zur Parabel.

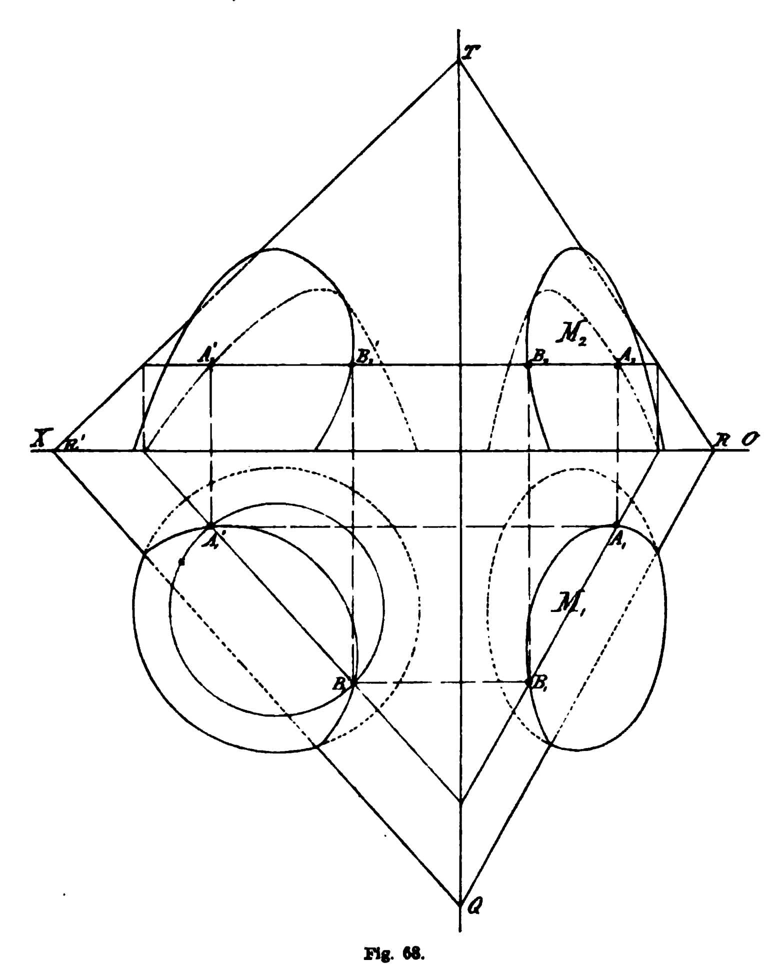


Fig. 68.

Durch Affinität können wir das Umdrehungsparaboloid in das „elliptische Paraboloid“ verwandeln, dessen Schnitte senkrecht zur Achse der Fläche nicht mehr Kreise, sondern Ellipsen sind (Fig. 68).

Das elliptische Paraboloid hat, wie das dreiachsige Ellipsoid die Eigenschaft, dass ein Schnitt der Fläche im Allgemeinen eine Ellipse ist, welcher aber in eine Parabel übergeht, wenn der Schnitt durch die unendliche Achse

geht oder parallel mit derselben ist. Ferner giebt es auch auf dieser Fläche zwei Scharen von Kreisschnitten, deren Lage in gleicher Weise wie beim Ellipsoid bestimmt werden kann. In Fig. 68 ist noch die Konstruktion des Durchschnittes der Ebene QRT mit dem elliptischen Paraboloid $M_1 M_2$ angegeben und zwar wie in 15) durch affine Umwandlung der Fläche in ein Umdrehungsparaboloid.

(Die Achse der Parabel ist hierbei senkrecht zu P_1 vorausgesetzt und die eine Hauptachse eines zur Achse der Parabel senkrechten elliptischen Schnittes parallel zu OX).

Aufgaben.

17) Die Durchschnittspunkte einer Geraden mit einem elliptischen Paraboloid zu finden.

18) Die erste Projektion eines Punktes, welcher auf einem gegebenen Paraboloid liegt, ist bekannt. Man soll die zweite Projektion des Punktes finden.

19) Durch einen auf dem Paraboloid liegenden Punkt M die Berührungsebene zu legen.

20) Von einem gegebenen Punkte ausserhalb Berührungsebenen an ein Paraboloid zu legen. Die Berührungskurve (Lichtgrenze bei centraler Beleuchtung) ist zu zeichnen.

21) An ein Paraboloid Berührungsebenen zu legen, welche einer gegegebenen Geraden parallel sind. Die Berührungskurve (Lichtgrenze bei Erleuchtung durch Parallelstrahlen) soll ermittelt werden.

22) Durch eine gegebene Gerade soll an ein Umdrehungsparaboloid eine Berührungsebene gelegt werden.

Aufl. Die Lösung dieser Aufgabe soll uns die Nützlichkeit des Begriffes der Kollineation im Allgemeinen für ähnliche Probleme vor Augen führen. Nach A, 20 ist die einem Kreise kollineare Figur eine Parabel, wenn das Kollineationscentrum S_2 (Fig. 69) im Umfange des Kreises, die Kollineationsachse die Tangente in S_2 und die zu dieser parallele zweite Tangente die Fluchtlinie des Kreises ist. Denken wir uns den Kreis und die Parabel um die zur ersten Projektionsebene senkrechte Achse der letzteren gedreht, so beschreiben der Kreis und die Parabel eine Kugelfläche bez. ein Umdrehungsparaboloid. Die Kollineationsachse durchläuft die Kollineationsebene und die zu ihr parallele Tangente die Fluchtebene, welch letztere wir in Fig. 69 als mit der ersten Projektionsebene zusammenfallend angenommen haben.

Es sei nun $(A_1 B_1, A_2 B_2)$ die gegebene Gerade, durch welche die Berührungsebene an das Paraboloid gelegt werden soll. Wir ermitteln die entsprechende Gerade, durch diese legen wir die Berührungsebene an die Kugel, dann ist die entsprechende Ebene die gesuchte.

Ziehen wir demnach den Strahl $(S_1 D_1, S_2 D_2)$ parallel zu $(A_1 B_1, A_2 B_2)$,

so entspricht der Punkt ($D_1 D_2$), in welchem derselbe die Fluchtebene trifft, dem unendlich fernen Punkte der Geraden ($A_1 B_1$, $A_2 B_2$). Trifft demnach letztere die Kollineationsebene in (C_1, C_2), so entspricht die durch (C_1, C_2) und (D_1, D_2) bestimmte Gerade der gegebenen ($A_1 B_1$, $A_2 B_2$). Durch den Mittelpunkt der Kugel legen wir die zur ersten Projektionsebene P_1 parallele

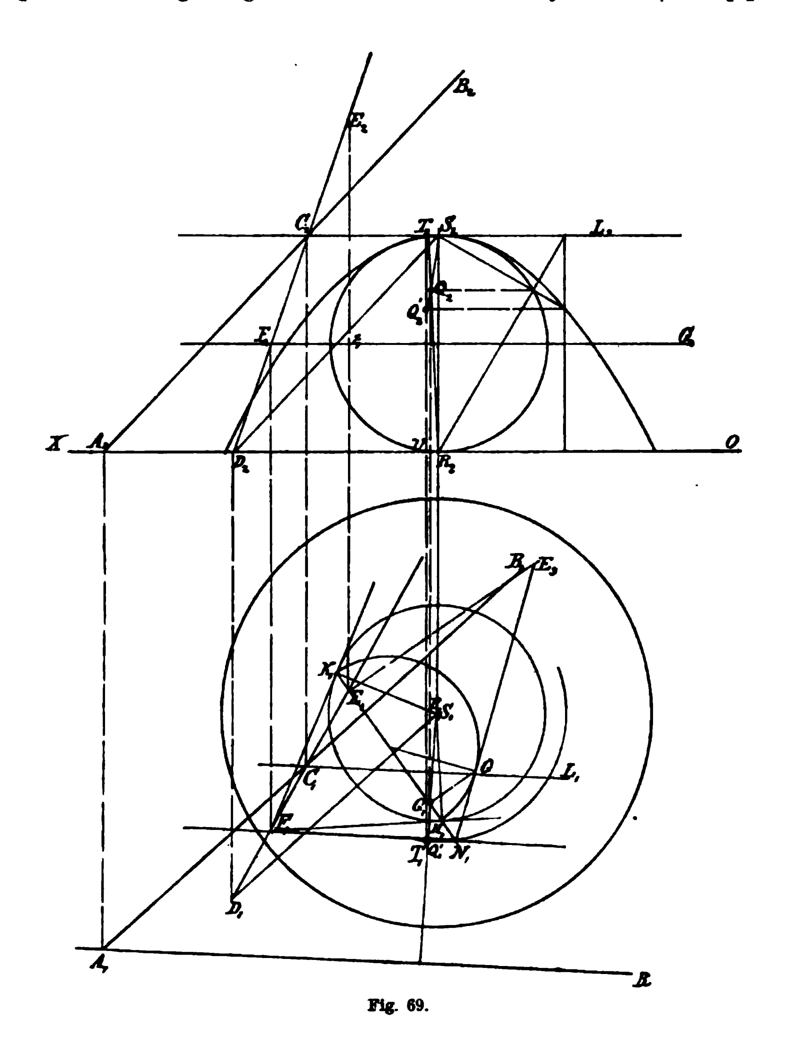


Fig. 69.

Ebene, welche im Aufriss durch die Gerade $F_2 G_2$ dargestellt wird. Wir verfahren jetzt nach (VI, 14, I. Teil). Den Punkt $F_1 F_2$, in welchem jene Ebene von ($C_1 D_1$, $C_2 D_2$) getroffen wird, betrachten wir als Spitze eines Kegels, welcher die Kugel einschliesst und berührt. Die beiden von F_1 an den Umriss des Grundrisses der Kugel gezogenen Tangenten stellen die

äusseren Begrenzungslinien des Kegels dar und die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte H_1 und K_1 bedeutet die Projektion des Berührungskreises. Die Ebene des letzteren wird nun von (C_1D_1, C_2D_2) in dem Punkte $(E_1 E_2)$ getroffen. Drehen wir den Berührungskreis um seinen zu der ersten Projektionsebene P_1 parallelen Durchmesser H_1K_1 soweit, bis derselbe parallel zu P_1 liegt, so gelangt der Punkt $(E_1 E_2)$ nach E_3 (wobei $E_1 E_3 = E_2 \xi$ und $\perp H_1K_1$). Von E_3 ziehen wir die Tangente E_3N_1 an den umgeklappten Kreis. Diese trifft H_1K_1 in N_1 und berührt in Q. Richten wir die niedergeklappte Ebene wieder auf, so stellt E_1N_1 die Projektion der aufgeklappten Tangente und Q_1 diejenige ihres Berührungspunktes dar $(QQ_1 \perp H_1K_1)$. Durch diese Tangente und durch die Gerade (D_1E_1, D_2E_2) legen wir eine Ebene, welche die Kegelfläche und damit auch die Kugel berührt. Diese Berührungsebene schneidet aber die zu P_1 parallele Ebene F_2G_2 in einer Geraden, deren erste Projektion F_1N_1 ist, während die zweite Projektion derselben in F_2G_2 liegt. Folglich schneidet sie auch die Kollineationsebene in einer zu F_1N_1 parallelen Geraden. Die erste Projektion C_1L_1 dieser Geraden geht dnrch C_1 und die zweite Projektion C_2L_2 fällt mit C_2S_2 zusammen. Da nun die soeben gefundene Berührungsebene und die gesuchte entsprechende Ebene sich in derselben Geraden in der Kollineationsebene schneiden müssen, so ist nun die Lage der gesuchten Berührungsebene des Paraboloids bestimmt durch die beiden sich schneidenden Geraden (A_1B_1, A_2B_2) und (C_1L_1, C_2L_2). Die erste Spur A_1R dieser Ebene geht durch A_1 und dieselbe ist, wie man leicht sieht, parallel zu C_1L_1. Die zweite Spur ist in unserer Zeichnung nicht erreichbar, kann aber leicht auf bekannte Weise gefunden werden. Um noch den Berührungspunkt auf dem Paraboloid zu bestimmen, haben wir den (Q_1, Q_2) entsprechenden Punkt zu finden. Durch (Q_1, Q_2) legen wir die Gerade (R_1Q_1, R_2Q_2) und verlängern dieselbe, bis sie die Kollineationsebene in $(T_1 T_2)$ trifft. Dieser Geraden entspricht eine zur Achse S_2R_2 parallele Gerade T_2U, deren erste Projektion der Punkt T_1 ist. Der Strahl S_2Q_2 trifft nun T_2U in Q_2', der zweiten Projektion des gesuchten Berührungspunktes, dessen erste Projektion Q_1' mit T_1 zusammenfällt.

Die Bestimmung der zweiten noch möglichen Berührungsebene können wir der eigenen Übung überlassen.

Da zu einem elliptischen Paraboloid immer ein demselben affines Umdrehungsparaboloid gefunden werden kann, so folgt hieraus nun auch die Lösung der Aufgabe: „Durch eine gegebene Gerade an ein elliptisches Paraboloid eine Berührungsebene zu legen“, deren Ausführung wir dem Studierenden überlassen können.

Das zweischalige Hyperboloid.

23) Nehmen wir an, es sei die einem Kreise K (Mittelpunkt C) kollineare Figur zu bestimmen (Fig. 70). Das Kollineationscentrum sei S, die durch C gehende und zu CS senkrechte Gerade i die Fluchtlinie und die Tangente t in A die Kollineationsachse. Da die Fluchtlinie i den Kreis trifft, so ist die demselben entsprechende Figur eine Hyperbel, deren Hauptachse in der durch C und S gehenden Geraden liegt. Drehen wir die ganze Figur um die letztere, so beschreibt der Kreis eine Kugel und die Hyperbel eine aus zwei getrennten Teilen bestehende Umdrehungsfläche, welche ein zweischaliges Hyperboloid genannt wird. Zwischen dem letzteren und der Kugel besteht Kollineation. Die Tangente t beschreibt bei der Umdrehung die Kollineationsebene und die Gerade i die Fluchtebene.

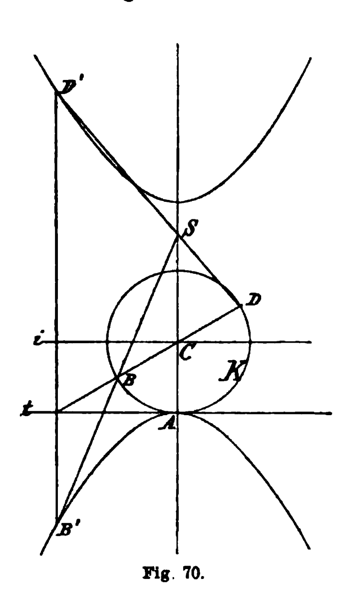


Fig. 70.

Wir erkennen hieraus leicht, dass wir die für das Paraboloid in No. 17—22 angeführten Aufgaben auch in gleicher Weise beim Hyperboloid behandeln können, und empfehlen dem Anfänger die Lösung derselben.

Durch Affinität können wir (ähnlich wie in 16) das Umdrehungshyperboloid in ein **elliptisches Hyperboloid** verwandeln, in welchem alle zur Hauptachse senkrechten Schnitte ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen werden. Die Fläche hat alsdann die Eigenschaften:

1) Dass dieselbe von einer Ebene in einer Ellipse Parabel oder Hyperbel geschnitten werden kann.

2) Dass sie ferner zwei Scharen von Kreisschnitten enthält.

3) Dass parallele Schnitte ähnlich sind.

Die Lösung der oben bezeichneten Aufgaben für das elliptische Hyperboloid können wir hiernach ebenfalls dem Studierenden überlassen.

Werden die beiden Asymptoten einer Hyperbel gleichzeitig mit derselben um die Hauptachse gedreht, so beschreiben diese die Mantelfläche des sog. Asymptotenkegels. Für diesen lassen sich folgende Eigenschaften aufstellen.

Auf jeder Geraden g, welche das Hyperboloid und den Asymptotenkegel schneidet, werden von diesen beiden Flächen je zwei gleiche Abschnitte begrenzt. Denn eine durch g und den Mittelpunkt des Hyperboloids gelegte Ebene schneidet die beiden Flächen in einer Hyperbel bez. deren Asymptoten, für welche der Satz, wie später bewiesen wird, gültig ist.

Jede Berührungsebene E des Hyperboloids schneidet den Asymptotenkegel in einer Ellipse, deren Mittelpunkt der Berührungspunkt der Ebene E ist.

Das Hyperboloid und der Asymptotenkegel werden von einer Ebene E in zwei konzentrischen Ellipsen oder Hyperbeln oder in Parabeln geschnitten, wenn E nicht durch den Mittelpunkt geht.

Dieselben Gesetze gelten, wie man leicht übersieht, auch für das elliptische Hyperboloid. Wir können als besonderen Fall noch hinzufügen, dass das elliptische Hyperboloid und sein Asymptotenkegel auch zwei Scharen konzentrischer Kreisschnitte enthalten, welche bei dem Umdrehungshyperboloid in eine einzige senkrecht zur Hauptachse desselben stehende Schar zusammenfallen.

II. Abschnitt.

Projektivische Punktreihen und Strahlenbüschel.

1) Die Gesamtheit aller Strahlen, welche durch einen Punkt S gehen und in einer Ebene liegen, heisst ein Strahlenbüschel. Der Punkt S wird der Mittelpunkt desselben genannt. Zieht man denjenigen Strahl des Büschels, welcher durch einen bestimmten Punkt A der Ebene geht, so wird A durch diesen Strahl projiciert. Eine beliebige Gerade g' der Ebene wird von dem projicierenden Strahle in dem Punkte A', der Projektion des Punktes A auf g' geschnitten.

Ein Strahlenbüschel wird von einer nicht durch den Mittelpunkt S des Büschels gehenden Geraden g (Fig. 71) in einer stetigen Folge von Punkten, d. h. in einer Punktreihe geschnitten. Die Gerade g heisst der Träger der Reihe. Wird diese Punktreihe von S aus auf eine andere Gerade projiciert, so erhält man eine zweite Punktreihe, welche von S aus gesehen scheinbar mit der ersten zusammenfällt. Man kann deshalb jede der beiden Reihen als eine Abbildung der anderen betrachten. Diese gegenseitige Lage zweier Punktreihen nennt man die perspektivische Lage und dieselbe giebt uns das einfachste Mittel, um zwei Punktreihen

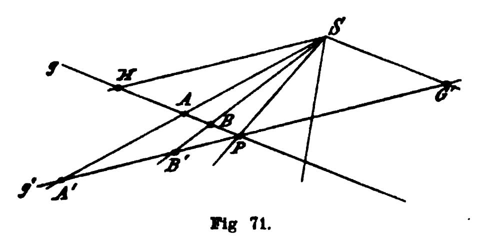


Fig 71.

aufeinander zu beziehen. Wir wollen die Punkte der einen Reihe als derart abhängig von denen der anderen Reihe ansehen, dass zwei Punkte, welche auf demselben projicierenden Strahle liegen, einander entsprechen. A′ entspricht also A; B′ dem Punkte B u. s. f. In dem Schnittpunkte P der beiden Träger g und g′ fallen demnach zwei entsprechende Punkte zusammen. Dem unendlich fernen Punkte der Geraden g entspricht der Punkt G′, welcher auf dem zu g parallelen Strahle SG′ liegt; ebenso schneidet der zu g′ parallele Strahl die Gerade g in dem Punkte H, welcher dem unendlich fernen Punkte der Geraden g′ entspricht.

Anm. Aus Fig. 71 ist leicht ersichtlich, dass $\triangle APA' \sim \triangle ASH \sim \triangle A'SG'$, folglich: $A'G' : G'S = HS : AH$, woraus folgt: $A'G' . AH = G'S . HS$. Ebenso findet sich: $B'G' . BH = G'S . HS$ u. s. f. Die beiden besonderen Punkte H und G′ der beiden Reihen heissen die Fluchtpunkte (nach dem Vorgange in der Linearperspektive als die Abbildungen der beiden unendlich fernen Punkte) oder Gegenpunkte, und die eben gegebene Ableitung zeigt, dass das Produkt aus dem Abstand des Punktes einer Reihe vom zugehörigen Gegenpunkt und dem Abstand des entsprechenden Punktes der anderen Reihe vom zugehörigen Gegenpunkt den unveränderlichen Wert $G'S . HS = k^2$ hat. Dieses Produkt heisst die perspektivische Potenz der beiden Reihen.

2) Wird eine Punktreihe g (Fig. 72) von einem Strahlencentrum S aus auf eine andere Gerade g′ projiciert, so erhält man nach 1) eine neue Reihe, welche zur ersten perspektivisch liegt. Man kann nun diese letztere von einem neuen Strahlencentrum S′ aus auf eine dritte Gerade g″ projicieren, dann erhält man auf dieser eine zu g′ perspektivisch liegende Punktreihe. Einem beliebigen Punkte A der Reihe g entspricht der Punkt A′ der Reihe g′ und dem letzteren wieder der Punkt A″ der Reihe g″. Die Lage des Punktes A″ ist hiernach abhängig von derjenigen des ersten Punktes A und man kann deshalb auch die beiden Punktreihen g und g″ so aufeinander beziehen, dass jedem Punkte der ersten Reihe g derjenige Punkt der Reihe g″ entspricht, welchen man, wie eben angegeben, durch zweimalige Projektion aus S bez. S′ erhält. Die neue Punktreihe wird aber im Allgemeinen nicht mehr perspektivische Lage zu der ersten Reihe g haben, d. h. die Verbindungslinien entsprechender Punkte werden nicht durch einen Punkt gehen. Man nennt nun solche Punktreihen „projektivisch“, weil die eine durch mehrmalige Projektion aus der andern entstanden ist. Würde man die Punktreihe g″ auf eine neue Gerade g‴ von irgend einem anderen Punkte S‴ aus pro-

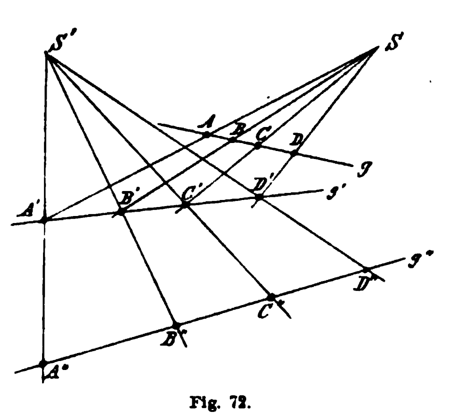


Fig. 72.

jicieren, so würde man eine vierte Punktreihe erhalten, welche zu jeder der vorhergehenden projektivisch ist u. s. f.

Sind zwei projektivische Punktreihen in perspektivischer Lage, so ist die Abhängigkeit der Punkte der einen Reihe von denen der andern schon durch zwei Paare entsprechender Punkte A, A' und B, B' festgestellt, denn die Verbindungslinien AA' und BB' schneiden sich im Projektionscentrum S. Andere entsprechende Punkte liegen dann auf solchen Strahlen, welche durch S gehen.

3) Sind drei Paare entsprechender Punkte zweier projektivischen Punktreihen, welche nicht perspektivische Lage haben, gegeben, so ist die Projektivität, d. h. die Abhängigkeit der Punkte der einen Reihe von denen der anderen Reihe festgestellt. Einem vierten Punkte der einen Reihe entspricht dann ein bestimmter Punkt der anderen Reihe.

Beweis. Es seien A, A'; B, B' und C, C' drei Paare entsprechender Punkte der beiden projektivischen Punktreihen g und g' (Fig. 73). Auf der Geraden, welche zwei dieser Punkte, z. B. A und A' verbindet, nehme man die Mittelpunkte S und S' zweier Strahlenbüschel beliebig an und projiciere die Punktreihe g aus S und g' aus S'.

Die Strahlen SB, $S'B'$ und SC, $S'C'$ schneiden sich in den Punkten B'' und C''. Man ziehe durch die letzteren die Gerade g'', dann entsteht auf dieser die Punktreihe $A''B''C''\ldots$, welche zu jeder der Reihen g und g' perspektivisch liegt. Ist nun D ein vierter Punkt der Reihe g, so projicieren wir denselben von S aus nach D'' auf g'' und nun D'' von S' aus nach D' auf g'. Dann sind D und D' wieder zwei entsprechende Punkte der Reihen g und g'.

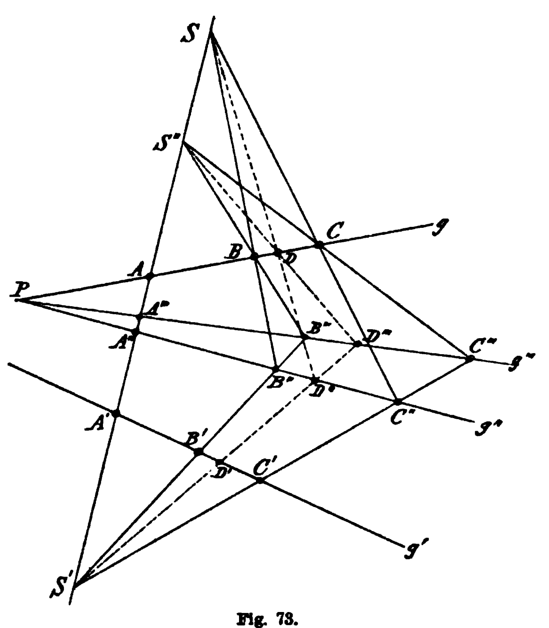


Fig. 73.

Dass nun dem Punkte D stets derselbe Punkt D' auf g' entspricht und die Lage des letzteren nicht von der Wahl der Punkte S und S' abhängig ist, lässt sich leicht nachweisen. Ist z. B. S'' ein neues Projektionscentrum auf AA', so kann man durch die Schnittpunkte der Strahlenpaare ($S''B$, $S'B'$), ($S''C$, $S'C'$) die Gerade g''' ziehen, auf welcher die Punkte A''', B''', $C'''\ldots$ per-

spektivisch zu den Reihen g und g' liegen. Nun schneiden sich die Paare der Seiten der Dreiecke B B'' B''', C C'' C''' in drei Punkten S S' S'', welche auf einer Geraden liegen, folglich sind die Dreiecke kollinear und die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken, nämlich die Geraden g, g'', g''' gehen durch einen Punkt P. Aus demselben Grunde ist das von den Strahlen SD'', S''D''' und S'D''' gebildete Dreieck jedem der beiden vorigen Dreiecke kollinear, folglich erhält man durch Verlegung von S nach S'' doch wieder D' als entsprechenden Punkt zu D. In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass eine Verlegung von S' auf der Geraden A A' keinen Einfluss auf die gegenseitige Lage der Punkte D und D' hat.

Sind A, B, C, D (Fig. 74) vier Punkte einer Reihe g, welche von S aus projiciert werden; ist ferner $\frac{AB}{BD}$ das Abstandsverhältnis des Punktes B von A und D, ebenso $\frac{AC}{CD}$ dasjenige des Punktes C, so nennt man das Verhältnis:

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD}$$

das Doppelverhältnis der vier Punkte. Ziehen wir DM parallel zu dem Strahle AS, so ist:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AS}{DM} \text{ und } \frac{AC}{CD} = \frac{AS}{DN}.$$

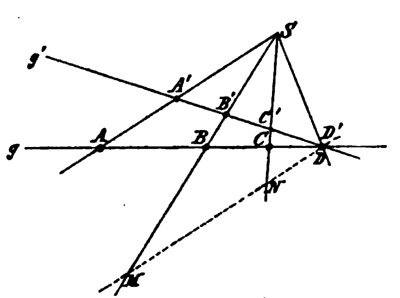


Fig. 74.

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{DN}{DM}.$$

Ziehen wir durch D eine andere Gerade g', so wird diese von dem Strahlenbüschel in den vier Punkten A', B', C', D geschnitten, und wir finden:

$$\frac{A'B'}{B'D} = \frac{A'S}{DM}, \quad \frac{A'C'}{C'D} = \frac{A'S}{DN},$$

woraus wieder folgt:

$$\frac{A'B'}{B'D} : \frac{A'C'}{C'D} = \frac{DN}{DM}.$$

Jede zu g oder g' parallele Gerade wird von dem Strahlenbüschel in 4 Punkten geschnitten, welche dieselben Abstandsverhältnisse wie die der Punkte A, B, C, D bez. A', B', C', D zu einander haben, woraus hervorgeht, dass auch das Doppelverhältnis der 4 Schnittpunkte dasselbe ist.

Ferner ergiebt sich: wenn man die Punkte A, B, C, D aus einem andern Mittelpunkte auf eine neue Grade projiciert, dass den Projektionen dieser Punkte wieder dasselbe Doppelverhältnis zukommt. Hiernach ist z. B. das Doppelverhältnis der vier Punkte A, B, C, D in Fig. 72 gleich demjenigen von A' B' C' D' und dieses wieder gleich dem Doppelverhältnis der Punkte A'' B'' C'' D''. Die Reihe ABCD ist aber der Reihe A'' B'' C'' D'' projektivisch, daraus folgt der wichtige Satz:

In zwei projektivischen Punktreihen haben je vier Punkte der einen und die entsprechenden Punkte der anderen dasselbe Doppelverhältnis.

Auch hieraus können wir schliessen, dass die Projektivität zweier Punktreihen durch 3 Paare entsprechender Punkte bestimmt ist, weil einem vierten Punkte der ersten Reihe ein bestimmtes Doppelverhältnis zukommt, welchem das Doppelverhältnis der entsprechenden

Punkte der zweiten Reihe gleich sein muss. Dies ist jedoch, wenn drei Punkte der letzteren schon gegeben sind, nur noch bei einem vierten Punkte dieser Reihe möglich.

4) Zwei projektivische Punktreihen können auch denselben Träger haben. Wird z. B. die Punktreihe A, B, C, D . . (Fig. 75) auf die Gerade g″ von S aus projiciert, so erhalten wir auf dieser die Reihe A″ B″ C″ D″, und wenn wir diese von einem anderen Mittelpunkte S″ aus wieder auf die ursprüngliche Gerade g zurückprojicieren, so erhalten wir auf dieser die Punktreihe A′ B′ C′ D′, welche der ersten Reihe

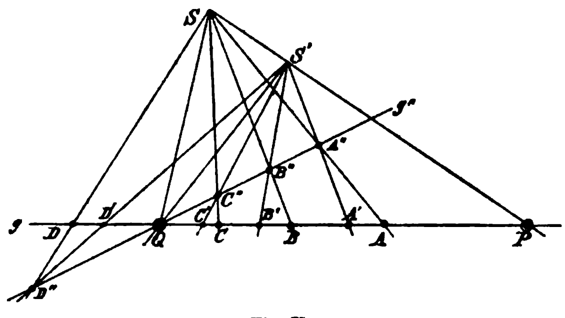


Fig 75.

ABCD projektivisch ist. Denn jede der beiden letzten Reihen hat zu A″B″C″D″ perspektivische Lage. In dem Schnittpunkte Q der Geraden g und g″ fallen zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen zusammen; ebenso in demjenigen Punkte P der Geraden g, in welchem sie von dem durch S und S′ gehenden Strahle getroffen wird. P und Q werden die Doppelpunkte der beiden Reihen genannt.

5) Ebenenbüschel. Die Gesamtheit aller Ebenen, welche durch eine feste Gerade s gehen (Fig. 76) heisst ein Ebenenbüschel; s die Ache desselben. Eine beliebige Ebene, welche nicht durch s geht, schneidet den Büschel in einem Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt S; und eine Gerade g schneidet denselben in einer Punktreihe ABCD . . Legen wir durch g noch eine Ebene, so entsteht ein zweiter Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt S′, welcher die Punktreihe ABCD . . ebenfalls projiciert. Von einem beliebigen Punkte P der Achse s aus betrachtet fallen die beiden Strahlenbüschel scheinbar zu-

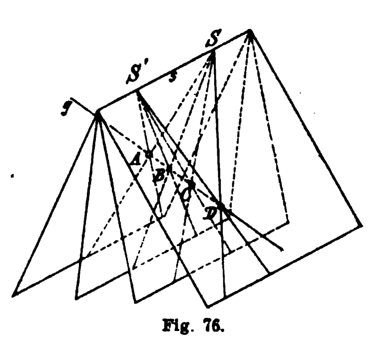


Fig. 76.

sammen, so dass jeder Büschel als eine Abbildung des anderen betrachtet werden kann. Man sagt aus diesem Grunde, zwei Strahlenbüschel haben perspektivische Lage, wenn sie dieselbe Punktreihe projicieren, und diese Bezeichnung wird auch noch beibehalten, wenn die Büschel in einer Ebene liegen. Man kann dieselben in diesem Falle als Projektionen zweier perspektivischen Strahlenbüschel im Raume ansehen. Offenbar ergiebt sich hieraus leicht, dass zwei Strahlenbüschel, welche in einer Ebene perspek-

tivische Lage haben, auch kollinear sind und zwar ist der Träger der Punktreihe, welche von beiden Büscheln projiciert wird, die Kollineationsachse. Das Kollineationscentrum kann auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte S′ und S″ willkürlich angenommen werden (Fig. 77).

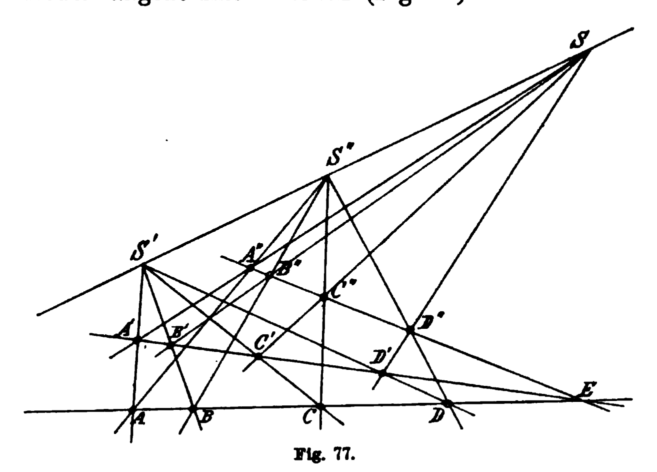


Fig. 77.

Leicht ergiebt sich hieraus der folgende Satz: Wenn einer der beiden Strahlenbüschel z. B. S′ von einer beliebigen Geraden g′ in der Punktreihe A′B′C′D′ . . geschnitten wird und man zieht durch den Punkt E, in welchem g′ den Träger g der Punktreihe ABCD . . trifft, eine andere Gerade g″, so schneidet die letztere den Büschel S″ in einer neuen Punktreihe A″, B″, C″, D″ . ., welche zu A′B′C′D′ . . perspektivisch liegt. Das Projektionscentrum S für beide Reihen liegt auf S′S″.

Anm. Der Anblick der Figur 77 zeigt sofort, dass die Dreiecke AA′A″, BB′B″, CC′C″, DD′D″ paarweise kollinear sind in Bezug auf E als Kollineationscentrum. Ihre Ecken liegen auf den drei durch E gehenden Geraden g, g′, g″ und da in S′ bez. S″ je zwei Paare der Seiten zusammentreffen, so schneiden sich die übrigen Dreiecksseiten in einem Punkte S, welcher auf S′S″ liegt.

6) Eine Punktreihe wird ebenfalls in Beziehung auf einen Strahlenbüschel bezw. Ebenenbüschel gebracht. Ist die Punktreihe ein Schnitt des Büschels, so nennt man die Lage derselben zum Büschel die perspektivische Lage. Jeder Punkt der Reihe liegt dann auf dem entsprechenden Strahle bez. der Ebene des Büschels. Ebenso ist ein Strahlenbüschel perspektivisch einem Ebenenbüschel, wenn derselbe ein Schnitt des letzteren ist, oder eine dem Ebenenbüschel perspektivische Punktreihe projiciert.

Zwei Strahlenbüschel, welche nicht perspektivisch liegen, heissen projektivisch, wenn sie projektivische Punktreihen projicieren. Diejenigen Strahlen der Büschel entsprechen einander, welche durch entsprechende Punkte der beiden Reihen gehen.

Zwei projektivische Strahlenbüschel können auch denselben Mittelpunkt haben. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn man von einem Punkte S aus zwei projektivische Punktreihen projiciert.

Ein Strahlenbüschel ist einer Punktreihe g projektivisch, wenn er von einer beliebigen Geraden g′ in einer zu g projektivischen Punktreihe geschnitten wird. Derjenige Strahl des Büschels entspricht einem Punkte A der Reihe g, welcher durch den entsprechenden Punkt A′ der Reihe g′ geht.

Zwei Ebenenbüschel mit verschiedenen Achsen, welche dieselbe Punktreihe projicieren, haben perspektivische Lage. Die Ebenenbüschel sind projektivisch, wenn sie projektivische Punktreihen projicieren oder wenn ebene Schnitte derselben projektivische Strahlenbüschel ergeben. Werden von einerlei Achse aus zwei projektivische Punktreihen projiciert, so erhält man zwei Ebenenbüschel mit gemeinschaftlicher Achse. Eine beliebige Ebene schneidet dieselben in zwei projektivischen Strahlenbüscheln mit gemeinschaftlichem Mittelpunkt.

Der Winkel, welchen zwei Geraden a und b miteinander bilden, soll künftig mit $\angle ab$ bezeichnet werden; sin (ab) bedeutet hiernach den Sinus dieses Winkels u. s. f. Wird ein Winkel ab durch die Gerade c in die beiden Winkel ac und bc zerlegt, so nennt man den Bruch: $\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}$ das Teilungsverhältnis.

Durch S (Fig. 78) gehen vier Strahlen a, b, c, d, welche irgend eine Gerade g in den vier Punkten A, B, C, D schneiden. Durch die Gerade b wird der Winkel ad in die Winkel ab und bd und durch c in die Winkel ac und cd zerlegt. Das Verhältnis

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(bd)} : \frac{\sin(ac)}{\sin(cd)}$$

heisst alsdann das Doppelverhältnis der vier Strahlen. Es ist leicht zu zeigen, dass dasselbe dem Doppelverhältnis:

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD}$$

der vier Schnittpunkte A, B, C, D gleich ist.

Fig. 78.

Aus Fig. 78 sieht man, dass die Dreiecke ABS, BDS, ACS, CDS gleiche Höhe haben und sich deshalb wie ihre Grundlinien verhalten. Es ist also:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\frac{1}{2} AS \cdot BS \cdot \sin(ab)}{\frac{1}{2} BS \cdot DS \cdot \sin(bd)}, \quad \frac{AC}{CD} = \frac{\frac{1}{2} AS \cdot CS \cdot \sin(ac)}{\frac{1}{2} CS \cdot DS \cdot \sin(cd)},$$

woraus folgt:

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{\sin(ab)}{\sin(bd)} : \frac{\sin(ac)}{\sin(cd)}.$$

Hieraus ergiebt sich sofort, dass gleiche Doppelverhältnisse auch auftreten bei einer Punktreihe und einem derselben projektivischen Strahlenbüschel, ferner bei zwei projektivischen Strahlenbüscheln.

Um das Doppelverhältnis von vier Ebenen eines Ebenenbüschels zu bilden, legen wir durch dasselbe einen Schnitt senkrecht zu seiner Achse. Das Doppelverhältnis der vier Strahlen des dadurch entstandenen Strahlenbüschels soll als dasjenige der vier Ebenen gelten. Es ist klar, dass eine in der Ebene dieses Büschels liegende Gerade in vier-

Punkten von dem gleichen Doppelverhältnis geschnitten wird. Da jeder andere Schnitt als eine Projektion des vorigen Strahlenbüschels betrachtet werden kann, so kommt dasselbe Doppelverhältnis auch jedem anderen Strahlenbüschel und damit auch allen Punktreihen zu, welche Schnitte jenes Ebenenbüschels sind.

Es haben also allgemein je vier entsprechende Elemente zweier projektivischen Gebilde dasselbe Doppelverhältnis.

7) Zwei Gebilde (Punktreihe, Strahlenbüschel oder Ebenenbüschel), welche aus je drei Elementen bestehen, sind immer projektivisch.

Wir können diesen Satz, welcher in 3) bereits für zwei Punktreihen bewiesen ist, leicht verallgemeinern. Sind z. B. drei Paare entsprechender Strahlen zweier Strahlenbüschel gegeben, so schneiden dieselben irgend zwei Geraden in bez. Punktreihen von je drei Elementen. Folglich kann man nach 3) zu einem vierten Punkt der einen Reihe den entsprechenden Punkt der anderen Reihe bestimmen. Diejenigen Strahlen der beiden Büschel, welche diese neuen Punkte bez. projicieren, stellen dann ein viertes Paar entsprechender Strahlen der Büschel dar. Man übersieht leicht, wie zu verfahren ist, wenn irgend drei entsprechende Elemente zweier anderen Gebilde gegeben sind.

8) Es sind drei Paare entsprechender Elemente von zwei projektivischen Gebilden gegeben, man soll zu einem vierten Element des einen Gebildes das entsprechende Element des anderen finden.

Wir lösen diese Fundamentalaufgabe zunächst für Punktreihen. Es seien also ABC, A′B′C′ (Fig. 79), welche auf g bez. g′ liegen, drei Paare entsprechender Punkte. Wie in 3) ziehen wir durch zwei der letzteren z. B. A und A′ eine Gerade und nehmen auf dieser zwei Mittelpunkte S und S′ beliebig an und projicieren aus diesen die Punktreihen ABC bez. A′B′C′. Hierdurch entstehen nun zwei projektivische Strahlenbüschel, in welchen SA und S′A′, SB und S′B′, SC und S′C′ drei Paare entsprechender Strahlen sind. SA und SA′ bilden aber eine Gerade, welche beiden Strahlenbüschel entsprechend gemeinsam ist, folglich haben die Büschel perspektivische Lage. Ziehen wir nun durch die Schnittpunkte B″ und C″ der andern entsprechenden Strahlen die Gerade g″, so ist die auf dieser entstandene Punktreihe A″B″C″ jeder der gegebenen perspektivisch. Ist also D ein vierter Punkt der Reihe g, so projicieren wir denselben von S aus nach D″ und diesen Punkt von S′ aus nach D′ auf g′; dann ist D′ der D entsprechende Punkt auf der Reihe g′.

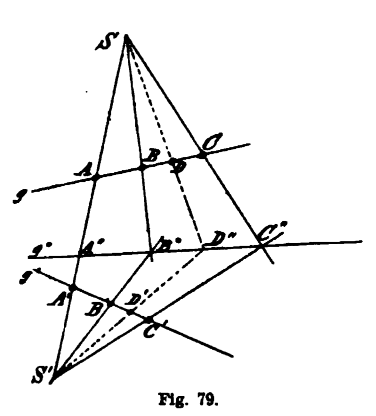


Fig. 79.

Die Lage der beiden Mittelpunkte S und S′ auf AA′ war beliebig (s. 3). Nehmen wir an, S falle mit A und S′ mit A′ zusammen (Fig. 80). Wir projicieren von A aus die Punktreihe A′B′C′ und von A′ aus die Reihe ABC. Die beiden Büschel haben wieder den Strahl AA′ entsprechend gemeinschaftlich, also haben die Büschel perspektivische Lage. Die beiden anderen Paare entsprechender Strahlen schneiden sich in den Punkten B″ und C″. Durch diese legen wir

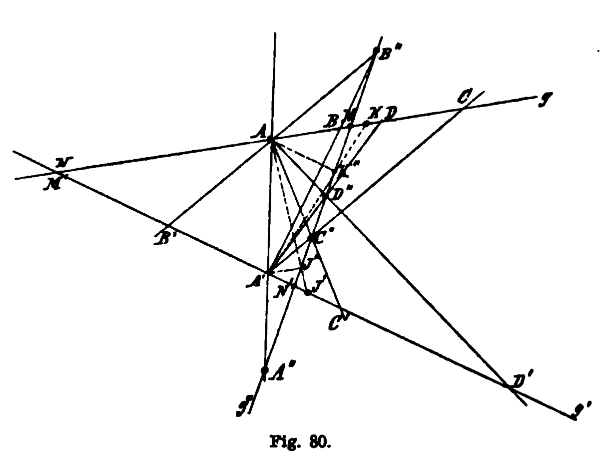


Fig. 80.

die Gerade g″, dann entsteht auf dieser als Schnitt der beiden Büschel die zu beiden gegebenen Reihen projektivische Punktreihe A″B″C″. Den einem Punkte D der ersten Reihe entsprechenden Punkt D′ der zweiten Reihe finden wir wie vorhin.

Um diejenigen Punkte der Reihen g und g′ zu finden, welche dem Schnittpunkte der Geraden g und g′ entsprechen, wenn man denselben als Punkt (N) der Reihe g oder als Punkt (M′) der g′ betrachtet, ist N von A′ aus auf g″ zu projicieren, wodurch man N′ erhält. Da dieser nun von A aus auf g′ projiciert wieder N′ giebt, so ist derselbe schon der N entsprechende Punkt der Reihe g′. Ebenso ist der Schnittpunkt M der beiden Geraden g″ und g der dem M′ entsprechende Punkt der Reihe g.

Hieraus folgt aber, dass die Lage der Geraden g″ nicht abhängig von der Wahl der beiden Punkte A und A′ als Mittelpunkten der projicierenden Strahlenbüschel sein kann. Hätten wir zwei andere entsprechende Punkte, z. B. B und B′ oder C und C′ zu Mittelpunkten genommen, so würden die Schnittpunkte entsprechender Strahlen der perspektivischen Büschel wieder auf g″ liegen, da die Konstruktion der dem Schnittpunkte M′ bez. N entsprechenden Punkte wieder dieselben Punkte M bez. N′ geben muss. Hieraus folgt weiter, dass g″ der Ort der Schnittpunkte der Geradenpaare (AB′, A′B), (AC′, A′C), (BC′, B′C) u. s. w. ist.

Soll man diejenigen Punkte J′ und K bestimmen, welche den unendlich fernen Punkten beider Reihen bez. entsprechen, so ziehen wir A′J″ parallel zu g und projicieren J″ aus A nach J′. Ebenso ziehen wir AK″ parallel zu g′ und projicieren K″ von A′ aus nach K. Dann sind J′ und K die den unendlich fernen Punkten der Reihen g bez. g′ entsprechenden Punkte.

9) Wir lösen jetzt die vorige Aufgabe für den Fall, dass die beiden Punktreihen auf demselben Träger g liegen (Fig. 81).

Es seien ABC und A'B'C' die drei auf g liegenden Paare entsprechender Punkte. Wir ziehen eine andere Gerade g'' und projicieren nun von einem beliebigen Mittelpunkte S aus eine der beiden Punktreihen z. B. ABC auf g'', wodurch wir auf der letzteren die zu ABC perspektivisch liegende Punktreihe A'' B'' C'' erhalten, welche demnach zu A' B' C' projektivisch ist.

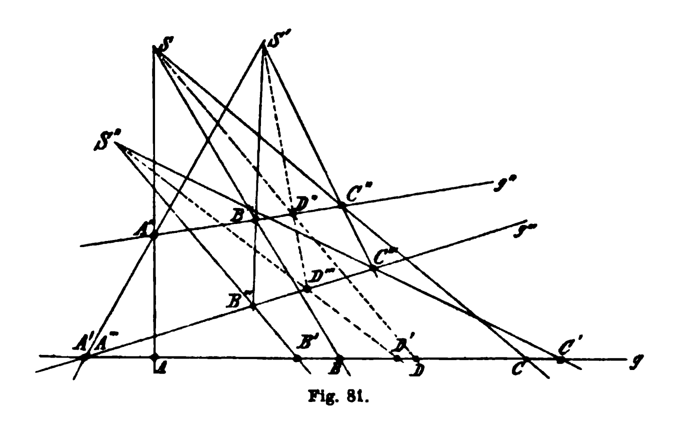


Fig. 81.

Durch einen der Punkte der letzten Reihe z. B. A' legen wir eine neue Gerade g''' und projicieren die Punkte A'' B'' C'' von einem auf A' A'' liegenden Punkte S' auf g'''. Die so erhaltene Punktreihe A'''B'''C''' . . . ist hiernach auch zu A'B'C' . . . projektivisch; da aber die beiden entsprechenden Elemente A' und A''' zusammenfallen, so haben diese beiden Reihen perspektivische Lage. Wir bestimmen nun durch die beiden Geraden B'B''' und C'C''' den Mittelpunkt S'' des Strahlenbüschels, welcher beide Reihen projiciert. Ist D ein vierter Punkt der ersten Reihe, so projicieren wir denselben von S aus nach D'' diesen von S' aus nach D''' und den letzteren von S'' aus wieder auf g nach D'. D' ist dann der gesuchte Punkt, welcher D entspricht. Wir sehen hieraus, dass man durch dreimaliges Projicieren von ABC . . . zu A'B'C' . . . gelangen kann.

Haben die beiden Reihen Doppelpunkte, so ist die Konstruktion einfacher. Es mögen z. B. die entsprechenden Punkte A und A' (Fig. 82) zusammenfallen, während B und B', ebenso C und C' getrennt liegen. Wir ziehen durch A die Gerade g'' beliebig und projicieren die eine der beiden Punktreihen z. B. ABC von einem Punkte S auf g''. Die dadurch erhaltene Reihe A''B''C'' ist perspektivisch zu ABC, also auch projektivisch zu A'B'C'. Da nun aber die entsprechenden Punkte A' und A'' zusammenfallen, so haben auch A'B'C' und A''B''C'' perspektivische Lage. Durch die Geraden B'B'' und C'C'' bestimmen wir endlich die Lage des Mittelpunktes S' des Strahlen-

büschels, welcher beide Reihen projiciert. Um nun den einem vierten Punkt entsprechenden Punkt D′ zu finden, projicieren wir D von S aus nach D″ auf g″ und diesen Punkt wieder aus S′ nach D′ auf g. Wir sehen, dass die gegebenen Punktreihen in diesem Falle Projektionen einer und derselben

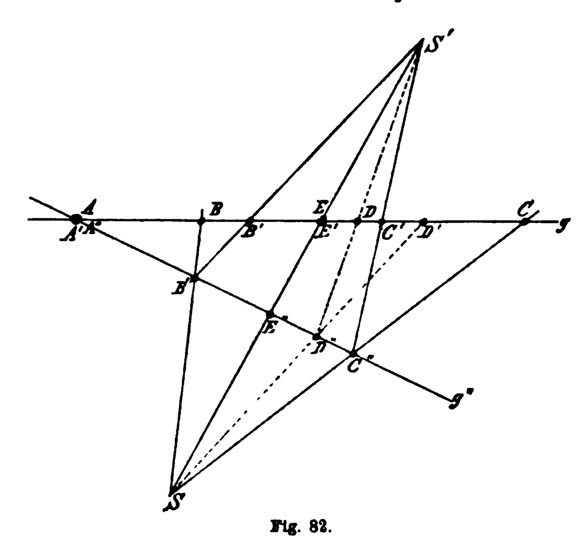


Fig. 82.

dritten Punktreihe sind, so dass wir von ABC durch zweimaliges Projicieren nach A′B′C′ gelangen können.

Die Gerade SS′ schneidet g in dem zweiten Doppelpunkte E (E′) der beiden gegebenen Reihen.

10) Nehmen wir als besonderen Fall an, man solle von den drei Punkten ABC durch Projicieren nach BAC gelangen, so dass also C ein Doppelpunkt ist.

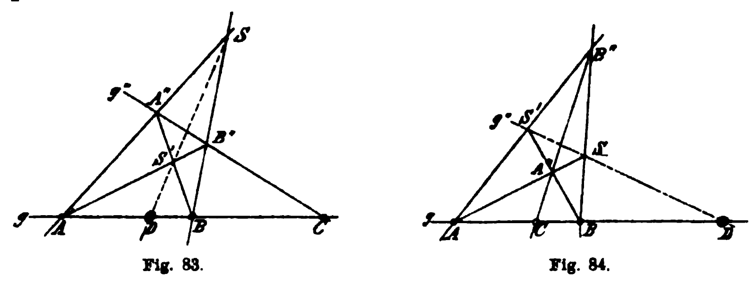


Fig. 83. Fig. 84.

Die Konstruktion ist in den Figuren 83 und 84 für die beiden Fälle ausgeführt, wenn der Punkt C ausserhalb der Strecke AB oder zwischen A und B liegt. Wir ziehen durch C die Gerade g″ beliebig und projicieren von irgend einem Punkte S aus die Punktreihe ABC auf g″, wodurch wir zu der Reihe A″B″C gelangen. Nehmen wir jetzt den Schnittpunkt S′ der

Geraden $A''B$ und AB'' als neues Projektionscentrum an, so erscheint BAC als Projektion von $A''B''C$. Der zweite Doppelpunkt D der beiden projektiven Punktreihen ABC und BAC ist der Durchschnitt der Geraden SS' mit g.

Wie gelangt man durch Projicieren von der Punktreihe ABC zu der Reihe CAB?

Dualität. Reciprocität.

11) Diejenigen Elemente, welche zur Erzeugung geometrischer Figuren in einer Ebene dienen, sind der Punkt und die Gerade. Die Lage einer Geraden ist durch zwei ihrer Punkte festgestellt. Ebenso wie das zweite Element (die Gerade) durch zwei der ersten Elemente (Punkte) bestimmt ist, wird auch durch zwei Elemente der zweiten Art ein Element der ersten Art festgelegt, nämlich zwei Geraden schneiden sich in einem Punkte. Es findet also zwischen Punkten und Geraden eine Gegenseitigkeit (Reciprocität) statt, welche man durch Gegenüberstellen solcher Beziehungen zu grösserer Anschauung bringt, wie:

α) Zwei Punkte bestimmen eine Gerade (Verbindungslinie).	Zwei Geraden bestimmen einen Punkt (Schnittpunkt).
Ebenso:	
β) Drei Punkte bestimmen drei Geraden, indem durch je zwei der Punkte eine Gerade geht. Es liegen also drei Punkte im Allgemeinen nicht in einer Geraden.	Drei Geraden bestimmen drei Punkte, indem je zwei der Geraden sich in einem Punkte schneiden. Es gehen also drei Geraden im Allgemeinen nicht durch einen Punkt.

Jeder der Sätze rechts kann, wie man sieht, aus dem entsprechenden links abgeleitet werden, indem man die Elemente Punkt und Gerade, ferner Verbindungslinie zweier Punkte und Schnittpunkt zweier Geraden vertauscht. Es stehen sich hiernach auch reciprok gegenüber die Begriffe:

γ) Der Punkt M liegt auf der Geraden g.	Die Gerade g geht durch den Punkt M.

Die beiden Figuren, welche wir aus drei Punkten und deren Verbindungslinien bez. aus drei Geraden und deren Schnittpunkten erhielten, sind dieselben; sie unterscheiden sich nur durch ihre Entstehungsweise. Links waren die drei Punkte das Gegebene, aus welchen sich die drei Geraden ergaben; rechts waren es die drei Geraden, welche die drei Punkte bestimmen.

Ferner stehen sich hiernach reciprok gegenüber Punktreihe und Strahlenbüschel, denn (γ):

δ) Eine Punktreihe ist die Gesamtheit aller Punkte, welche auf einer Geraden liegen.

Ein Strahlenbüschel ist die Gesamtheit aller Geraden, welche durch einen Punkt gehen.

ξ) Werden die Punkte einer Reihe ABCD... mit zwei Punkten S und S′ verbunden, so entstehen zwei Strahlenbüschel, welche perspektivische Lage haben.

Werden die Strahlen eines Büschels abcd... von zwei Geraden g und g′ geschnitten, so entstehen zwei Punktreihen, welche perspektivische Lage haben.

Aus diesen einfachen Beispielen der gegenseitigen Beziehungen von Punkt und Gerade ersehen wir nun leicht, dass irgend einem Satz über Lagenbeziehungen, welcher also lediglich Verbindungslinien von Punkten oder die Schnittpunkte von Geraden umfasst, auch ein reciproker Satz entspricht, welchen man, wie oben angegeben, sofort aus dem ersteren ableiten kann. In dieser gleichzeitigen Existenz von je zwei einander entsprechenden Sätzen besteht nun das Prinzip der Dualität, von welchen wir in der Folge ausgedehnten Gebrauch machen werden.

Harmonische Gebilde.

12) Ein vollständiges Viereck ist durch 4 Punkte ABCD (Fig. 85), welche die Ecken genannt werden, von denen jedoch nicht drei in einer Geraden liegen, gegeben. Die sechs Verbindungslinien der Ecken heissen die Seiten des Vierecks. Gegenüberliegende Seiten sind solche, welche nicht zugleich durch einen der vier

Ein vollständiges Vierseit ist durch vier Geraden a, b, c, d (Fig. 86), welche die Seiten genannt werden, von denen jedoch nicht drei durch einen Punkt gehen, gegeben. Die sechs Schnittpunkte der Seiten heissen die Ecken des Vierseits. Gegenüberliegende Ecken sind solche, welche nicht zugleich auf einer der vier

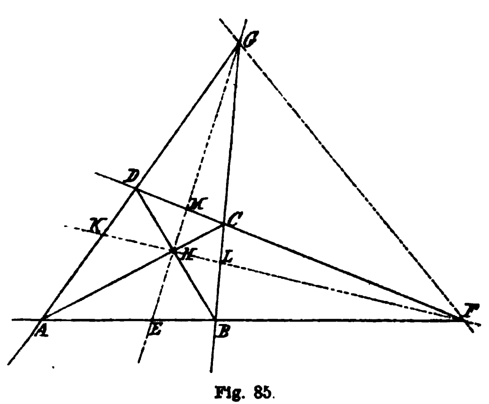


Fig. 85.

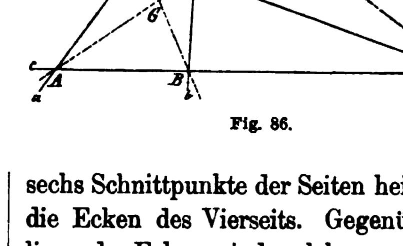


Fig. 86.

Eckpunkte A, B, C, D gehen. Dies sind also die Paare (AB, CD), (AD, BC), (AC, BD). Die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten, nämlich die Punkte F, G und H heissen Nebenecken. Die letzteren bilden mit ihren Verbindungslinien das Nebendreieck (auch Polardreieck) des vollständigen Vierecks.

Seiten a, b, c, d liegen. Dies sind also die Paare (A, C), (B, D) und F, H. Die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken, nämlich die Seiten AC, BD, FH heissen Nebenseiten. Die letzteren bilden mit ihren Schnittpunkten das Nebendreiseit (auch Polardreiseit) des vollständigen Vierseits.

13) Zeichnet man über der Seite AB eines vollständigen Vierecks ABCD (Fig. 87) ein zweites Viereck, welches die auf derselben Seite liegenden Eckpunkte A und B und die Nebenecke F mit dem ersteren gemeinschaftlich hat, so schneiden sich auch die Nebenseiten GH und und G′H′ in demselben Punkte E der Geraden AB.

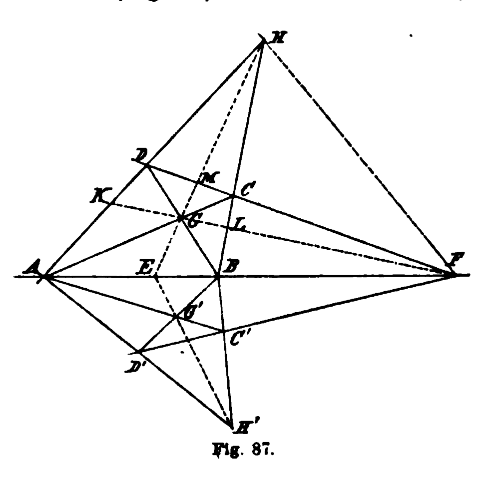


Fig. 87.

Beweis. Da je zwei Seiten der Vierecke in einem Punkte der Geraden AB zusammentreffen und die letztere gemeinschaftlich haben, so sind die Vierecke kollinear und AB ist die Kollineationsachse. Die Seiten BD und BD′, ferner AC und AC′ entsprechen einander, folglich sind auch die Schnittpunkte G und G′ entsprechende Punkte; ebenso H und H′. Hieraus folgt, dass GH und G′H′ entsprechende Geraden sind, welche in demselben Punkte E der Achse AB zusammentreffen müssen.

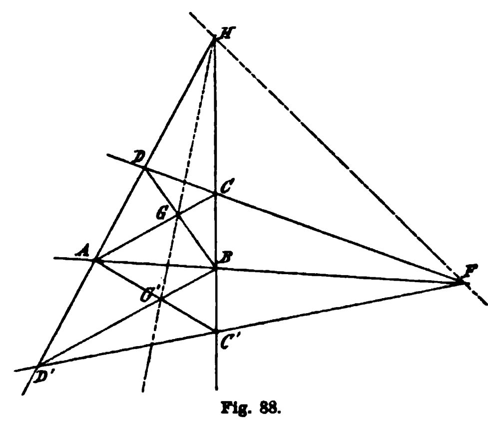


Fig. 88.

Sind AD′ und BC′ (Fig. 88) die Verlängerungen von AD und BC, so fällt H′ mit H zusammen, und GH und GH′ bilden eine Gerade. Es folgt daraus: Wenn durch einen Punkt F zwei Geraden gezogen werden, welche die Schenkel eines Winkels AHB in den vier Punkten A, B, C und D schneiden, so liegt der Schnittpunkt der Geraden AC und BD auf einer festen durch den Scheitel H jenes Winkels gehenden Geraden.

Wird in Fig. 87 angenommen, dass die beiden vollständigen Vierecke ABCD und ABC′D′ die Ecken A und B und den Durchschnittspunkt E der Nebenseiten GH und G′H′ gemeinsam haben, so folgt ebenso, dass CD und C′D′ in demselben Punkte F der Geraden AB sich schneiden. Wir bemerken hiernach leicht, dass durch drei der vier Punkte A, B, E, F der vierte jederzeit bestimmt ist. Man nennt dieselben **harmonische Punkte** und zwar A und B, sowie E und F zusammengehörige oder konjugierte Punkte. Sie werden von H aus durch zwei Gegenseiten und zwei Nebenseiten des Vierecks projiciert. Die vier projicierenden Strahlen heissen infolgedessen harmonische Strahlen und diejenigen, welche durch zwei konjugierte Punkte gehen, werden auch konjugierte Strahlen genannt. Leicht erkennt man nun, dass die vier Punkte ADKH ebenfalls vier harmonische Punkte sind, und F der Mittelpunkt eines Büschels von vier harmonischen Strahlen ist, welcher diese Punkte projiciert. Nimmt man G als Mittelpunkt eines Büschels an, so zeigt sich, dass von diesem Punkte aus die Punkte A, B, E, F unmittelbar nach ADHK projiciert werden. Hieraus ergiebt sich leicht, dass man durch Projicieren von vier harmonischen Punkten auf eine Gerade immer wieder vier harmonische Punkte erhält. Hiernach sind auch die Gruppen DCMF, KLGF, EMGH, BCLH harmonisch; ebenso die Strahlenbüschel, welche diese Gruppen aus H bez. F projicieren.

Je zwei konjugierte Punkte bez. Strahlen werden von einem der beiden anderen Punkte bez. Strahlen getrennt. Demnach ist zur Bestimmung des vierten harmonischen Elementes (wenn drei gegeben sind) immer festzustellen, welchem der drei Elemente dasselbe konjugiert sein soll.

Das oben gefundene Resultat können wir nach dem Prinzip der Dualität auch so aussprechen:

Zwei Seiten eines vollständigen Vierecks und zwei Nebenseiten desselben, welche sämtlich durch eine Nebenecke des Vierecks gehen, bilden eine Gruppe von vier harmonischen Strahlen.

Zwei Ecken eines vollständigen Vierseits und zwei Nebenecken desselben, welche sämtlich auf einer Nebenseite des Vierseits liegen, bilden eine Gruppe von vier harmonischen Punkten.

Die vier harmonischen Punkte AEBF (Fig. 87) werden von C aus nach GEHM und die letzteren wieder von D aus nach BEAF projiciert. Folglich sind die beiden Punktreihen:

AEBF
und BEAF

projektivisch und müssen deshalb dasselbe Doppelverhältnis δ haben. Es ist also:

$$\delta = \frac{AE}{BE} : \frac{AF}{BF} \quad \text{und auch} \quad \delta = \frac{BE}{AE} : \frac{BF}{AF}.$$

Da nun aber das zweite Doppelverhältnis den reciproken Wert des ersten darstellt so muss auch $\delta = \frac{1}{\delta}$ oder $\delta^2 = 1$, folglich $\delta = \pm 1$ sein.

Es ist aber nach 3) das Doppelverhältnis $\delta = \frac{AE}{BE} : \frac{AF}{BF} = \frac{BN}{BM}$ (Fig. 89), wenn $BM \parallel AS$.

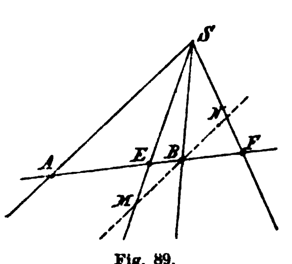


Fig. 89.

Wäre also $\delta = 1$, so würde $BM = BN$ sein und E würde mit F zusammenfallen.

Deshalb kann δ nur $= -1$ sein, was geometrisch bedeutet, dass zwar BM und BN gleich gross aber verschieden von B aus gerichtet sind. Auf der durch B zu dem Strahle AS gezogenen Parallelen werden demnach von den anderen drei Strahlen gleiche Stücke abgeschnitten.

Da SA die Gerade MN in unendlicher Entfernung schneidet, so folgt: Der Mitte zwischen zwei konjugierten Punkten ist als vierter harmonischer der unendlich ferne Punkt zugeordnet.

Aufgaben.

14) Zu den drei Punkten ABC den vierten harmonischen und zwar B konjugierten Punkt D zu finden (Fig. 90).

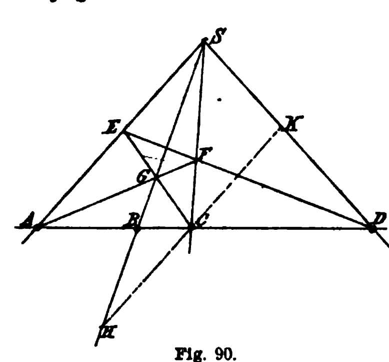


Fig. 90.

1. Aufl. Wir nehmen einen beliebigen Punkt S als Mittelpunkt eines Strahlenbüschels an, welcher die gegebenen Punkte durch die Strahlen AS, BS, CS projiciert. Durch die konjugierten Punkte A und C ziehen wir die Geraden CE und AF, so dass dieselben sich in einem Punkte G des Strahles BS schneiden. Ziehen wir nun noch EF, so schneidet diese die Gerade AC in dem gesuchten Punkte D.

2. Aufl. (Mit Hülfe des Zirkels.) Wir ziehen durch C die Gerade HK parallel zu AS und machen $CK = CH$. Die durch S und K gehende Gerade schneidet AC in D.

15) Durch einen gegebenen Punkt G eine Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier anderen Geraden a und b zu ziehen (s. Fig. 88).

Aufl. Wir ziehen durch G zwei Geraden AC und BD und betrachten ABCD als Ecken eines vollständigen Vierecks. Wir konstruieren nun ein zweites Viereck ABC′D′, so, dass CD und C′D′ auf AB sich in F treffen. Die gesuchte Gerade geht alsdann durch den Schnittpunkt G′, in welchem AC′ und BD′ sich treffen und durch G.

Man löse die Aufgabe auch für den Fall, wenn G nicht zwischen den beiden gegebenen Geraden liegt.

16) Eine gegebene Strecke AB ist in C halbiert. Man soll ohne Hülfe des Zirkels durch einen beliebigen Punkt D eine Parallele zu AB ziehen (Fig. 91).

Aufl. Ziehe von einem beliebigen Punkte S der Geraden AD die Strahlen AS, BS, CS. Vom Punkte D ziehen wir die Gerade DB und von A durch den Schnittpunkt F die Gerade AE; dann ist die durch D und E gehende Gerade die gesuchte Parallele.

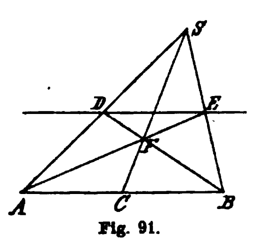


Fig. 91.

17) Auf einer gegebenen Geraden g den Punkt zu bestimmen, in welchem dieselbe von der Verbindungslinie zweier anderen Punkte A und B getroffen wird, ohne AB selbst zu ziehen (Fig. 92).

Aufl. Wir nehmen auf der gegebenen Geraden zwei Punkte M und N beliebig an und stellen das vollständige Viereck AMBN und die beiden Nebenecken R und S desselben her. Durch R ziehen wir

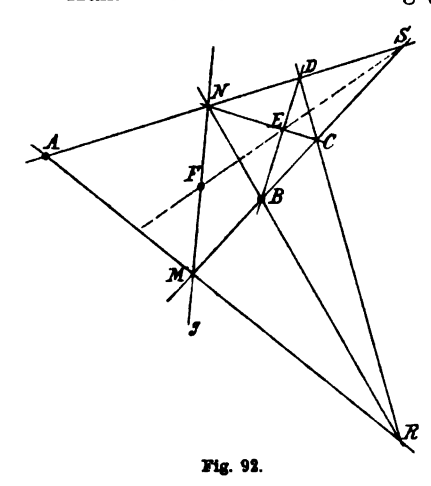


Fig. 92.

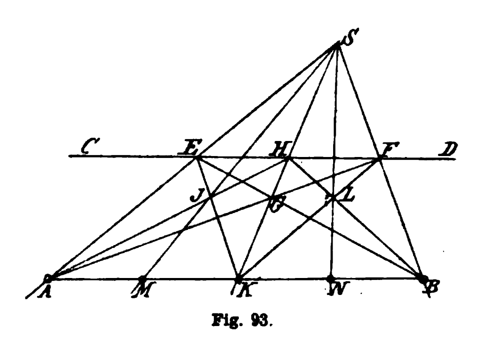


Fig. 93.

RD beliebig und zeichnen die beiden Diagonalen BD und CN des Vierecks BCDN. Der Strahl, welcher von S durch den Schnittpunkt E geht, trifft MN in dem gesuchten Punkte F.

18) Es sind zwei parallele Geraden AB und CD gegeben (Fig. 93). Man soll die auf der einen Geraden gegebene Strecke AB in $2, 4, 8 \ldots 2^n$ gleiche Teile teilen.

Aufl. Man ziehe von einem beliebigen Punkte S aus die Strahlen AS und BS, welche CD in E und F schneiden. Ziehe AF und BE und durch den Schnittpunkt G dieser Linien den Strahl GS, welcher AB in K halbiert. Zieht man ferner die Diagonalen AH, KE; BH und KF und durch die Schnittpunkte J und L die Strahlen SJ und SL, so werden durch diese die Strecken AK bez. BK in M und N halbiert u. s. f.

19) Gegeben eine Gerade a und drei Punkte B, C und D. Man soll durch die letzteren drei in einem Punkte der Geraden a sich schnei-

Gegeben ein Punkt A und drei Geraden b, c und d. Man soll auf den letzteren drei auf einer durch A gehenden Geraden liegende Punkte

dende Strahlen ziehen, welche mit a eine Gruppe von vier harmonischen Strahlen bilden (Fig. 94).

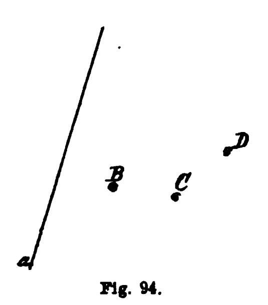


Fig. 94.

Anl. zur Aufl. Man ziehe durch zwei der gegebenen Punkte z. B. B nnd C eine Gerade und verlängere dieselbe, bis sie a trifft; bestimme zu dem Schnittpunkt und den Punkten B und C den vierten harmonischen Punkt. Die Gerade, welche den letzteren mit dem Punkte D verbindet, trifft a in dem Scheitel des gesuchten harmonischen Büschels.

Giebt es mehrere Auflösungen?

bestimmen, welche mit A eine Gruppe von vier harmonischen Punkten bilden (Fig. 95).

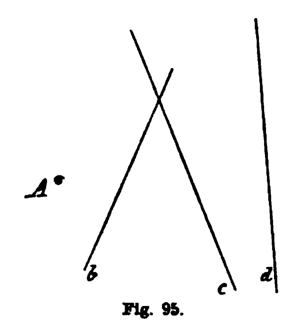


Fig. 95.

Anl. zur Aufl. Man verlängere zwei der gegebenen Geraden, z. B. b und c, bis sie sich treffen und verbinde den Schnittpunkt mit A durch eine Gerade; bestimme zu der letzteren und den Geraden b und c den vierten harmonischen Strahl. Der Punkt, in welchem dieser die Gerade d trifft, bestimmt mit A den Träger der gesuchten harmonischen Punktreihe.

20) Wird ein beliebiges Viereck durch eine Gerade in zwei andere Vierecke zerlegt, so geht die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Diagonalen beider Vierecke durch den Schnittpunkt der Diagonalen des ganzen Vierecks. Leicht nach 8) zu bew.

21) Zu beweisen, dass die Mittelpunkte zweier Kreise und der innere und äussere Ähnlichkeitspunkt vier harmonische Punkte sind.

22) Von zwei projektivischen Strahlenbüscheln S und S′, welche nicht perspektivische Lage haben, sind je drei entsprechende Strahlen gegeben; man soll den einem vierten Strahle des einen Büschels entsprechenden Strahl des anderen finden (Fig. 96).

Aufl. Wir schneiden beide Strahlenbüschel durch Geraden, dann entstehen auf diesen zwei projektivische Punktreihen. Hierdurch wird die Aufgabe auf 8) zurückgeführt.

Es seien demnach a, b, c und a′, b′, c′ die gegebenen Strahlen der beiden Büschel. Als schneidende Geraden können wir zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel z. B. a und a′ annehmen. a′ wird von dem Büschel S (abc) in den Punkten ABC und a von dem Büschel S′ (a′b′c′)

in den Punkten A′B′C′ geschnitten. Da aber die beiden entsprechenden Punkte A und A′ zusammenfallen, so haben diese projektivischen Punktreihen perspektivische Lage. Der Mittelpunkt des dieselben projicierenden Büschels liegt im Durchschnitt S″ der Geraden B′B und C′C. Ist nun d ein vierter Strahl des Büschels S, welcher a′ in D trifft, dann projicieren wir D von S″ aus nach D′ auf a. Da D′ dem Punkte D entspricht, so ist auch S′D′ der d entsprechende Strahl des Büschels S′.

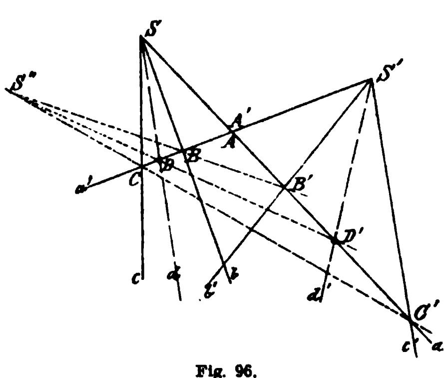


Fig. 96.

In Fig. 97 ist die Konstruktion dargestellt, wenn man durch den Schnittpunkt B zweier entsprechenden Strahlen die Geraden g und g′ zieht. g wird von dem Büschel S in den Punkten A, B, C und g′ von dem Büschel S′ in den Punkten A′, B′, C′ geschnitten.

Da diese beiden projektivischen Punktreihen den Punkt B entsprechend gemeinschaftlich haben, so sind sie in perspektivischer Lage. Das Projektionscentrum S″ ist der Durchschnitt der Geraden AA′ und CC′. Ist nun d ein vierter Strahl des Büschels S, so schneidet derselbe g in dem Punkte D. Durch den Strahl S″D erhalten wir auf g′ den entsprechenden Punkt D′ und durch diesen Punkt geht nun der gesuchte Strahl d′ des Büschels S′.

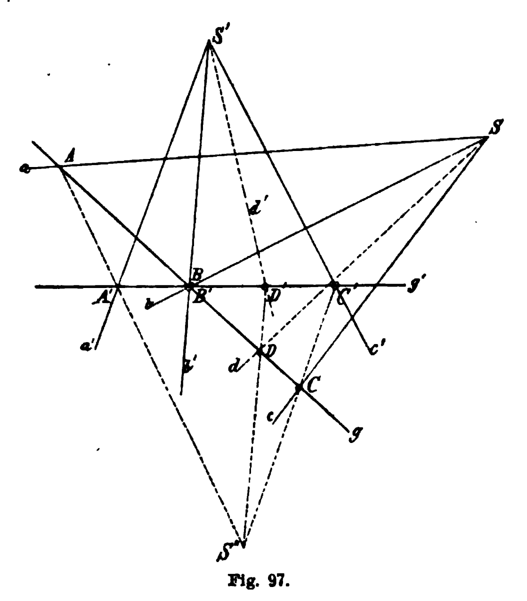


Fig. 97.

Haben die beiden Strahlenbüschel demselben Mittelpunkt, so schneiden sie eine beliebige Gerade in zwei auf derselben liegenden projektivischen Punktreihen. Einem vierten Strahle des einen Büschels entspricht derjenige Punkt der einen Reihe, welcher auf diesem Strahle liegt. Der entsprechende Punkt der anderen Reihe wird nach 9) bestimmt. Durch diesen Punkt geht der gesuchte entsprechende Strahl des zweiten Büschels. Der Anfänger möge nach dieser Andeutung die Konstruktion ausführen.

23) Zwei Strahlenbüschel S und S' haben perspektivische Lage. Man soll zwei aufeinander senkrecht stehende Strahlen des Büschels S finden, denen zwei ebenfalls einen rechten Winkel bildende Strahlen des Büschels S' entsprechen (Fig. 98).

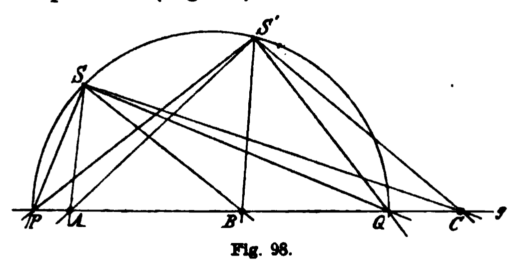


Fig. 98.

Aufl. Ist g die Gerade, auf welcher entsprechende Strahlen der Büschel sich treffen, so zeichne man einen durch S und S' gehenden Kreis, dessen Mittelpunkt auf g liegt. Derselbe schneidet g in den Punkten P und Q. Dann sind SP und SQ die gesuchten Strahlen des einen und S'P und S'Q die entsprechenden des andern Büschels.

Anm. Da zwei projektivische Strahlenbüschel stets in perspektivische Lage gebracht werden können, so folgt aus der Lösung dieser Aufgabe der Satz: In zwei projektivischen Strahlenbüscheln giebt es stets zwei Paare aufeinander senkrecht stehender Strahlen, welche einander entsprechen, die sog. Rechtwinkelpaare.

24) Zwei projektivische Strahlenbüschel S (abc) und S' (a'b'c') in perspektivische Lage zu bringen (Fig. 99).

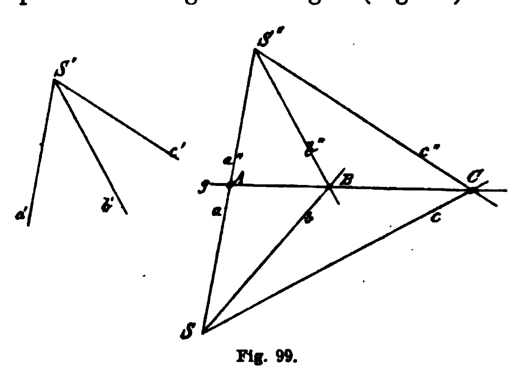


Fig. 99.

Aufl. Von einem beliebigen Punkte S'' aus, welcher auf dem Strahle a des einen Büschels liegt, ziehen wir die Geraden b'' und c'', so dass $\angle ab'' = \angle a'b'$ und $\angle ac'' = \angle a'c'$ ist. Dann ist der Büschel S''(ab''c'') kongruent dem Büschel S (a' b' c'). Folglich sind auch die Büschel S (abc) und S'' (a b'' c'') projektivisch. Da beiden der Strahl a entsprechend gemeinschaftlich ist, so haben sie perspektivische Lage und die Gerade g, auf welcher je zwei entsprechende Strahlen sich treffen, ist durch die Punkte B und C bestimmt.

Man konstruiere nun auch die Rechtwinkelpaare der Büschel S und S'.

25) Ein Strahlenbüschel S (abc) (Fig. 100) liege perspektivisch zu einem Ebenenbüschel u (α β γ). Durch S legen wir die Ebene E senkrecht zur Achse u. Diese Ebene schneidet u (αβγ) in dem Strahlenbüschel S (a'b'c'), welcher zu S (a b c) projektivisch ist. d sei die Gerade, in welcher E von der Ebene des Büschels S (abc) getroffen wird, dann steht $d \perp u$. Ziehen wir in E die Gerade $e' \perp d$ und legen durch e' und u die Ebene ξ, ferner

durch d und u die Ebene δ, so stehen δ und ξ senkrecht zu einander. Wird ξ von der Ebene des Büschels S (a b c) in e geschnitten, dann ist e′ die gerade Projektion von e auf E und da d ⊥ e′, so steht nach einem bekannten Satze der Stereometrie auch d ⊥ e. Den beiden Ebenen δ und ξ des Ebenenbüschels entsprechen aber die in ihnen liegenden Strahlen d bez. e des Büschels S (abc). Liegt also ein Strahlenbüschel S (a b c) perspektivisch zu einem Ebenenbüschel u (αβγ), so lassen sich zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen δ und ξ des letzteren so bestimmen, dass die denselben entsprechenden Strahlen d und e des Strahlenbüschels ebenfalls senkrecht zu einander stehen. Ferner ergiebt sich, dass einer dieser beiden Strahlen senkrecht zur Achse u stehen muss.

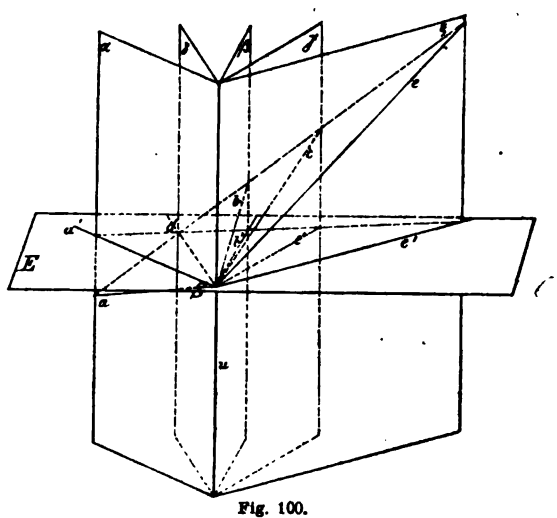


Fig. 100.

Folgende Aufgaben sollen mittelst Darstellung durch Grund- und Aufriss gelöst werden.

26) Ein Strahlenbüschel S (a, b, c) und ein demselben projektivischer Ebenenbüschel seien gegeben. Man soll beide in perspektivische Lage bringen.

Leicht mittelst der in 25) gefundenen Rechtwinkelpaare zu bestimmen.

27) Ein gerades dreiseitiges Prisma (Fig. 101) soll von einer Ebene so geschnitten werden, dass die Schnittfigur einem gegebenen Dreieck ähnlich wird.

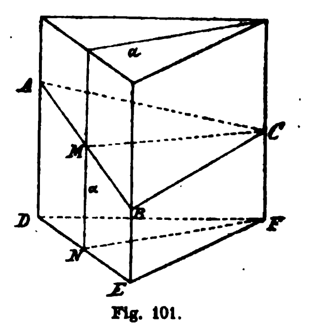


Fig. 101.

Anl. zur Aufl. Ist ABC der gesuchte Schnitt, CM eine Mittellinie desselben, so schneidet die durch CF und CM gelegte Ebene α die Grundfläche DEF ebenfalls in einer Mittellinie NF. Dann sind AC, MC, BC Strahlen eines Büschels, welcher einem aus α und den beiden durch CF gehenden Seitenflächen des Prismas gebildeten Ebenenbüschel perspektivisch ist. Da die beiden Büschel konstruiert werden können, so sind sie nur in perspektivische Lage zu bringen.

Man löse hiernach die Aufgabe (IV, 21, I. Teil).

Involution.

28) Sind ABC (Fig. 102) drei Punkte der Geraden g, welche durch Projicieren in C′BA′ umgewandelt werden sollen unter der Voraussetzung, dass C′ mit A und A′ mit C zusammenfällt (also B ein Doppelpunkt ist), so ziehen wir durch B die Gerade g″ und projicieren auf letztere von einem Punkte S aus die drei Punkte ABC, wodurch wir A″BC″ erhalten. Wir nehmen nun den Schnittpunkt S′ der Geraden AC″ und A″C als neuen Mittelpunkt an und erhalten hierdurch C′(A) als Projektion von C″, und A′(C) als Projektion von A″. Es sind also A und A′ zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen ABC und C′BA′. Die Gerade S′S schneidet g in D, dem zweiten Doppelpunkte der beiden Reihen, woraus wir leicht erkennen, dass AA′BD vier harmonische Punkte sind. (Vergl. 10.) Betrachten wir A als den Punkt C′, welcher der zweiten Gruppe C′BA′ angehört, so finden wir den entsprechenden Punkt der ersten Gruppe, wenn wir zuerst C′ von S′ auf g″ und darauf von S auf g projicieren, wodurch wir aber als entsprechenden Punkt wieder C erhalten. Es ist also gleichgültig, ob wir A als einen Punkt der ersten oder der zweiten Reihe ansehen, wir erhalten als entsprechenden Punkt stets wieder den Punkt A′(C). Das Gleiche gilt aber auch für jedes andere Paar entsprechender Punkte der beiden Reihen. Gehört z. B. E der ersten Reihe an, so ziehen wir den Strahl SE, welcher g″ in E″ schneidet. E″ projicieren wir von S′ auf g, dadurch erhalten wir den E entsprechenden Punkt E′. Wir erkennen aber sofort, dass EE′BD abermals vier harmonische Punkte sind, welche zu den harmonischen Punkten S′SHD perspektivisch liegen. Es fallen nämlich in D zwei entsprechende Punkte zusammen. Folglich müssen die Strahlen S′E, SE′ sich in einem Punkte E‴ der Geraden g″ treffen. Wäre nun E ein Punkt der zweiten Reihe, so müssten wir denselben von S′ aus auf g″ projicieren, wodurch wir E‴ erhalten. Wird der letztere von S auf g projiciert, so gelangen wir wieder zum Punkte E′.

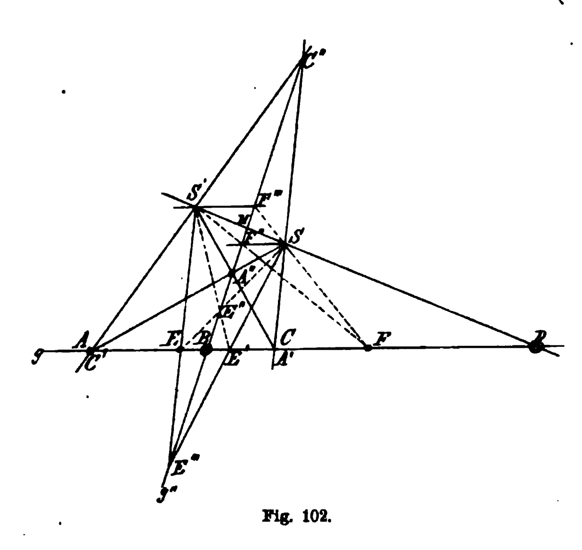


Fig. 102.

Es entsprechen sich also E und E′ doppelt, woraus sich ergiebt, dass dies für alle entsprechenden Punkte der beiden Reihen der Fall ist.

Zwei übereinander liegende Punktreihen von dieser Eigenschaft heissen nun involutorische Punktreihen. Projicieren wir dieselben von einem Punkte S aus, so erhalten wir zwei involutorische Strahlenbüschel, welchen dieselbe Eigenschaft in Bezug auf je zwei einander entsprechende Strahlen zukommt. Projicieren wir von S aus den unendlich fernen Punkt der Geraden g auf g″ und den hierdurch erhaltenen Punkt F″ von S′ aus nach F, so entspricht F dem unendlich fernen Punkte. Ebenso müssen wir F erhalten, wenn wir den unendlich fernen Punkt von S′ aus auf g″ nach F‴ projicieren und letzteren von S aus wieder nach g.

Derjenige Punkt F, welcher dem unendlich fernen Punkte konjugiert ist, heisst der Mittelpunkt der Involution.

29) Andere Konstruktion von konjugierten Punktepaaren (Fig. 103).

Sind A und A′ zwei konjugierte Punkte, F der Mittelpunkt der Involution, so ist $AF \cdot A'F = k^2$ (s. 1 d. Abschn.). Ziehen wir demnach durch F die Gerade PQ so, dass $PF \cdot FQ = k^2$ ist, so schneidet ein beliebiger durch P und Q gehender Kreis die Gerade g in zwei Punkten A und A′, für welche $AF \cdot A'F = PF \cdot QF = k^2$ ist. Hieraus folgt, dass jeder durch P und Q gehende Kreis die Gerade g in zwei konjugierten Punkten schneidet. Unter diesen Kreisen giebt es zwei, welche g in zwei Punkten B und D berühren; für diese ist $BF^2 = PF \cdot QF = DF^2 = k^2$. Es sind also B und D die Doppelpunkte der Involution.

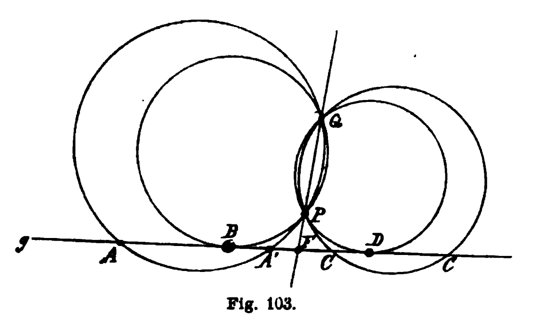


Fig. 103.

Nehmen wir an, A bewege sich in der Richtung nach F, so bewegt sich der entsprechende Punkt A′ in entgegengesetzter Richtung, wie aus der Konstruktion leicht hervorgeht. Beide fallen gleichzeitig in dem Doppelpunkte B zusammen. Man nennt deshalb die beiden involutorischen Punktreihen ungleichlaufend. Dieser Fall tritt stets ein, wenn die Reihen zwei Doppelelemente haben. Das eine kann sogar unendlich fern liegen. Wenn z. B. S und S′ (Fig. 104) auf einer Parallelen zu g liegen, dann ist D unendlich weit entfernt; der Doppelpunkt B liegt jetzt in der Mitte zwischen zwei konjugierten Punkten A und A′, aber die Involution ist wieder ungleichlaufend.

30) Ändert man die Konstruktion zur Bestimmung konjugierter Punktepaare so, dass man PF und QF zu verschiedenen Seiten von F aufträgt,

(s. Fig. 105), und legt man durch P und Q einen beliebigen Kreis, so erhält man zwei Punkte A und A′ auf verschiedenen Seiten von F, für welche $AF \cdot A'F = PF \cdot QF$ d. h. gleich k^2 ist. Gleichzeitig erkennen wir, dass,

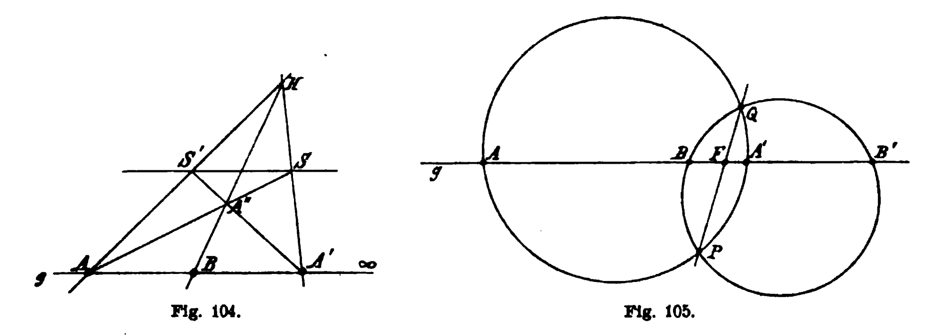


Fig. 104. Fig. 105.

wenn A sich von F entfernt, A′ diesem Punkte näher rückt. Ein Zusammenfallen der konjugierten Punkte findet also nicht statt, d. h. bei gleichlaufender Involution giebt es keine Doppelpunkte. Der Mittelpunkt F einer gleichlaufenden Involution liegt stets auf der von zwei konjugierten Elementen begrenzten Strecke und derjenige einer ungleichlaufenden Involution stets ausserhalb derselben.

31) Ist $PQ \perp g$ und $PF = QF$ (Fig. 106), so stehen die Geraden, welche zwei konjugierte Punkte A und A′ mit Q verbinden, senkrecht zu einander. Wird also ein rechter Winkel um seinen Scheitel gedreht, so schneiden die Schenkel desselben auf einer Geraden g zwei in gleichlaufender Involution befindliche Punktreihen aus.

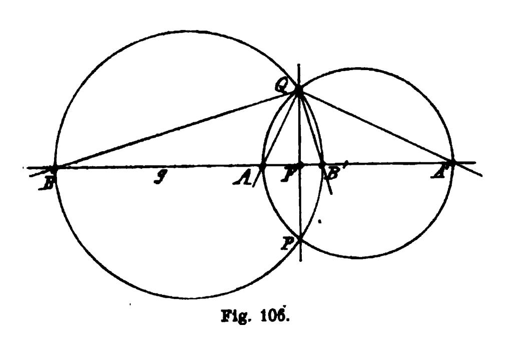


Fig. 106.

In Fig. 103 liegen die Abschnitte PF und QF auf einerlei Seite des Punktes F, dieselben sind deshalb mit gleichen Vorzeichen zu nehmen, und ihr Produkt $PF \cdot QF = k^2$ ist als positiv anzusehen. Das Gleiche gilt von zwei konjugierten Punkten A und A′, welche in diesem Falle der ungleichlaufenden Involution stets auf derselben Seite des Mittelpunktes F liegen. AF und AF′ sind deshalb beide zugleich positiv oder negativ. Bei gleichlaufender Involution (Fig. 105) haben PF und QF verschiedene Vorzeichen, also ist in diesem Falle $PF \cdot QF = -k^2$. Ebenso haben die Abstände zweier konjugierten Punkte A und A′ von F verschiedene Vorzeichen; A und A′ liegen deshalb zu verschiedenen Seiten von F. Für einen Doppel-

punkt ist das Quadrat seines Abstandes von F gleich $-k^2$; der Abstand ist also imaginär, und die Doppelpunkte sind in diesem Falle nicht konstruierbar. Man pflegt sie die imaginären Doppelpunkte zu nennen und sie durch die Involution als gegeben (wenn auch nicht darstellbar) anzusehen.

32) Von zwei ungleichlaufenden involutorischen Punktreihen ist ein Paar konjugierter Punkte A und A′ und der zwischen beiden liegende Doppelpunkt B gegeben. Man soll den einem beliebigen Punkte C konjugierten Punkt und den zweiten Doppelpunkt bestimmen.

Von zwei ungleichlaufenden involutorischen Strahlenbüscheln ist ein Paar konjugierter Strahlen a und a′ und der zwischen beiden liegende Doppelstrahl b gegeben. Man soll den einem beliebigen Strahle c konjugierten Strahl und den zweiten Doppelstrahl bestimmen.

Leicht mit Hülfe von Fig. 102 oder 103 zu lösen.

33) Von einer ungleichlaufenden Involution sind zwei Paare konjugierter Punkte AA′, BB′ gegeben. Man soll den einem beliebigen Punkte C konjugierten Punkt C′, die Doppelpunkte und den Mittelpunkt der Involution bestimmen. Mit Hülfe von Fig. 103 zu lösen.

34) Zwei Paare AA′, BB′ konjugierter Punkte einer gleichlaufenden Involution sind gegeben. Man soll den Mittelpunkt der Involution und den einem gegebenen Punkte C konjugierten Punkt bestimmen. Ferner sollen die beiden konjugierten Punkte gefunden werden, welche gleich weit vom Mittelpunkt entfernt liegen. (Ideelle Doppelpunkte.)

35) Da involutorische Punktreihen von einem Punkte S aus durch involutorische Strahlenbüschel projiciert werden, so kann man für letztere dieselben Aufgaben lösen, wenn man die Büschel mittelst einer Geraden durchschneidet.

36) Die beiden Doppelpunkte B und D einer ungleichlaufenden Involution sind gegeben. Man soll den einem gegebenen Punkte A konjugierten Punkt A′ bestimmen (Fig. 107).

Aufl. Ziehe von einem beliebigen Punkte S aus die Strahlen AS und BS und schneide dieselben mit einer durch D gehenden Geraden DG. Von G aus ziehe man GH parallel zu AD, bestimme den Mittelpunkt F der Involution als Mitte zwischen B und D. Ziehe HF und durch den Schnittpunkt K den Strahl SA′, welcher nun AD in dem gesuchten Punkt A′ schneidet. Beweis folgt leicht aus Fig. 102.

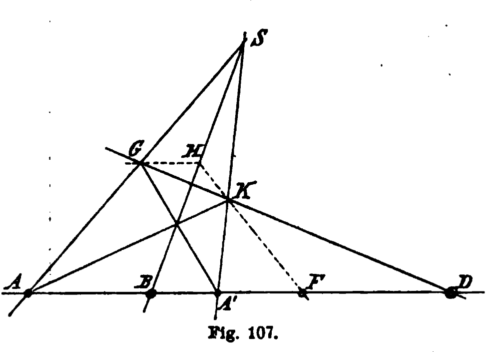


Fig. 107.

Oder: man zeichne zwei auf derselben Seite von AD liegende Kreise, welche diese Gerade in B bez. D berühren und sich zugleich untereinander schneiden. Legt man durch die Schnittpunkte der Kreise und durch A einen dritten Kreis, so trifft derselbe AD in dem Punkte A'. (Nach Fig. 103.)

Man löst diese Aufgabe nur durch Ziehen gerader Linien ohne Hülfe des Zirkels auf folgende Weise (Fig. 108).

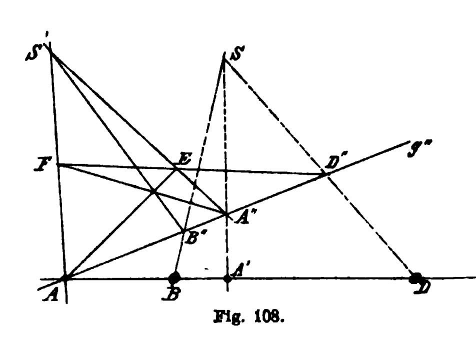


Fig. 108.

Da zwei Gruppen von je vier harmonischen Punkten stets projektivisch sind, so ziehen wir durch A eine belieliege Gerade g'' und bestimmen auf dieser mittelst irgend eines vollständigen Vierecks AA''EF die vier harmonischen Punkte AA''B''D''. Da nun diese und die gesuchte Reihe den Punkt A entsprechend gemeinschaftlich haben, so liegen die beiden Reihen perspektivisch. Das Projektionscentrum S ist der Schnitt der Strahlen B''B und D''D. Von S aus projicieren wir nun A'' nach A'.

37) Gegeben ein Paar konjugierter Punkte A und A' einer ungleichlaufenden Involution und der Mittelpunkt F derselben. Man soll die Doppelpunkte und das einem gegebenen Elemente E konjugierte Element bestimmen.

38) Die beiden ideellen Doppelpunkte einer gleichlaufenden Involution sind gegeben, man soll den einem beliebigen Punkte A konjugierten Punkt A' bestimmen.

39) Durch je zwei Gegenseiten eines vollständigen Vierecks wird eine beliebige Gerade g in drei Punktepaaren einer Involution geschnitten (Fig. 109).

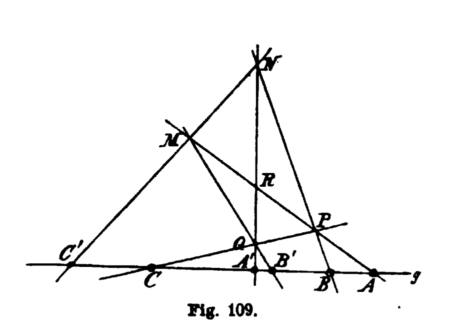


Fig. 109.

Je zwei Gegenecken eines vollständigen Vierseits werden aus einem beliebigen Punkte durch drei Paare von Strahlen einer Involution projiciert (Fig. 110).

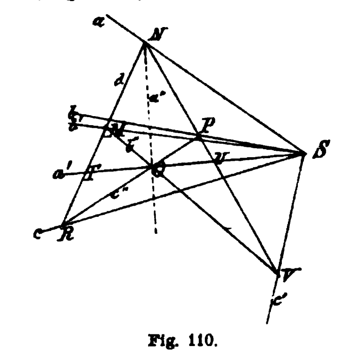


Fig. 110.

Projicieren wir die Punktreihe AB'A'C von Q aus auf AM, so erhalten wir die Punktreihe AMRP, welche somit zu der vorigen perspektivisch liegt. Wird die letzte Punktreihe von N auf g projiciert, so erhalten wir die Reihe AC'A'B, folglich sind auch die Reihen AB'A'C und AC'A'B oder auch AB'A'C und ABA'C' projektivisch. Hieraus erkennen wir, dass A und A' zwei sich selbst entsprechende Doppelpunkte sind. Folglich bilden die Gruppen AA', BB', CC' drei Paare konjugierter Punkte einer Involution.

Schneiden wir den Büschel ab'a'c durch die Gerade d, so erhalten wir auf dieser die Punktreihe NMTR, welche von Q aus durch den Büschel a''b''a'c'' projiciert wird. Folglich sind die beiden Büschel ab'a'c und a''b''a'c'' in perspektivischer Lage. Der letztere ist aber dem Büschel ac'a'b perspektivisch, weil beide die Punktreihe NVUP projicieren, folglich sind nun auch die Büschel ab'a'c und ac'a'b oder aba'c' projektivisch. Hieraus erkennen wir, dass a und a' zwei sich selbst entsprechende Doppelstrahlen sind. Folglich bilden die Gruppen aa', bb', cc' drei Paare konjugierter Strahlen einer Involution.

III. Abschnitt.

Erzeugnisse projektivischer Strahlenbüschel und projektivischer Punktreihen.

1) Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektivischen Strahlenbüschel S und S', welche nicht perspektivisch liegen und auch nicht denselben Mittelpunkt haben, bilden eine Punktreihe zweiter Ordnung. Sie kann mit einer beliebigen Geraden g höchstens zwei Punkte gemeinschaftlich haben. Denn lägen drei Punkte der Reihe auf g, so würden die Büschel S und S' perspektivisch sein und dann müssten die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen sämtlich auf g liegen.

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projektivischen Punktreihen g und g', welche nicht perspektivisch liegen und nicht denselben Träger haben, bilden ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Durch einen beliebigen Punkt M können höchstens zwei Strahlen des Büschels gehen. Denn läge M auf drei Strahlen desselben, so würden die Reihen g und g' perspektivisch sein und dann müssten die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punkte sämtlich durch M gehen.

Die Punktreihe oder die von derselben erzeugte Kurve **zweiter Ordnung** enthält die beiden Mittelpunkte S und S′ der erzeugenden Strahlenbüschel. Denn betrachten wir die Gerade SS′ als einen Strahl des Büschels S, so kann derselbe den entsprechenden durch S′ gehenden Strahl des andern Büschels nur in S′ treffen.

Der Büschel oder die von demselben eingehüllte Kurve **zweiter Klasse** wird von den beiden Trägern g und g′ der erzeugenden Punktreihen berührt. Denn betrachten wir den Schnittpunkt P der Geraden g und g′ als einen Punkt der Reihe g, so kann die Verbindungslinie desselben mit dem entsprechenden Punkt der Reihe g′ nur mit g′ zusammenfallen.

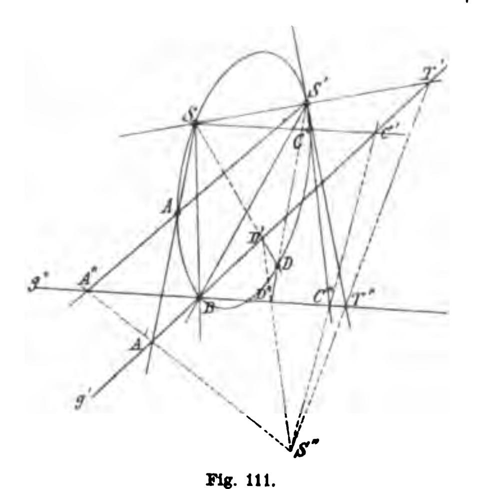


Fig. 111.

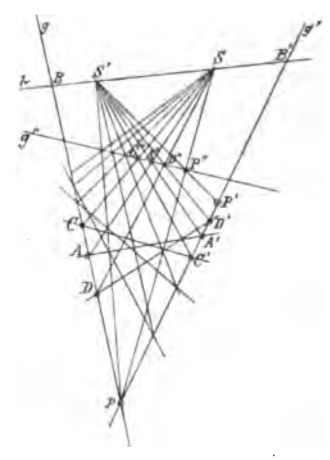


Fig. 112.

Da die Projektivität zweier Strahlenbüschel durch drei Paare entsprechender Strahlen festgestellt ist, so ist die Kurve zweiter Ordnung durch die beiden Mittelpunkte S und S′ und durch drei beliebige andere ihrer Punkte völlig bestimmt.

Um dieselbe zu konstruieren, d. h. so viele Punkte zu bestimmen, dass man die Kurve darnach zeichnen kann, haben wir diejenigen Strahlen des einen Büschels zu bestimmen, welche beliebigen Strahlen des anderen entsprechen (S. II, 8).

Wir ziehen demnach durch einen

Da die Projektivität zweier Punktreihen durch drei Paare entsprechender Punkte festgestellt ist, so ist die Kurve zweiter Klasse durch die beiden Träger g und g′ und durch drei beliebige andere ihrer Tangenten völlig bestimmt.

Um dieselbe zu konstruieren, d. h. so viele Tangente zu bestimmen, dass man die Kurve darnach zeichnen kann, haben wir diejenigen Punkte der einen Reihe zu bestimmen, welche beliebigen Punkten der anderen Reihe entsprechen (S. II, 8).

Wir nehmen demnach auf einer

der gegebenen Punkte z. B. B zwei Geraden g' und g''. Die erstere wird von den gegebenen Strahlen des Büschels S in den Punkten A', B, C' und die zweite von den entsprechenden Strahlen des Büschels S' in den Punkten A'', B, C'' getroffen. Diese beiden Punktreihen sind also projektivisch und da der Punkt B beiden entsprechend gemeinschaftlich ist, so haben sie perspektivische Lage. Der Mittelpunkt S'' des Büschels, welcher beide Reihen projiciert, ist der Durchschnitt der Geraden $A'A''$ und $C'C''$. Wird nun g' von einem beliebigen Strahle des Büschels S in D' getroffen, so projicieren wir D' von S'' aus auf g'' nach D''; dann ist $S'D''$ der SD' entsprechende Strahl des zweiten Büschels. Beide entsprechende Strahlen treffen sich in D, einem neuen Punkt der gesuchten Kurve. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man beliebig viele Punkte der Kurve bestimmen.

Betrachten wir die Verbindungslinie SS' der Mittelpunkte der beiden Strahlenbüschel als Strahl des Büschels S, so finden wir den entsprechenden Strahl des Büschels S', wenn wir den Schnittpunkt T' des Strahles SS' mit g' von S'' aus auf g'' projicieren, wodurch wir den Punkt T'' erhalten. Hieraus ergiebt sich $S'T''$ als der gesuchte entsprechende Strahl. Dieser wird von ST' in S' getroffen. Wir erkennen nun leicht, dass $S'T''$ eine Tangente der Kurve sein muss, denn einem sehr nahe an SS' lie-

der gegebenen Tangenten z. B. b zwei Punkte S und S' an. Von dem ersteren aus projicieren wir die Punkte A, B, C und von dem anderen die Punkte $A'B'C'$. Die beiden hieraus hervorgehenden Strahlenbüschel sind also projektivisch und da der Strahl SS' oder b beiden entsprechend gemeinschaftlich ist, so sind sie auch in perspektivischer Lage. Die Gerade g'', auf welcher die entsprechenden Strahlen der beiden Büschel zusammentreffen, ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte A'' und C'', in welchen sich die entsprechenden Strahlen SA, $S'A'$ und SC, $S'C'$ treffen. Ist nun D ein beliebiger Punkt der Reihe g, so projicieren wir denselben von S aus nach D'' und den letzteren wieder von S' aus nach D'. Dann ist D' der dem D entsprechende Punkt der Reihe g'. Die Verbindungslinie von D und D' ist nun eine neue Tangente der gesuchten Kurve. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man beliebig viele Tangenten der Kurve bestimmen.

Betrachten wir den Schnittpunkt P der beiden Punktreihen als einen Punkt der Reihe g, so finden wir den entsprechenden Punkt der Reihe g', wenn wir den Schnittpunkt P'' des Strahles SP mit g'' von S' aus auf g' projicieren, wodurch wir den Punkt P' erhalten. Hieraus ergiebt sich P' als der gesuchte entsprechende Punkt. Die Verbindungslinie desselben mit P liegt in g'. Wir erkennen nun leicht, dass P' zugleich der Berührungspunkt der Tangente g' sein muss, denn einem sehr nahe bei P liegenden

genden Strahle des Büschels S entspricht ein Strahl des Büschels S′, welcher dem Strahl S′T″ sehr nahe liegt. Der Schnittpunkt dieser beiden entsprechenden Strahlen liegt nahe bei S′ und fällt mit diesem Punkte beim Übergang zu den Strahlen SS′ und S′T″ zusammen.

Man konstruiere hiernach auch die Tangente der Kurve im Punkte S.

2) Eine Kurve zweiter Ordnung ist durch drei Paare entsprechender Strahlen zweier projektivischen Büschel S und S′ gegeben, welche sich in den drei Punkten A, B und C treffen. Man soll den zweiten Durchschnittspunkt einer durch A gehenden Geraden g′ mit der Kurve finden.

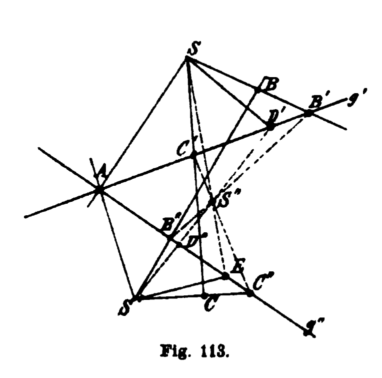


Fig. 113.

Wir ziehen durch A noch eine zweite Gerade g″, dann wird g′ von den gegebenen Strahlen des Büschels S in A, B′ und C′, ferner g″ von den Strahlen des Büschels S′ in A, B″ und C″ getroffen. Folglich entstehen auf g′ und g″ projektivische Punktreihen, welche jedoch perspektivisch liegen, weil beide den Punkt A ent-

Punkte der Reihe g entspricht ein Punkt der Reihe g′, welcher P′ sehr nahe liegt. Die Verbindungslinie dieser beiden entsprechenden Punkte liegt nahe bei g′ und fällt mit dieser Geraden beim Übergang zu den Punkten P und P′ zusammen.

Man konstruiere hiernach auch den Berührungspunkt der Tangente g.

Eine Kurve zweiter Klasse ist durch drei Paare entsprechender Punkte zweier projektivischen Punktreihen g und g′ gegeben, durch welche drei Tangenten a, b und c der Kurve bestimmt sind. Man soll von einem auf a liegenden Punkte P die zweite Tangente an die Kurve ziehen.

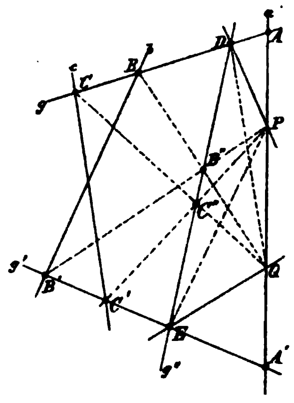


Fig. 114.

Wir nehmen auf a noch einen zweiten Punkt Q an, dann werden AB und C von Q aus und A′B′C′ von P aus projiciert. Folglich entstehen zwei projektivische Strahlenbüschel, welche jedoch perspektivisch liegen, weil beide den Strahl a entsprechend gemeinschaftlich haben. Die Gerade g″, welche der Schnitt

sprechend gemeinschaftlich haben. Der Mittelpunkt S″ des Büschels, welcher beide Reihen projiciert, ist der Durchschnitt der Geraden B′B″ und C′C″. Ziehen wir den Strahl S′D′ durch S″, so trifft derselbe g″ in D″ und wenn wir den letzteren Punkt von S″ aus auf g′ projcieren, erhalten wir den Punkt D′. Dann ist aber SD′ der S′D″ entsprechende Strahl des Büschels S. Beide Strahlen treffen sich in dem gesuchten Punkte D′. Leicht erkennen wir nun auch, dass der durch S″ gehende Strahl SS″ die Gerade g″ in ihrem zweiten Durchschnittspunkte E mit der Kurve trifft. der beiden Büschel ist, geht durch die Punkte B″ und C″. Schneidet nun g″ die Gerade g in D, dann ist QD ein Strahl des Büschels Q und wenn wir PD ziehen, so ist PD der dem QD entsprechende Strahl des Büschels P. PD trifft demnach g′ in dem D entsprechenden Punkte der Reihen g′, folglich ist PD die gesuchte Tangente. Leicht erkennen wir nun auch, dass die Gerade QE die zweite Tangente ist, welche von Q an die Kurve gezogen werden kann.

3) Betrachten wir den besonderen Fall zweier gleichen Büschel S und S′ (Fig. 115), (in welchen also je zwei Strahlen des einen Büschels den gleichen Winkel miteinander bilden, wie die entsprechenden Strahlen des anderen Büschels). Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen jetzt auf einem Kreise, was sich leicht aus der Eigenschaft desselben ergiebt, dass auf gleichen Bögen stehende Peripheriewinkel gleich gross sind. Der Tangente TS entspricht S′S als Strahl des Büschels S′, ($\angle AST = \angle AS'S$); ebenso entspricht die Tangente T′S′ der Geraden SS′, wenn man die letztere als einen Strahl des Büschels S betrachtet. Der Kreis ist deshalb ein besonderer Fall der Kurven zweiter Ordnung. Die genannte Eigenschaft der Peripheriewinkel auf gleichen Bögen zeigt ferner, dass die Mittelpunkte S und S′ beliebig auf dem Kreise angenommen werden können. Es werden also alle Punkte des Kreisumfanges aus zwei beliebigen Punkten desselben durch gleiche Strahlenbüschel projiciert.

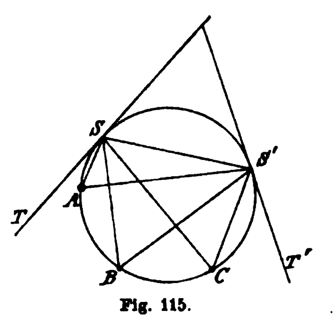


Fig. 115.

4) Ebenso leicht lässt sich zeigen, dass der Kreis auch zu den Kurven zweiter Klasse gehört. Sind nämlich a und a′ (Fig. 116) zwei feste Tangenten eines Kreises, E und F die Berührungspunkte derselben, b eine bewegliche Tangente und sind ferner B, C, D ... bez. B′, C′, D′ die Punkte, in welchen die bewegliche Tangente in den Lagen b, c, d ... die festen Tangenten a und a′ schneidet, so ist $\angle BSB' = \angle CSC' = \angle DSD'$ u. s. f.

Denn wenn b den Kreis in Q berührt, so ist bekanntlich $\angle BSE = \angle BSQ$ und $\angle B'SQ = \angle B'SF$. Hieraus folgt, dass $\angle BSB' = \frac{1}{2} \angle ESF$ ist. Ebenso ist $\angle CSC' = \frac{1}{2} \angle ESF$ u. s. f. Die beiden Büschel S (B, C, D . . .) und S (B′ C′ D′ . . .) sind daher gleich, folglich sind die beiden Punktreihen B, C, D . . . und B′C′D′ . . . projektivisch. Die Tangenten b, c, d . . . sind aber die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Büschel. Ziehen wir die Gerade von S nach dem Schnittpunkte P der Tangenten a und a′, so ist auch $\angle PSF = \angle BSB'$. Dem Strahle SP des Büschels S (B, C, D..) entspricht deshalb der Strahl SF des Büschels S (B′C′D′..), also entspricht auch der Berührungspunkt F dem Schnittpunkte P. Auf zwei beliebigen festen Tangenten werden also von den übrigen Tangenten des Kreises projektivische Punktreihen ausgeschnitten.

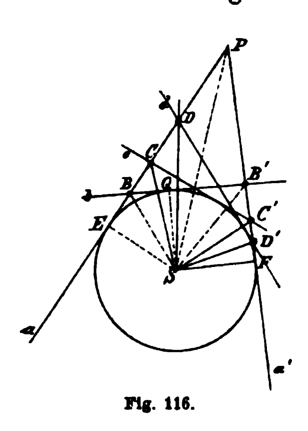


Fig. 116.

5) Die für den Kreis nachgewiesene Eigenschaft, dass alle Punkte des Umfanges aus zwei beliebigen Punkten desselben durch projektivische Strahlenbüschel projiciert werden, lässt sich durch Kollineation nun leicht auf die Kurven zweiter Ordnung übertragen. Sind S und S′ (Fig. 117) die Mittelpunkte zweier nicht gleichen projektivischen Strahlenbüschel, ABC die Schnittpunkte von drei Paaren entsprechender Strahlen derselben, so ist hierdurch eine Kurve zweiter Ordnung bestimmt. Es sei ST der dem Strahle SS′ des Büschels S′ entsprechende Strahl (also die Tangente in S), ferner K ein Kreis, welcher ST in S berührt und S″ der Schnittpunkt von SS′ mit dem Kreise.

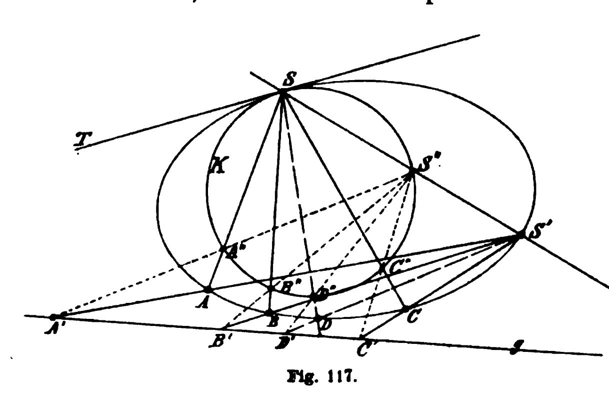


Fig. 117.

dann treffen die Strahlen SA, SB, SC den Kreis in A″B″C″ . . ., welche Punkte aus S″ durch einen dem Büschel S (A, B, C . . .) gleichen Büschel projiciert werden. Die Büschel S″ (A″B″C″ . . .) und S′ (A, B, C . . .) sind daher auch projektivisch, und da beide den Strahl SS′ entsprechend gemeinschaftlich haben, so sind sie in perspektivischer Lage. Die Schnittpunkte A′B′C′ entsprechender Strahlen der beiden Büschel liegen demnach auf einer Geraden g. Um den einem beliebigen Strahle SD des Büschels S

entsprechenden Strahl des Büschels S′ zu finden, projicieren wir den Punkt D″, in welchem SD den Kreis K trifft von S″ aus nach D′ auf g, dann ist S′D′ der gesuchte Strahl, welcher den ersteren in D trifft.

Diese Konstruktion zeigt uns nun, dass die Kurve zweiter Ordnung und der Kreis K kollineare Figuren sind. S erscheint als Kollineationscentrum und g als Achse; S′ und S″ als einander entsprechende Punkte. Nehmen wir zwei andere Punkte des Kreisumfanges als Mittelpunkte gleicher Strahlenbüschel an, welche die Punkte des Kreises projicieren, so entsprechen diesen in der Kurve zweiter Ordnung wieder zwei den vorigen, also auch unter sich projektivische Strahlenbüschel. Es werden also auch die Punkte einer Kurve zweiter Ordnung aus zwei beliebigen ihrer Punkte stets durch zwei projektivische Strahlenbüschel projiciert.

6) Auf gleiche Weise folgt, dass auch die Kurven zweiter Klassen zu den Kegelschnitten gehören. Es seien g und g′ die Träger zweier projektivischen Punktreihen, von welchen drei Paare entsprechender Punkte AA′, BB′ und CC′ gegeben sind. Dann sind die Geraden AA′, BB′, CC′ Tangenten der Kurve. Nehmen wir C und C′ als Mittelpunkte zweier Strahlenbüschel an, von welchen der erste die Reihe g′, der zweite die Reihe g projiciert, so sind dieselben projektivisch. Sie haben aber auch perspektivische Lage, weil CC′ ein gemeinschaftlich entsprechender Strahl beider Büschel ist. Die Gerade g″, welche der gemeinschaftliche Schnitt der Büschel ist, geht durch A″ und B″; sie trifft g und g′ in den Punkten P bez. Q′, welche dem Punkte P′ bez. Q (Schnittpunkt von g und g′) entsprechen. In P und Q′ berührt nach 1) die Kurve die Geraden g und g′.

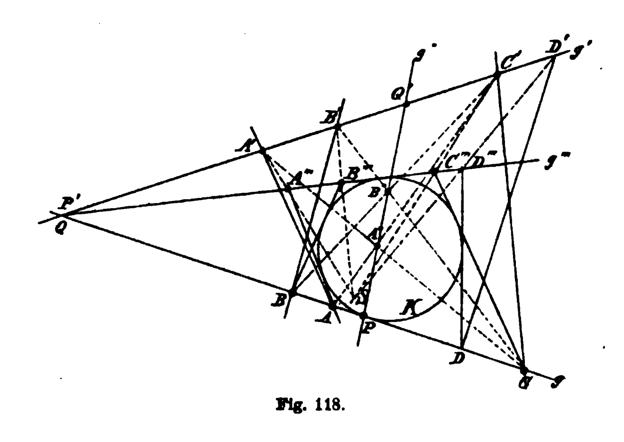


Fig. 118.

Zeichnen wir nun einen Kreis K, welcher eine der beiden Geraden z. B. g in P berührt und ziehen wir von P′ die Tangente g‴ an denselben, so werden von den übrigen Tangenten des Kreises auf g und g‴ projektivische Punktreihen ausgeschnitten. Wir ziehen von den gegebenen Punkten A, B, C die Tangenten AA‴, BB‴, CC‴, dann ist die Reihe A‴B‴C‴.. projektivisch zu A, B, C.., also auch projektivisch zu A′B′C′... Da P′ als Punkt der Reihe g′ sowohl wie als Punkt der Reihe g‴ dem Punkte P entspricht, so haben die Reihen g′ und g‴ den Punkt P′ entsprechend ge-

meinschaftlich. Sie liegen perspektivisch und der Mittelpunkt S des Büschels, welcher beide Reihen projiciert, ist der Durchschnitt der Verbindungslinien A′A‴, B′B‴ entsprechender Punkte.

Ist D ein beliebiger Punkt der Reihe g, DD‴ die Tangente an K, ferner D′ die Projektion des Punktes D‴ aus S auf g′, dann ist DD′ eine neue Tangente der Kurve zweiter Klasse. Man sieht aber, dass diese Kurve die kollineare Figur zu dem Kreise K ist, wenn S das Centrum, g die Kollineationsachse und g′ und g‴ entsprechende Geraden sind. Es werden demnach auch zwei beliebige feste Tangenten der Kurve zweiter Klasse, welche hiernach ein Kegelschnitt ist, von den übrigen Tangenten in projektivischen Punktreihen geschnitten.

Aus den beiden vorhergehenden Gesetzen ergeben sich nun leicht die folgenden:

7) Ein Kegelschnitt ist durch fünf Punkte, von denen nicht 3 in gerader Linie liegen, bestimmt. Man kann nämlich zwei Punkte als Mittelpunkte projektivischer Strahlenbüschel betrachten, welche die drei übrigen Punkte projicieren. Hierdurch ist aber die Kurve bestimmt.

Ein Kegelschnitt ist durch fünf Tangenten, von denen nicht drei durch einen Punkt gehen, bestimmt. Man kann nämlich zwei Tangenten als Träger zweier projektivischen Punktreihen betrachten, welche von den drei übrigen Tangenten in entsprechenden Punkten geschnitten werden. Hierdurch ist aber die Kurve bestimmt.

Einbeschriebenes Sechseck.

8) In jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechseck schneiden sich die drei Paare gegenüberliegender Seiten in Punkten einer Geraden (Fig. 119).

Umbeschriebenes Sechsseit.

In jedem einem Kegelschnitt umbeschriebenen Sechsseit schneiden sich die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Eckpunkte in einem Punkt (Fig. 120).

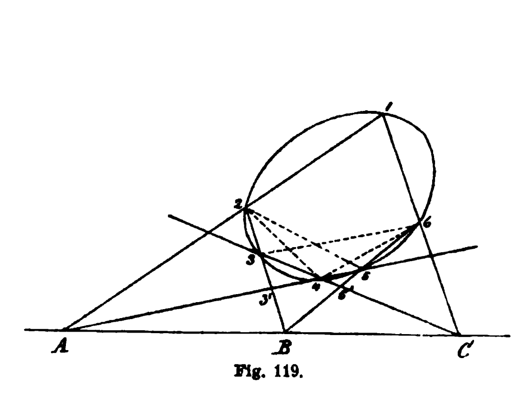


Fig. 119.

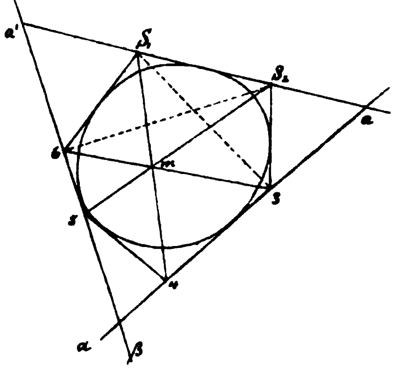


Fig. 120.

Betrachtet man nämlich die Punkte 2 und 6 als Mittelpunkte von zwei projektivischen Strahlenbüscheln, welche die übrigen Eckpunkte des Sechsecks projicieren, so schneiden dieselben auf den Geraden 4 5 bez. 3 4 projektivische Punktreihen aus, nämlich von dem Büschel 6 die Punkte 3, 4, 5′, C auf 3 4 und von dem Büschel 2 die Punkte 3′, 4, 5′, A auf 4 5. Die beiden Punktreihen haben aber den Punkt 4 entsprechend gemeinschaftlich, folglich sind sie in perspektivischer Lage. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte, nämlich die Geraden 3 3′, 5 5′, AC gehen durch einen Punkt B. Folglich liegen A, B und C in einer Geraden. (Satz von Pascal.)

Betrachtet man nämlich die Tangenten α und β als Träger der zwei projektivischen Punktreihen a, 4 . . bez. a′, 5 . . und projiciert dieselben aus den Mittelpunkten S_1 bez. S_2 durch projektivische Strahlenbüschel, so haben diese den Strahl aa′ entsprechend gemeinschaftlich. Die beiden Büschel sind demnach in perspektivischer Lage, folglich liegen die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen auf einer Geraden. Die Paare entsprechender Strahlen sind aber $S_1 4$ und $S_2 5$; $S_1 6$ und $S_2 6$; $S_1 3$ und $S_2 3$. Folglich liegen die Schnittpunkte 6, m und 3 auf einer Geraden und $S_1 4$, $S_2 5$, 3 6 gehen durch m. (Satz von Brianchon.)

Wir wollen diese beiden wichtigen Sätze zur Lösung einer Reihe von Aufgaben benutzen.

9) Fünf Punkte eines Kegelschnittes sind gegeben. Man soll andere Punkte desselben konstruieren (Fig. 119).

Aufl. Die gegebenen Punkte seien 1, 2, 3, 4, 5. Die Verbindungslinien 1 2, 2 3, 3 4, 4 5 betrachten wir als Seiten eines dem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechsecks, von denen alsdann noch zwei Seiten, nämlich 1 6 und 5 6 fehlen. Eine derselben z. B. 1 6 ziehen wir von 1 aus der Richtung nach willkürlich. Dann schneiden sich 1 2 und 4 5 in A; 3 4 und 1 6 in C, wodurch nun die Gerade AC, auf welcher je zwei gegenüberliegende Seiten des Sechsecks zusammentreffen, bestimmt ist. Verlängern wir jetzt 2 3 bis zum Durchschnitt B mit AC,

Fünf Tangenten eines Kegelschnittes sind gegeben. Man soll andere Tangenten desselben konstruieren (Fig. 120).

Aufl. Die Schnittpunkte 3, 4, 5, 6 der gegebenen Tangenten betrachten wir als Ecken eines dem Kegelschnitt unbeschriebenen Sechsseits, von welchem alsdann noch zwei Ecken, nämlich S_1 und S_2 fehlen. Eine derselben z. B. S_1 nehmen wir auf 6 S_1 willkürlich an. Dann ist der Punkt m, in welchem sich die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken treffen, durch 4 S_1 und und 3 6 bestimmt. Ziehen wir jetzt 5m und verlängern dieselbe, bis sie 3 S_2 in S_2 trifft, so ist endlich $S_1 S_2$ die noch fehlende Tangente. Auf diese Weise lassen sich beliebig viele

so ist nun durch B und 5 die Gerade 5 6 bestimmt. Auf diese Weise lassen sich beliebig viele andere Punkte des Kegelschnittes finden.

10) Ist ein Fünfeck 1 2 3 4 5 (Fig. 121) einem Kegelschnitt einbeschrieben, so schneiden sich die abwechselnd liegenden Seiten 1 2 und 3 4, ferner 2 3 und 4 5, endlich 1 5 und die Tangente im gegenüberliegenden Eckpunkte 3 in drei Punkten einer Geraden.

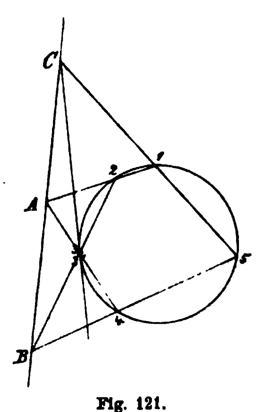


Fig. 121.

Dieser Satz ist als specieller Fall des Pascal'schen Satzes anzusehen, welcher sich ergiebt, wenn man eine Seite des Sechsecks (in Fig. 121 durch 3 3′ angedeutet) unendlich klein annimmt.

Hiernach kann man die Tangenten in den anderen Eckpunkten des Fünfecks bestimmen.

Man beweise ebenso folgende specielle Fälle des Pascal'schen Satzes:

11) Ist ein Viereck 1, 2, 3, 4 einem Kegelschnitt einbeschrieben, so treffen sich die Seite 1 2 und die Tangente in 3, die Seite 3 4 und die

andere Tangenten des Kegelschnittes finden.

Ist ein Fünfseit abcde (Fig. 122) einem Kegelschnitt umbeschrieben, so gehen die Verbindungslinien der Schnittpunkte von ab und cd, von bc und ae, und von de nach dem Berührungspunkt P der gegenüberliegenden Seite b durch einen Punkt m.

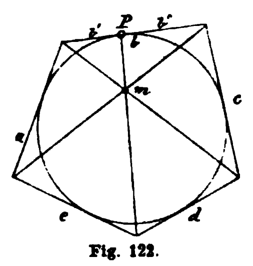


Fig. 122.

Dieser Satz ist als specieller Fall des Brianchon'schen Satzes anzusehen, welcher sich ergiebt, wenn zwei der Tangenten eines umbeschriebenen Sechsseits (in Fig. 122 durch b′, b″ angedeutet) eine Gerade bilden.

Hiernach kann man die Berührungspunkte der übrigen Seiten des Fünfseits bestimmen.

Man beweise ebenso folgende specielle Fälle des Brianchon'schen Satzes:

Ist ein Vierseit a, b, c, d einem Kegelschnitt umbeschrieben, so gehen die Verbindungslinien der Schnittpunkte von ab und cd, sowie von

Tangente in 2, endlich die Seiten 1 4 und 2 3 in Punkten, welche auf einer Geraden liegen.

12) Ist ein Dreieck einem Kegelschnitt einbeschrieben, so liegen die Schnittpunkte der drei Seiten bez. mit den Tangenten in den gegenüberliegenden Eckpunkten auf einer Geraden.

13) Es sind vier Punkte ABCD eines Kegelschnittes und die Tangente t in einem derselben, z. B. in B gegeben. Man soll andere Punkte des Kegelschnittes finden (Fig. 123).

ad und bc und diejenige der beiden Berührungspunkte P und Q der Seiten b und d (oder auch a und c) durch einen Punkt M.

Ist ein Dreiseit einem Kegelschnitt umbeschrieben, so gehen die Verbindungslinien der Ecken bez. mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten durch einen Punkt.

Es sind vier Tangenten a, b, c, d und der Berührungspunkt T der einen z. B. b gegeben. Man soll andere Tangenten des Kegelschnittes finden (Fig. 124).

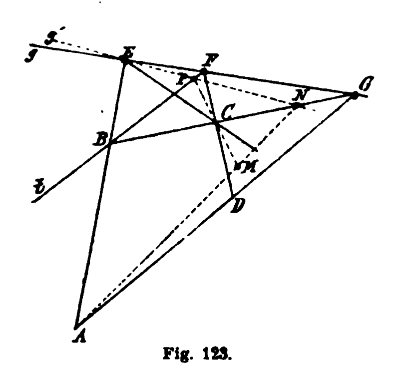


Fig. 123.

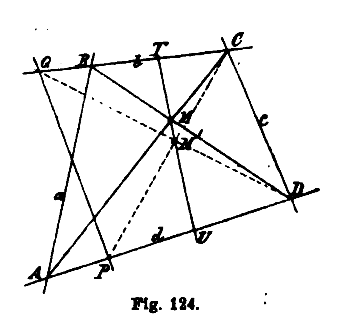


Fig. 124.

Aufl. Die Tangente t und die Seite CD treffen sich in F, die Seiten BC und AD in G. Durch F und G geht die Gerade g, auf welcher sich auch AB und die Tangente in C schneiden. Die letztere ist also die Verbindungslinie des Schnittpunktes E von AB und g mit C. Nehmen wir an, es werde von A aus eine beliebige Gerade AN gezogen, auf welcher der zweite Punkt M des Kegelschnittes bestimmt werden soll, dann können wir ABCM als ein neues dem Kegelschnitt einbeschrie-

Aufl. Ziehen wir durch den Schnittpunkt M der Diagonalen AC und BD die Gerade TM, so trifft die letztere die Seite d in ihrem Berührungspunkte U. Nehmen wir auf d den Punkt P beliebig als neuen Eckpunkt eines dem Kegelschnitt umbeschriebenen Vierseits an, dessen andere Ecken C und D unverändert bleiben sollen, dann schneiden sich CP und TU in M′. Durch den letzteren Punkt und durch D geht nun die Diagonale DQ, wodurch der vierte Eckpunkt Q und damit auch

benes Viereck betrachten. Ziehen wir durch E und durch den Schnittpunkt N der gegenüberliegenden Seiten AM und BC die Gerade g', so treffen auf dieser die Seite CM und die für den Punkt B gegebene Tangente in P zusammen. Hierdurch ist aber der Punkt M bestimmt.

die vierte Seite PQ des Vierseits, d. h. eine neue Tangente des Kegelschnittes bestimmt ist.

14) Drei Punkte eines Kegelschnittes und die Tangenten in zweien dieser Punkte sind gegeben. Man soll andere Punkte des Kegelschnittes bestimmen.

Drei Tangenten eines Kegelschnittes und die Berührungspunkte von zweien derselben sind gegeben. Man soll andere Tangenten des Kegelschnittes bestimmen.

15) Da die Erzeugnisse zweier projektivischen Strahlenbüschel oder Punktreihen, welche in einer Ebene liegen, Kegelschnitte sind, so entsteht noch die Frage nach den einzelnen Fällen, Ellipse, Parabel, Hyperbel. Wir sehen nun leicht, dass ein durch zwei projektivische Strahlenbüschel erzeugter Kegelschnitt unendlich ferne Punkte besitzt, wenn die beiden Büschel entsprechende Strahlen enthalten, welche unter sich parallel sind. Es kann dies jedoch nur bei einem Paar oder höchstens bei zwei Paaren vorkommen. Wären drei Paare bez. unter sich parallel, so würden die Strahlenbüschel gleich, d. h. je zwei entsprechende Strahlen würden parallel sein und lauter unendlich ferne Punkte erzeugen. Ist kein Paar entsprechender paralleler Strahlen vorhanden, so liegen alle Punkte des Kegelschnittes im Endlichen; die Kurve ist in diesem Falle eine Ellipse.

Nehmen wir an, zwei projektivische Büschel S und S_1, welche nicht perspektivisch liegen, besitzen nur ein Paar entsprechender Strahlen, welche unter sich parallel sind. Der Durchschnitt dieser beiden Strahlen liegt unendlich fern, man sagt deshalb, die Kurve, welche in diesem Falle **Parabel** genannt wird, hat einen unendlich fernen Punkt. Haben die beiden Büschel zwei Paare entsprechender Strahlen, welche bez. unter sich parallel sind, so sagt man, die Kurve habe zwei unendlich ferne Punkte. Dies ist die **Hyperbel**.

16) Beispiele für die Konstruktion einer Ellipse als Erzeugnis zweier projektivischen Strahlenbüschel sind schon im I. Teil, IV, 23 angegeben unter anderer Begründung.

Es sind nämlich in Fig. 125 und 126 die Punktreihen $G\delta_1\delta_2\delta_3\ldots$ und $A\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots$ ähnlich (dieselben werden durch ein Parallelstrahlenbüschel projiciert), folglich auch projektivisch. Projicieren wir das erste aus dem Mittelpunkt H und das zweite aus J, so erhalten wir $\xi_1, \xi_2, \xi_3\ldots$ als Schnittpunkte entsprechender Strahlen. Da in diesen beiden Büscheln

keine entsprechenden Strahlen parallel sind, so erzeugen dieselben eine Ellipse.

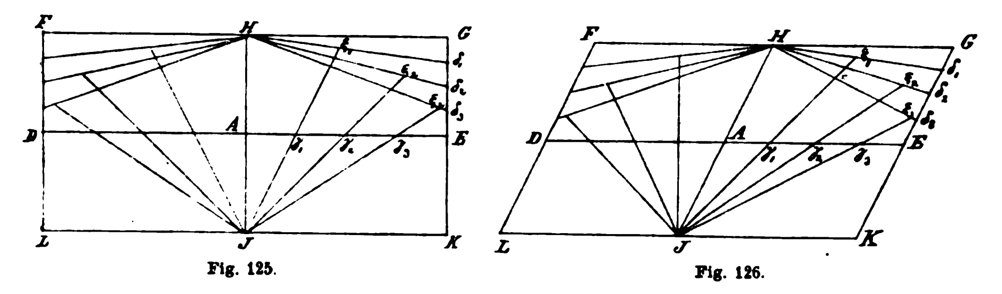


Fig. 125. Fig. 126.

17) Nehmen wir ferner an, g und g′ (Fig. 127) seien die Träger zweier ähnlichen Punktreihen 12345 ... und 1′2′3′4′5′ ..., in welchen einander entsprechen 1 und 1′, 2 und 2′ u. s. f. Die erste Reihe werde durch ein Parallelstrahlenbüschel, die zweite aus dem Punkte S der ersten Reihe projiciert. Dann ist in dem letzteren Büschel nur der Strahl a parallell zu dem entsprechenden Strahl des anderen Büschels. Die Schnittpunkte A, B, C, D, E ... entsprechender Strahlen liegen demnach auf einer Parabel.

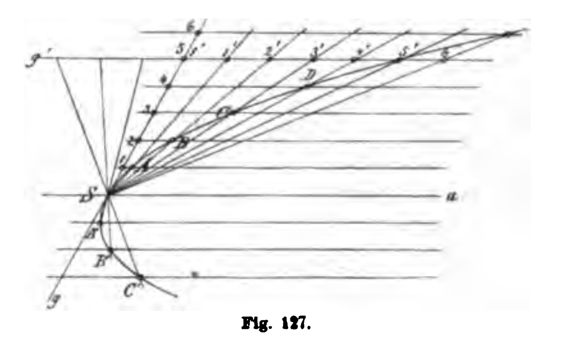


Fig. 127.

Anm. Nimmt man die zur Konstruktion dienenden Punkte 1, 2, 3, 4, 5 ... der ersten Reihe gleichweit voneinander entfernt an, so ist auch 1′2′ = 2′3′ = 3′4′ ... Leicht lässt sich nun zeigen, dass die Verbindungslinien der Punkte AA′, BB′, CC′ ... parallel zu g sind und von a halbiert werden. Stehen g und g′ senkrecht aufeinander, so wird a zur Achse der Parabel. g ist die Tangente in 1, weil der mit 5 zusammenfallende Punkt 1′ dem Punkte 1 entspricht.

18) Es sei BCDE (Fig. 128) ein Rechteck; durch die Mitten je zweier gegenüberliegender Seiten sind die Geraden g und g′ gezogen. Die Geraden BE und g′ seien die Träger zweier ähnlichen Punktreihen E1234 ... bez. A1′2′3′4′ ..., welche wir z. B. durch Teilung der Strecken BE und FG in dieselbe Anzahl von gleichen Teilen erhalten, so dass also E1 = 12 = 23.... ferner A1′ = 1′2′ = 2′3′ ... ist. Die erste Punktreihe projicieren wir aus S und die zweite aus S′; dann schneiden sich die entsprechenden Strahlen S1 und S′1′ in a_1; ebenso S2 und S′2′ in α_2 u. s. f. Die Punkte α_1, α_2 .. liegen auf einem Kegelschnitt, welcher in diesem Falle eine Hyperbel ist. Denn die beiden Büschel enthalten zwei Paare entsprechender Strahlen, welche bez. unter sich parallel sind, nämlich SG und S′F, ferner S′G und

S'F. Ziehen wir durch den Mittelpunkt A des Rechtecks die Geraden BD und CE, so sind dieselben jenen Strahlen bez. parallel und sie treffen die Hyperbel deshalb in ihren unendlich fernen Punkten. Diese Geraden sind

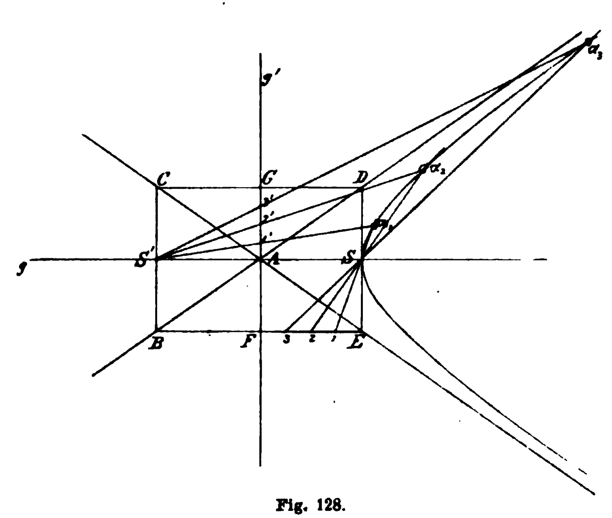


Fig. 128.

die Asymptoten der Hyperbel (s. I. Teil, IV, 35). Leicht ersieht man aus der Konstruktion, dass die Kurve sowohl in Bezug auf g wie auch in Bezug auf g' symmetrisch ist. In diesen Geraden liegen demnach die Achsen der Hyperbel.

19) Wir betrachten im Folgenden noch einige besondere Fälle, in welchen die Kegelschnitte als Kurven zweiter Klasse, d. h. als von ihren Tangenten eingehüllt auftreten.

Das Rechteck HJKL (Fig. 129) werde durch die Geraden DE und FG, welche die Seiten des ersteren halbieren, in vier kongruente Rechtecke zerlegt. FG sei Träger einer Punktreihe, welche wir aus den beiden Mittelpunkten H und D durch zwei perspektivische Strahlenbüschel auf JK bez. HJ projicieren. Dadurch entstehen auf den letzteren zwei projektivische Punktreihen. Ist M ein beliebiger Punkt der Reihe FG und sind P und Q seine Projektionen auf HJ bez. JK, dann ist PQ eine Tangente des Kegelschnittes.

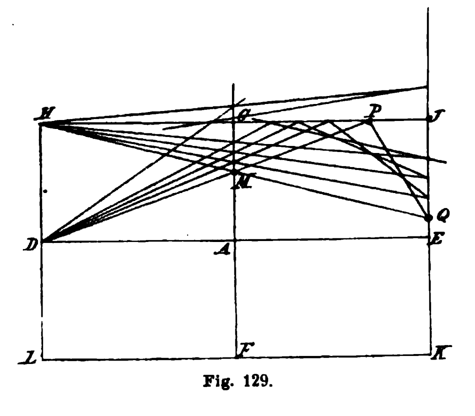


Fig. 129.

Nach 1) sind die beiden Träger der Punktreihen HJ und JK Tangenten

der Kurve; es lässt sich aber leicht zeigen, dass ebenso LK und HL die Kurve berühren, welche demnach eine Ellipse sein muss.

20) Es sei die Gerade g (Fig. 130) der Träger einer Punktreihe A, 1, 2, 3, 4 . . ., welche wir durch einen Parallelstrahlenbüschel auf eine andere Gerade g′ projicieren. g″ sei eine dritte Gerade, welche zu den projicierenden Strahlen jenes Büschels parallel ist. Auf diese projicieren wir nun die Punkte der Reihe g′, abermals durch einen Büschel, dessen Strahlen mit g parallel sind. Wir erhalten dadurch auf g und g″ zwei projektivische ähnliche Punktreihen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte wie 11″, 22″, 33″ umhüllen wiederum einen Kegelschnitt, welcher aber wie die Konstruktion zeigt, nur innerhalb des Winkelraumes BAC liegen kann, in diesem jedoch ins Unendliche verläuft. Die Kurve ist demnach eine Parabel. (S. I. Teil, IV, 22).

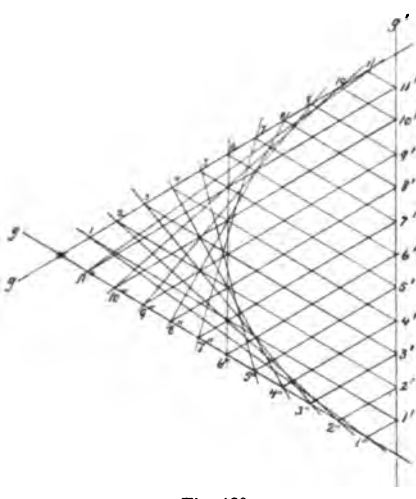


Fig. 130.

21) Es seien g und g′ (Fig. 131) die Träger zweier Punktreihen. Die beiden Punkte S und S′, welche bez. auf g und g′ liegen, seien die Mittelpunkte zweier gleichen Strahlenbüschel, welche auf g′ bez. g entsprechende

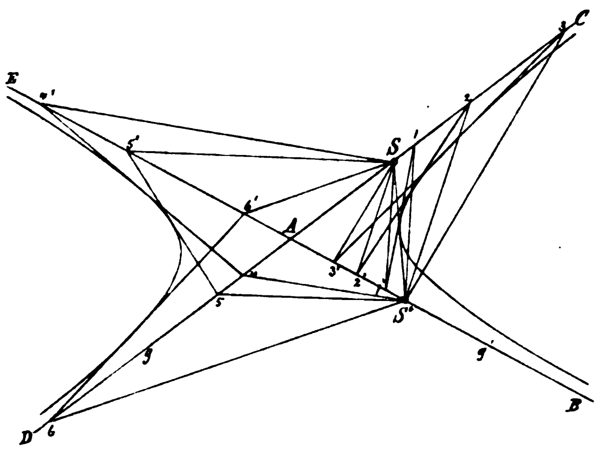


Fig. 131.

Punkte der Reihe projicieren. Wir nehmen an, SS′ sei ein gemeinschaftlich entsprechender Strahl der beiden Büschel und S 1′ sei parallel S′ 1;

S 2′ ∥ S′ 2; S 3′ ∥ S′ 3 u. s. f. Dann sind 1 und 1′, 2 und 2′ u. s. f. entsprechende Punkte der projektivischen Reihen, welche durch die gleichen Büschel S und S′ auf g und g′ ausgeschnitten werden. Die Verbindungslinien S S′, 1 1′, 2 2′, 3 3′ entsprechender Punkte hüllen nun einen Kegelschnitt ein, welcher in jedem der beiden Winkelräume BAC und DAE ins Unendliche verläuft. Die beiden Träger g und g′ der projektivischen Punktreihen sind ebenfalls Tangenten, deren Berührungspunkte die dem Schnittpunkte A entsprechenden Punkte der Reihen sind (s. 1 d. Abschn.). Die letzteren liegen aber unendlich fern. Die Kurve ist demnach eine Hyperbel und g und g′ sind deren Asymptoten.

Anm. Diese Konstruktion führt noch zu einer bemerkenswerten Eigenschaft der Hyperbel. Sie zeigt, dass jedes Dreieck, welches eine beliebige Tangente z. B. 1 1′ mit den Asymptoten einschliesst, dem Dreieck ASS′ am Inhalt gleich ist.

Pol und Polare.

22) Wir betrachten noch einmal die Aufgabe aus fünf gegebenen Punkten eines Kegelschnittes beliebig viele andere zu konstruieren. Zwei derselben z. B. S und S′ (Fig. 132) nehmen wir als Mittelpunkte projektivischer Strahlenbüschel an, welche die drei anderen Punkte A, B und C projicieren. Auf zwei entsprechenden Strahlen, z. B. c und c′ werden von den Büscheln S bez. S′ die projektivischen Punktreihen A′B′C′ bez. A″B″C″ ausgeschnitten, welche aber perspektivisch liegen, weil sie den Punkt C entsprechend gemeinschaftlich haben. Der Mittelpunkt P des Büschels, welcher diese beiden Reihen projiciert, liegt im Schnittpunkt der beiden Geraden A′A″ und B′B″. Ist S′D ein beliebiger Strahl des Büschels S′ und schneidet derselbe c in D″, so projicieren wir D″ von P aus nach D′ auf c′, dann ist SD′ der S′D entsprechende Strahl und beide schneiden sich in einem neuen Punkte D des Kegelschnittes. Man sieht hieraus leicht, dass der Geraden SS′ als Strahl des Büschels S der Strahl PS′ des Büschels S′ entspricht. Folglich ist nach 1) PS′ die Tangente in S′. Ebenso wird gezeigt, dass PS die Tangente in S ist. Der Punkt P ist demnach als Durchschnitt der beiden Tangenten in S und S′ unabhängig

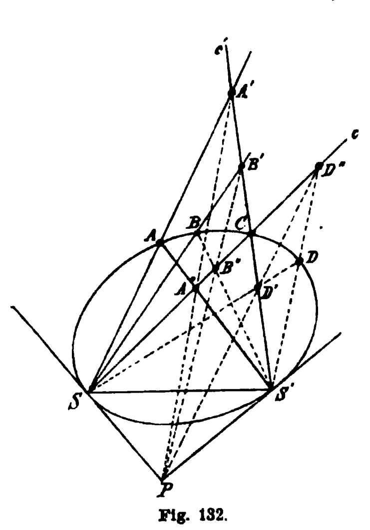


Fig. 132.

von der Lage der Punkte A, B, C . . . auf dem Kegelschnitt. Durch diesen Punkt gehen alle Geraden, welche den Schnittpunkt zweier beliebigen Strahlen der beiden Büschel (z. B. SB und S′C) mit dem Schnittpunkt der jenen entsprechenden Strahlen (S′B und SC) verbinden.

Das gefundene Resultat gestattet noch weitere wichtige Folgerungen. Ist SABS′ (Fig. 133) ein Viereck, welches einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, so liegen hiernach der Durchschnitt P der Diagonalen AS′ und BS, ferner der Durchschnitt Q der Seiten AS und BS′ und der Schnittpunkt R der Tangenten in S und S′ in einer Geraden g. Verlängert man noch AB und SS′, bis dieselben sich in O treffen, dann sind (nach II, 13) A, B, N, O und S, S′, M, O Gruppen von je vier harmonischen Punkten.

Ziehen wir ferner die Tangenten in A und B an den Kegelschnitt, so müssen diese ebenfalls in einem Punkte T der Geraden g zusammentreffen. Denn nehmen wir A und B als die Mittelpunkte zweier projektivischen Strahlenbüschel an, welche die Punkte des Kegelschnittes projicieren, so sind AS und und BS′ zwei willkürliche Strahlen mit dem Schnittpunkte Q, ferner sind BS bez. AS′ die jenen entsprechenden Strahlen, welche sich in P schneiden; P und Q liegen dann wie oben auf einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt T der Tangenten in A und B geht. Die vier Tangenten in A, B, S′ und S bilden ein dem Kegelschnitt umbeschriebenes Vierseit RVTW. Leicht findet man nun, dass auch die Punkte O, P, V, W auf einer Geraden g′ liegen, wenn man die Punkte A und S oder B und S′ als Mittelpunkte von projektivischen Strahlenbüscheln annimmt.

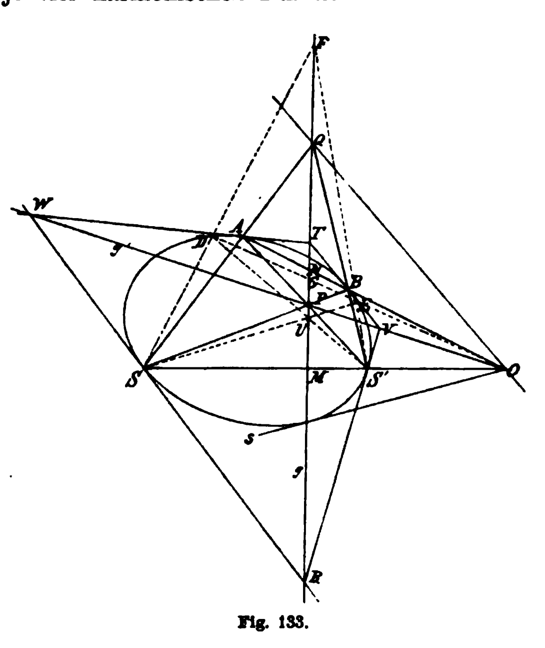
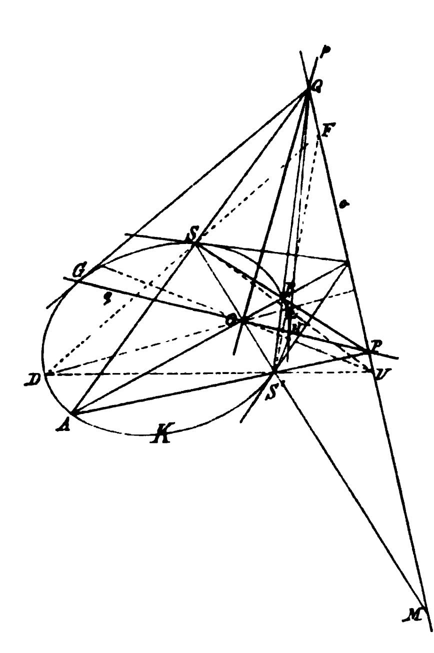


Fig. 133.

Ziehen wir jetzt von O aus eine andere Sekante, welche den Kegelschnitt in D und E schneidet, so müssen wiederum der Durchschnitt U der Geraden DS′ und ES, ferner der Schnittpunkt F von DS und ES′ und der Punkt R in einer Geraden liegen, welche SS′ in dem O konjugierten vierten harmonischen Punkte schneidet. Diese Gerade geht demnach wieder durch M und R, sie fällt also mit der vorhin gefundenen Geraden g zusammen

und DEGO bilden wieder eine Gruppe von vier harmonischen Punkten. Wir können hiernach folgenden wichtigen Satz aussprechen:

„Zieht man durch einen Punkt O beliebige Sekanten an einen Kegelschnitt und bestimmt auf jeder zu den beiden Schnittpunkten und O den vierten harmonischen (zu O konjugierten) Punkt, so ist der Ort aller dieser Punkte eine Gerade g, welche man die Polare des Punktes O nennt. O heisst der Pol der Geraden g.


Fig. 134.

Verbindet man den Punkt O mit einem der beiden Punkte, in welchem die Polare von O den Kegelschnitt trifft, durch eine Gerade s, so fallen ein Durchschnittspunkt des Strahles s mit der Kurve und der Punkt, in welchem s die Polare von C trifft, zusammen. Folglich muss auch der zweite Schnittpunkt des Strahles s (der vierte harmonische Punkt) und der Kurve mit diesem zusammenfallen, d. h. s ist eine Tangente der Kurve.

Aus den bisherigen Entwickelungen ergiebt sich nun leicht:

Ist ein vollständiges Viereck ABS′S (Fig. 134) einem Kegelschnitt einbeschrieben, so ist eine Nebenecke z. B. O der Pol der Verbindungslinie PQ der beiden andern Nebenecken. (Q ist ebenso der Pol von OP und P der Pol von OQ).

Der Punkt F liegt auf g und seine Polare ist OU, während die Polare von O, nämlich o durch F geht.

Bewegt sich F bis nach Q, so geht die Polare von OU in OP über, also:

Liegt F auf der Polare von O, so geht die Polare von F durch O; und bewegt sich F auf der Polare von O, so dreht sich die Polare von F um O. Die Polare eines Punktes, welcher auf dem Kegelschnitt liegt, ist die Tangente in demselben.

Das Dreieck OPQ, in welchem jede Seite die Polare des gegenüberliegenden Eckpunktes und jede Ecke der Pol der gegenüberliegenden Seite ist, heisst ein Polardreieck des Kegelschnittes. Dasselbe ist für weitere Untersuchungen der Eigenschaften der Kegelschnitte von grösster Wichtigkeit.

23) Zunächst lösen wir hiernach nur durch Ziehen gerader Linien die

Aufgabe: Von einem Punkte O aus Tangenten an einen Kegelschnitt zu ziehen, welcher gezeichnet gegeben ist (Fig. 135).

Aufl. Wir ziehen von O aus zwei Sekanten, welche den gegebenen Kegelschnitt in den vier Punkten A, B, C und D treffen. Durch den Schnittpunkt E von AB und CD sowie durch F, wo sich AC und BD schneiden, geht die Polare g des Punktes O. g trifft den Kegelschnitt in den Berührungspunkten M und N der gesuchten Tangenten OM und ON.

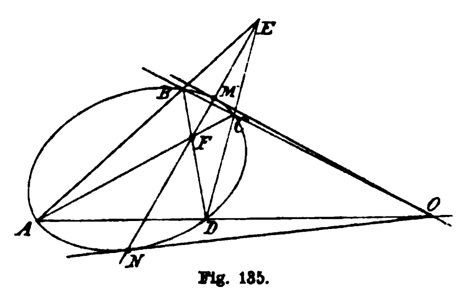


Fig. 135.

Die Lösung der Aufgabe durch einen gegebenen Punkt P des Kegelschnittes die Tangente zu legen, ist umständlicher, aber auch leicht zu finden. Man zieht durch P eine beliebige Sekante g und sucht den Pol Q derselben. Der letztere kann gefunden werden, wenn man die Polaren zweier beliebigen Punkte der Sekante g bestimmt. Ihr Durchschnitt ist der gesuchte Pol Q, wodurch nun die Tangente PQ bestimmt ist.

24) Ist OPQ (Fig. 134) ein Polardreieck des Kegelschnittes K; o, p, q die Seiten desselben, so sind die Verbindungslinien eines Eckpunktes z. B. Q mit den Punkten G und H, in welchen die gegenüberliegende Seite q den Kegelschnitt trifft, Tangenten des letzteren. Ferner sind GHOP nach 22) vier harmonische Punkte, folglich bilden die von einem Eckpunkte eines Polardreiecks an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten mit den in diesem Punkte zusammentreffenden Seiten des Dreiecks einen Büschel von vier harmonischen Strahlen.

25) Liegen eine Seite z. B. p (Fig. 136), folglich auch zwei Eckpunkte Q und R des Polardreiecks im Unendlichen, dann haben wir auf jeder der beiden anderen Seiten eine Gruppe von vier harmonischen Punkten, von denen der eine unendlich fern liegt, nämlich M, N, P und R∞, ferner J, L, P, Q∞; folglich ist P die Mitte von MN und von JL. Jede durch P gehende Gerade schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten, welche mit P und dem Schnittpunkte jener Geraden mit der dritten unendlich fernen Seite p des Polardreiecks eine Gruppe von vier harmonischen Punkten bilden; also wird jede durch P gehende Sehne des Kegelschnittes halbiert. P ist demnach der Mittelpunkt

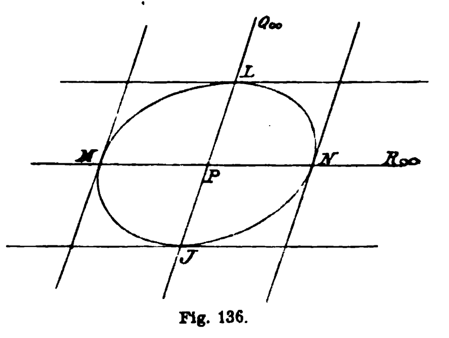


Fig. 136.

und jede durch denselben gehende Gerade ist ein Durchmesser des Kegelschnittes. Ziehen wir von Q∞ Tangenten an den Kegelschnitt, so berühren dieselben den letzteren in M und N und sie sind parallel zu JL. Alle Sehnen, welche verlängert durch Q∞ gehen, d. h. welche parallel zu JL sind, werden von MN halbiert. Ebenso sind die Tangenten in J und L parallel zu MN und alle zu MN parallelen Sehnen werden von JL halbiert. Hiernach sind MN und JL konjugierte Durchmesser des Kegelschnittes. (S. I. Teil, IV, 12.)

Die Hauptachsen sind ebenfalls zwei konjugierte Durchmesser, welche senkrecht zu einander stehen. Jeder Kegelschnitt wird von einer Hauptachse in zwei kongruente Teile geteilt, welche symmetrisch liegen.

Da die Parabel einseitig sich ins Unendliche erstreckt, so liegt auch ihr Mittelpunkt unendlich fern, folglich sind alle Durchmesser der Parabel unter sich parallel. Jeder Durchmesser halbiert alle Sehnen, welche mit der Tangente in seinem Endpunkte parallel sind. Die Achse der Parabel ist derjenige Durchmesser, welcher alle zu demselben senkrecht stehenden Sehnen halbiert.

26) Bei der Hyperbel trifft von zwei konjugierten Durchmessern MN und PQ (Fig. 137) nur der eine die Kurve in zwei Punkten M und N.

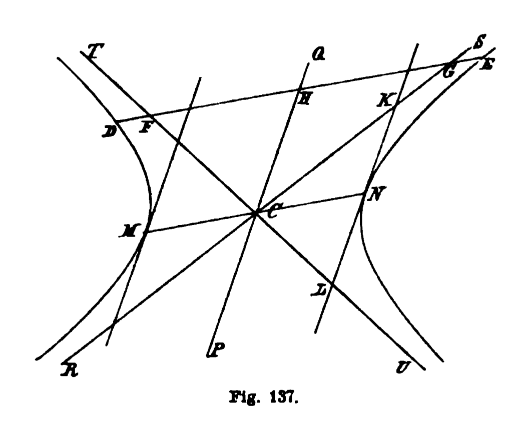


Fig. 137.

Die Tangenten in M und N sind dem konjugierten Durchmesser PQ parallel. Da die beiden Durchmesser Seiten eines unendlichen Polardreiecks und die Asymptoten die von einem Eckpunkt C desselben gezogenen Tangenten der Kurve sind, so bilden CT, CQ, CS und CN einen Büschel von vier harmonischen Strahlen. Auf einer zu MN parallelen Sehne DE werden deshalb von den drei Strahlen CT, CQ und CS die gleichen Strecken FH und GH abgeschnitten. Da nun H auch die Mitte von DE ist, so folgt noch: DF = GE (oder auch DG = FE). Auf jeder Sekante liegen demnach zwischen der Hyperbel und den beiden Asymptoten gleiche Abschnitte. Für eine Tangente z. B. KL folgt hieraus, dass der Berührungspunkt die Mitte zwischen ihren Schnittpunkten mit den Asymptoten ist.

Aufgaben.

27) Ein Kegelschnitt ist gezeichnet gegeben. Man soll den Durchmesser desselben bestimmen, welcher durch einen beliebigen Punkt P gezogen werden kann.

Anl. zur Aufl. Konstruiere nach 23) die von P aus möglichen Tangenten, dann geht der gesuchte Durchmesser durch die Mitte der Sehne, welche die Berührungspunkte der Tangenten verbindet.

28) Eine Parabel ist gezeichnet gegeben. Man soll die Achse derselben finden.

Anl. zur Aufl. Man ziehe zwei parallele Sehnen, dann geht durch die Mitten der letzteren ein Durchmesser. Die gesuchte Achse ist diesem Durchmesser parallel und sie halbiert jede zu dem vorhin gefundenen Durchmesser senkrechte Sehne der Parabel.

29) Die Hauptachsen eines gezeichnet gegebenen Kegelschnittes zu finden (Fig. 138 u. 139).

Anl. zur Auflösung. Wir zeichnen zwei parallele Sehnen, dann ist die Gerade, welche durch die Mittelpunkte derselben geht, ein Durchmesser des Kegelschnittes. Die Mitte dieses Durchmessers ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes. Beschreibt man um den Mittelpunkt einen Kreis, welcher den Kegelschnitt trifft, dann sind diejenigen Verbindungslinien der Schnittpunkte,

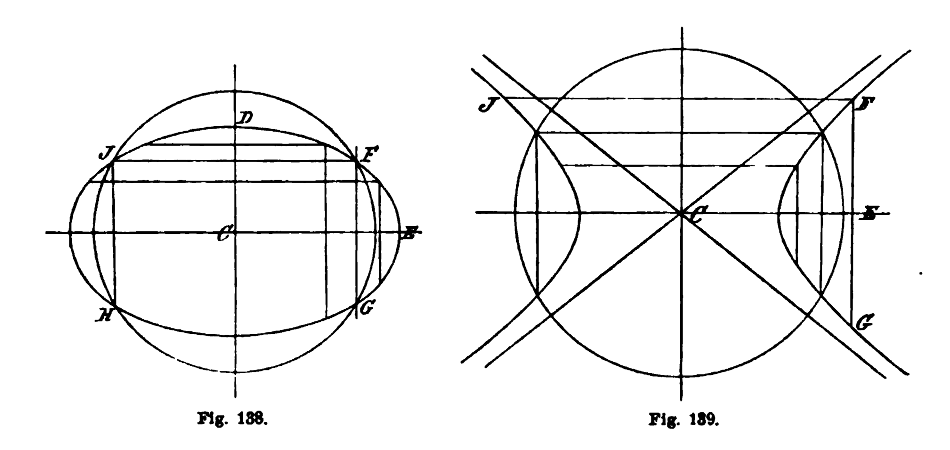


Fig. 138. Fig. 139.

welche nicht durch den Mittelpunkt gehen, den Achsen bez. parallel, wodurch dieselben bestimmt sind. Denn nach 25) halbiert eine Achse alle zu ihr senkrecht stehenden Sehnen (welche also parallel zur anderen Achse sind), folglich sind auch die Endpunkte einer solchen Sehne z. B. FG gleichweit vom Mittelpunkt entfernt. (S. auch I. Teil, IV, 3—36.) Diese Konstruktion gilt nur für die Kegelschnitte, welche einen Mittelpunkt haben, also für Ellipse und Hyperbel. Bei der Parabel erhält man einen Durchmesser als Gerade, welche durch die Mitten zweier parallelen Sehnen geht. Zieht man eine Sehne, welche zu diesem Durchmesser senkrecht steht, so geht die Achse der Parabel durch die Mitte derselben und sie ist parallel zu dem zuerst konstruierten Durchmesser.

30) Durch einen gegebenen Punkt innerhalb eines gezeichnet gegebenen Kegelschnittes eine Sehne zu ziehen, welche in P halbiert wird. (Für Ellipse Parabel und Hyperbel auszuführen.)

31) Sind M B und M C (Fig. 140) zwei Tangenten einer Parabel, B C die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte, N die Mitte von B C, dann wird die Strecke M N von dem Parabelbogen in A halbiert. Denn da BC die Polare von M ist, MN ein Durchmesser der Parabel, so sind M, N, A und der unendlich ferne Punkt des Durchmessers 4 harmonische Punkte; folglich ist AM = AN. Die Tangente QR, welche die Parabel in A berührt, ist parallel zu BC, folglich ist auch MR = BR, MQ = CQ, ferner $\triangle ABC = 2 \triangle MQR$.

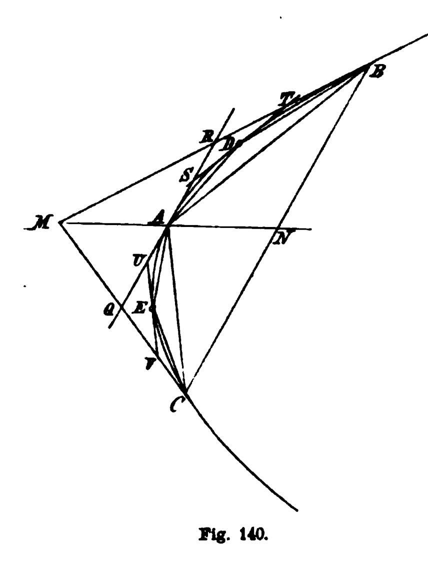


Fig. 140.

32) Das eben gefundene Resultat lässt sich verwerten zur Berechnung des Flächeninhalts eines Parabelabschnittes. Bezeichnen wir die Inhalte der Dreiecke ABC und MQR mit F_1 bez. f_1, so ist $F_1 = 2 f_1$. Ziehen wir die Tangenten S T und U V parallel zu A B bez. A C und sind D und E die Berührungspunkte dieser Tangenten, so folgt in gleicher Weise, wenn wir die Inhalte der Dreiecke ABD, ACE, RST und QUV mit F_2, F_3 bez. f_2, f_3 bezeichnen:

$$F_2 = 2 f_2 \quad \text{und} \quad F_3 = 2 f_3.$$

Fahren wir so fort, so finden wir leicht, dass die Summe aller dem Parabelabschnitt ABC eingezeichneten Dreiecke doppelt so gross ist als die Summe der Dreiecke, welche in dem von den Tangenten BM und CM und dem Parabelbogen BC eingeschlossenen Raume liegen. Dadurch, dass man in gleicher Weise immer mehr Dreiecke einschaltet, nährt sich die Summe $F_1 + F_2 + F_3 \ldots$ mehr und mehr der Fläche des Parabelabschnittes und wir schliessen hieraus, dass das Dreieck BCM durch den Parabelbogen in zwei Teile geteilt wird, von denen der eine, nämlich der Parabelabschnitt ABC doppelt so gross ist als der andere Teil. Hieraus ergiebt sich leicht für die Fläche F des Abschnittes die Formel:

$$F = \tfrac{2}{3} \triangle BCM = \tfrac{4}{3} \triangle ABC.$$

Der Flächeninhalt des von drei Tangenten einer Parabel eingeschlossenen Dreiecks ist die Hälfte desjenigen Dreiecks, dessen Ecken die Berührungspunkte jener Tangenten sind. (Leicht mit Hülfe des vorigen Satzes zu beweisen.)

Aufgabe. Vier Tangenten einer Parabel sind gegeben. Man soll beliebig viele andere Tangenten konstruieren.

Die Brennpunkte.

33) Auf der Geraden MN (Fig. 141 und 142) seien zwei feste Punkte I und II gegeben, so dass $MI = NII$ ist. Durch M und N gehen die zu MN senkrechten Geraden g' bez. g''. Diejenigen Kreise, welche durch die Punkte I und II gehen, schneiden auf g' und g'' involutorische Punktreihen

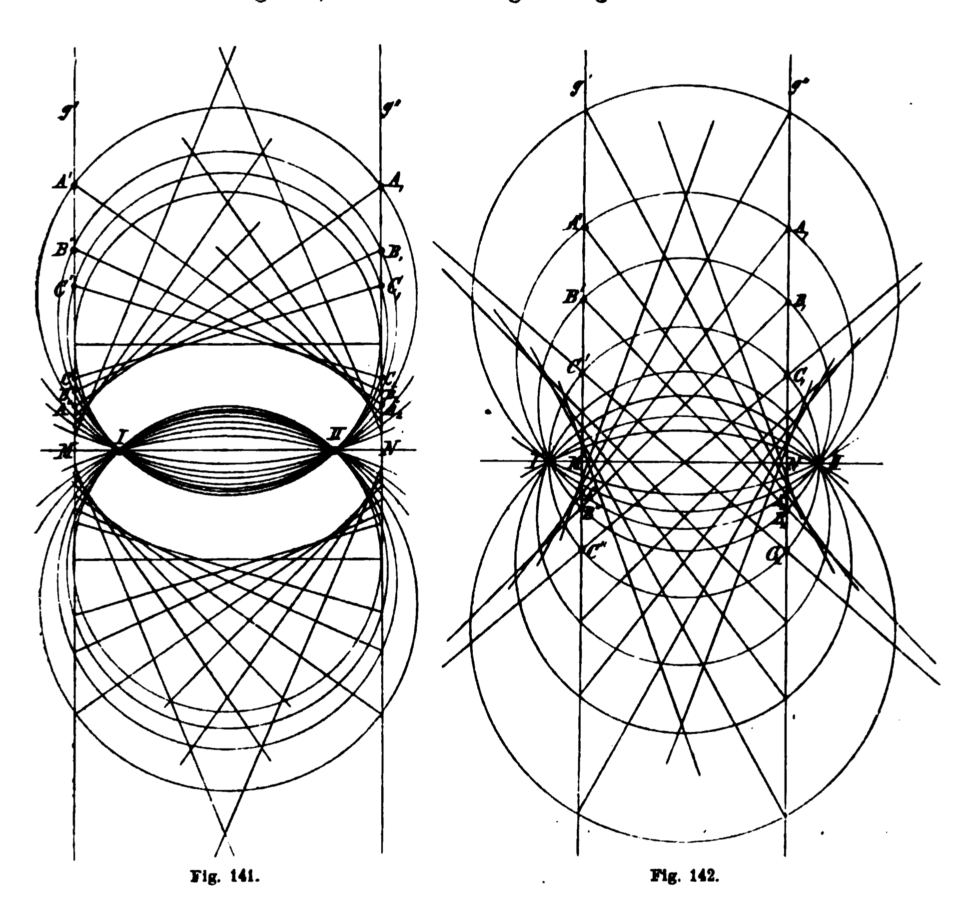


Fig. 141. Fig. 142.

aus, welche kongruent sind und die Mittelpunkte M bez. N haben. Da nun auf g' die Reihen $A'B'C' \ldots$ projektivisch zu $A''B''C'' \ldots$ und die letztere kongruent der Reihe A_2, B_2, $C_2 \ldots$ auf g'' ist, so folgt daraus, dass auch die Reihen $A'B'C' \ldots$ und $A_2B_2C_2 \ldots$ projektivisch sind. Dasselbe gilt für die Reihen $A_1B_1C_1 \ldots$ und $A''B''C'' \ldots$ Folglich hüllen die Geraden $A'A_2$, $B'B_2$, $C'C_2 \ldots$ einen Kegelschnitt ein und zwar eine Ellipse, wenn

die festen Punkte I und II innerhalb des von g' und g'' begrenzten Streifens liegen, eine Hyperbel, wenn diese Punkte ausserhalb liegen. Die Parabel erscheint als der besondere Fall, wenn eine der beiden Parallelen z. B. g'' und mit ihr der Punkt II unendlich weit entfernt sind. Die durch I und II gehenden, jetzt unendlich grossen Kreise erscheinen als Geraden, welche einen Strahlenbüschel mit I als Mittelpunkt bilden und die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte von g' und g'' stehen als Durchmesser der unendlich grossen Kreise bez. senkrecht zu diesen Geraden. Wir gelangen somit zu der schon in IV, 28 des I. Teils angegebenen Konstruktion der Parabel und erkennen daraus, dass I der Brennpunkt derselben ist.

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass die beiden Punkte I und II der Figuren 141 und 142 die Brennpunkte der Ellipse bez. der Hyperbel sind. Ist nämlich der Durchmesser $A'A_2$ (Fig. 143 und 144) eines durch I und II gehenden Kreises eine der Tangenten der Kurve und fällen wir von I (oder von II) eine Senkrechte IT zu $A'A_2$, so liegt der Fusspunkt T der

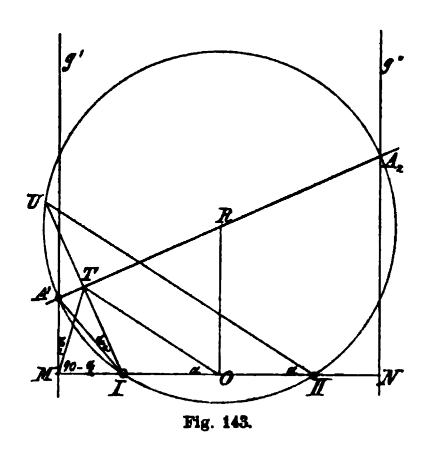


Fig. 143.

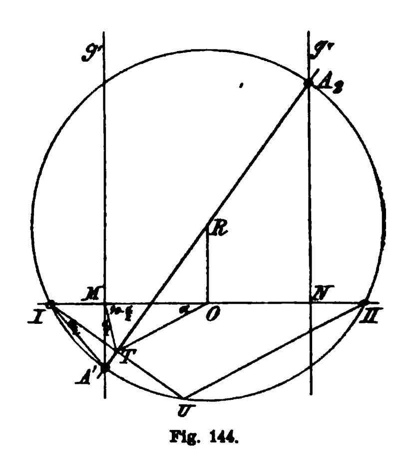


Fig. 144.

letzteren auf dem Umfang des um MN als Durchmesser beschriebenen Kreises. Zum Beweise verlängern wir IT, bis sie den Kreis in U abermals schneidet, dann ist $IT = UT$ und $\widehat{IA'} = \widehat{UA'}$. Ziehen wir ferner die Geraden MT, OT, UII, A'I, RO, dann ist, wenn man $\angle$ U II I mit α bezeichnet:

$$\angle A'IT = \frac{\alpha}{2}.$$

Da $UT = IT$ und $IO = OII$, so ist OT parallel zu UII, folglich ist auch $\angle TOM = \alpha$. Ferner ist A'TIM ein Kreisviereck; folglich $\angle A'MT = \angle A'IT = \frac{\alpha}{2}$, mithin $\angle TMO = 90 - \frac{\alpha}{2}$. Hiernach ist in dem Dreieck TOM der dritte Winkel, MTO ebenfalls gleich $90 - \frac{\alpha}{2}$, mithin ist

das Dreieck gleichschenklig MO = OT. Der Punkt T liegt demnach auf dem Umfang des um O mit dem Halbmesser OM gezeichneten Kreises. Der Beweis gilt für beide Figuren, also für Ellipse und Hyperbel. Hierdurch erhalten wir die schon im ersten Teil IV, 26 und IV, 36 hergeleiteten Eigenschaften dieser Kurven, woraus sich ergiebt, dass I und II die Brennpunkte derselben sind. U ist hiernach der Gegenpunkt der Tangente in Bezug auf den Brennpunkt I, und da UII = 2OT = 2MO = MN ist, so folgt noch, dass die Entfernung des Gegenpunktes U vom nicht zugehörigen Brennpunkt II gleich der Hauptachse MN ist. Hieraus ergiebt sich dann auch leicht, dass die Summe bez. Differenz der Entfernungen eines Punktes des Kegelschnittes von den beiden Brennpunkten gleich MN ist.

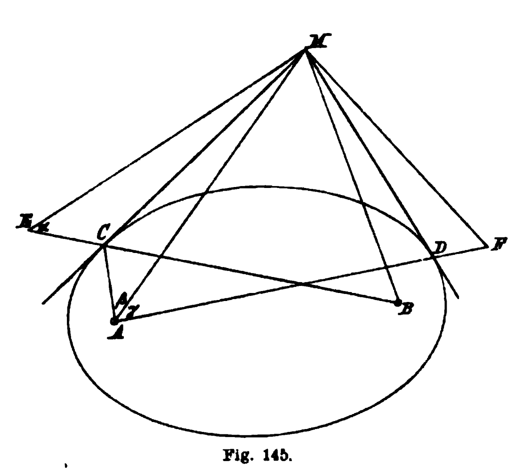


Fig. 145.

34) Wir fügen den im I. Teil schon entwickelten Eigenschaften der Kegelschnitte, bei welchen hauptsächlich die Brennpunkte in Betracht kamen, noch einige von Wichtigkeit hinzu.

Die Gerade, welche den Schnittpunkt M zweier Tangenten eines Kegelschnittes mit einem Brennpunkte A verbindet, halbiert den Winkel der beiden von A nach den Berührungspunkten C und D gehenden Geraden (Fig. 145 und 146).

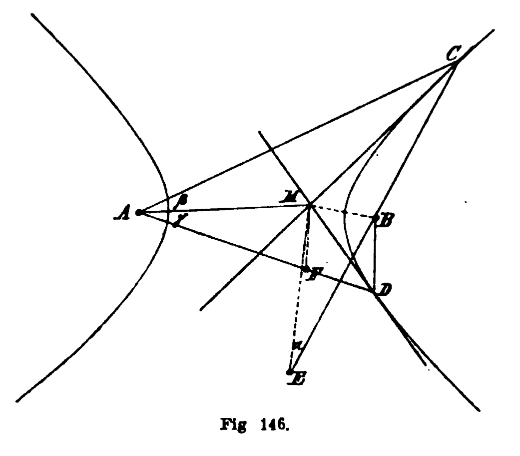


Fig 146.

Es seien E und F die zu A bez. B gehörigen Gegenpunkte der beiden Tangenten CM und DM. Wir ziehen die Geraden AM, EM, BM, FM, ferner BE und AF (letztere gehen durch C und D, s. IV, 25, I. Teil), dann ist: $\triangle ACM \cong \triangle CEM$ (AM = EM, AC = CE, und die Tangente CM halbiert den Winkel ACE), folglich ist AM = EM und $\angle\alpha = \angle\beta$. Ebenso wird gezeigt, dass BM = MF ist. Hieraus folgt nun leicht:

$\triangle AFM \cong \triangle BEM$, ($EM = AM$, $BM = FM$, $BE = AF = 2\alpha$ (s. I. Teil, IV, 25), folglich ist $\angle \alpha = \angle \gamma$, mithin ist auch $\angle \beta = \angle \gamma$.

Für die Parabel lässt sich derselbe Satz folgendermassen beweisen.

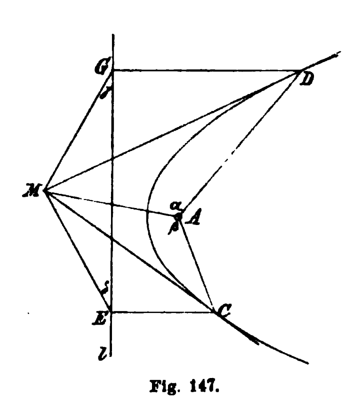


Fig. 147.

Sind C und D (Fig. 147) die Berührungspunkte der Tangenten CM und DM; E und G die auf der Leitlinie l liegenden Gegenpunkte derselben (s. IV, 28, I. Teil), so ist $\triangle ADM \cong \triangle DGM$ ($DG = AD$, $DM = DM$, $\angle GDM = \angle ADM$); ebenso ist $\triangle ACM \cong \triangle CEM$, folglich $\angle DGM = \angle DAM = \alpha$, $\angle CEM = \angle CAM = \beta$. Da nun $AM = GM$ und $AM = EM$, so ist auch $EM = GM$, folglich $\angle \gamma = \angle \delta$. Addiert man zu jedem der beiden letzten Winkel einen rechten Winkel, so folgt: $\angle DGM = \angle CEM$; folglich ist auch $\alpha = \beta$.

35) Sind t_1 und t_2 zwei feste Tangenten, t_3 eine bewegliche Tangente eines Kegelschnittes (Fig. 148), so erscheint das von t_1 und t_2 begrenzte Stück FG der beweglichen Tangente von einem der Brennpunkte aus unter konstantem Winkel.

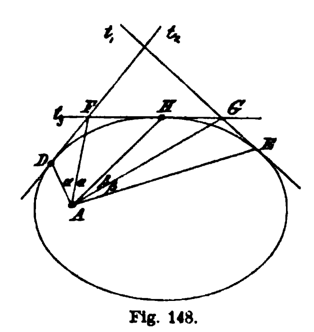


Fig. 148.

Sind D, E und H die Berührungspunkte der drei Tangenten und ziehen wir die Geraden AD, AF, AH, AG und AE, so ist nach 34) $\angle DAF = \angle FAH = \alpha$; $\angle HAG = \angle GAE = \beta$. Man sieht hieraus leicht, dass $\angle FAG = \frac{1}{2} \angle DAE$ ist.

Anmerkung. Dreht sich also ein Winkel FAG von konstanter Grösse um seinen Scheitel, so schneiden seine Schenkel auf zwei anderen festen Geraden projektivische Punktreihen aus.

Man beweise hiernach folgende Sätze:

36) Verbindet man die Eckpunkte eines einer Ellipse umbeschriebenen Tangentenvierecks DEFG mit einem Brennpunkt z. B. A, so ist die Summe derjenigen Winkel am Brennpunkt, welche auf zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks stehen, gleich 2R; also $\angle DAE + \angle FAG = 2R$, ebenso $\angle EAF + \angle DAG = 2R$.

37) Jede Tangente, welche von den beiden in den Endpunkten der grossen Achse einer Ellipse gezogenen Tangenten oder den Scheiteltangenten einer Hyperbel begrenzt wird, erscheint von einem Brennpunkte aus unter einem rechten Winkel.

38) Eine bewegliche Tangente einer Ellipse, welche von zwei in einem

Punkte der kleinen Achse zusammentreffenden Tangenten begrenzt wird, erscheint von beiden Brennpunkten aus unter gleichen Winkeln.

39) Für die Parabel ergiebt sich noch der folgende Satz. Beschreibt man um ein Dreieck, welches von drei Tangenten gebildet wird, einen Kreis, so geht derselbe durch den Brennpunkt F der Parabel. Ist nämlich ABC (Fig. 149) das Tangentendreieck, so erscheint BC unter dem Winkel BFC von F aus. Ziehen wir die Scheiteltangente DE, so ist auch $\angle DFE = \angle BFC$. Nach IV, 28 d. I. Teils steht $DF \perp AB$, $EF \perp AC$, folglich ist $\angle DFE + \angle CAD = 2R$, daraus ergiebt sich $\angle BFC + \angle CAD = 2R$. Demnach lässt sich durch die vier Punkte A, B, C, F ein Kreis legen.

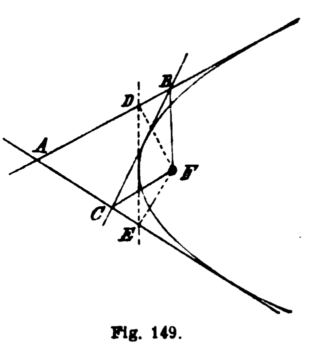


Fig. 149.

Leitlinien der Kegelschnitte.

40) Die Polare l eines Brennpunktes A (Fig. 150, 151 und 152) wird eine Leitlinie des Kegelschnittes genannt. Ellipse und Hyperbel haben hiernach zwei Leitlinien, l und l′, welche gleichweit vom Mittelpunkt entfernt sind.

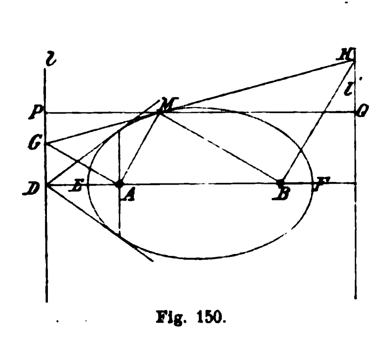


Fig. 150.

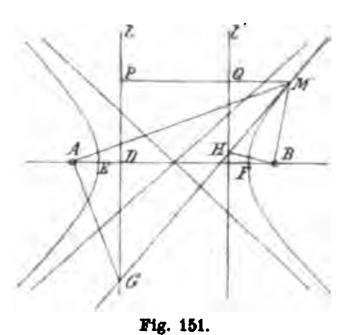


Fig. 151.

Die Parabel hat nur eine Leitlinie, die andere liegt unendlich fern. Jede Leitlinie eines Kegelschnittes steht senkrecht zu derjenigen Hauptachse, auf welcher die Brennpunkte liegen. Ist D der Schnittpunkt der zu A gehörigen Leitlinie mit der Hauptachse EF, so sind DAEF vier harmonische Punkte. Wir haben demnach die Proportion:

$$DE : AE = DF : AF.$$



Fig. 152.

Bezeichnen wir EF mit 2a, AB mit 2e und die Entfernung der Leitlinie l vom Brennpunkte A mit z, so heisst diese Proportion auch:

für die Ellipse: $z + e - a : a - e = z + e + a : a + e$,
für die Hyperbel: $z + a - e : e - a = e + a - z : e + a$;

hieraus folgt für die Ellipse $z = \frac{a^2 - e^2}{e}$,

und für die Hyperbel $z = \frac{e^2 - a^2}{e}$.

Der Abstand einer Leitlinie vom Mittelpunkt ist bei der Ellipse $z + e$ und bei der Hyperbel $e - z$. Setzt man hier die soeben gefundenen Werte für z ein, so erhält man für beide die Formel $\frac{a^2}{e}$. Demnach ist der Abstand der beiden Leitlinien voneinander $= \frac{2a^2}{e}$.

Da bei der Parabel der eine der vier harmonischen Punkte DAEF, nämlich F unendlich weit entfernt ist, so liegt E in der Mitte zwischen D und A, was ja auch schon aus Abschn. IV des I. Teiles bekannt ist.

Wir ziehen durch irgend einen Punkt M des Kegelschnittes (Fig. 150 und 151) die Tangente GH und die zur Hauptachse Parallele PQ, dann ist: $\triangle PGM \sim \triangle MQH$. Ferner ist auch $\triangle AGM \sim \triangle BMH$, denn $\angle AMG = \angle BMH$ ($\angle AMG = \angle HMB$, s. IV, 25, I. Teil; $\angle GAM = \angle HBM = R$); folglich verhält sich $AM : BM = GM : MH = PM : QM$, d. h. die Abstände eines beliebigen Punktes M eines Kegelschnittes von den beiden Brennpunkten verhalten sich wie die Abstände desselben von den zugehörigen Leitlinien.

Aus der gefundenen Proportion bilden wir die folgende:

$$AM : AM + BM = PM : PM + QM,$$

oder $AM : 2a = PM : \frac{2a^2}{e}$,

folglich auch: $AM : PM = 2a : \frac{2a^2}{e}$,

oder $AM : PM = e : a$.

Das Verhältnis der Abstände eines Punktes des Kegelschnittes von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leitlinie ist hiernach konstant und zwar $= \frac{e}{a}$. Für die Ellipse ist $\frac{e}{a} < 1$, für die Hyperbel > 1.

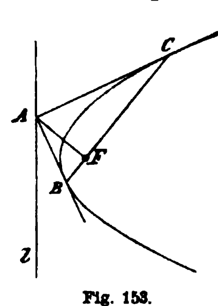


Fig. 153.

Bei der Parabel ist dieses konstante Verhältnis $= 1$, was schon in Aschn. IV des I. Teiles zur Definition der Parabel benutzt wurde.

41) Ziehen wir von einem beliebigen Punkte A (Fig. 153) einer Leitlinie l Tangenten an den zugehörigen Kegelschnitt, so geht die Verbindungslinie der

beiden Berührungspunkte B und C als Polare des Punktes A durch den Pol jener Leitlinie, d. h. durch den zugehörigen Brennpunkt F. Da nach 34) AF den Winkel zwischen BF und CF halbieren muss, so steht $AF \perp BC$.

Vermischte Aufgaben über die Kegelschnitte.

42) Zwei Tangenten einer Parabel und der Brennpunkt derselben sind gegeben; Achse, Scheitel und Leitlinie sollen bestimmt werden. (Siehe Abschnitt IV, 28, I. Teil.)

43) Zwei Tangenten und die Scheiteltangente einer Parabel sind gegeben. Achse, Brennpunkt und Leitlinie zu bestimmen.

44) Zwei Tangenten einer Parabel und deren Berührungspunkte sind gegeben. Man soll Achse, Brennpunkt und Leitlinie finden.

45) Zwei Tangenten einer Parabel und die Achse derselben sind gegeben. Man soll den Scheitel und den Brennpunkt bestimmen. (Siehe IV, 29, I. Teil.)

46) Drei Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel und ein Brennpunkt sind gegeben. Man soll den andern Brennpunkt und die grosse Achse finden. Gegeben die grosse Achse einer Ellipse (oder die Hauptachse einer Hyperbel) und eine Tangente derselben. Man soll die Brennpunkte bestimmen.

47) Gegeben die kleine Achse einer Ellipse und eine Tangente. Man soll die grosse Achse und die Brennpunkte bestimmen.

48) Gegeben ein Brennpunkt, die zugehörige Leitlinie und ein Punkt einer Ellipse (oder Hyperbel). Man soll den andern Brennpunkt und die Achsen bestimmen.

49) Den Ort des Mittelpunktes M eines Kreises zu zeichnen, welche zwei gegebene Kreise K_1 und K_2 berührt. Man untersuche alle möglichen Fälle, wenn K_1 und K_2 auseinander liegen, sich schneiden, ineinander liegen, sich berühren u. s. w. und zeige, dass der Ort stets ein Kegelschnitt ist. Es ist anzugeben, wann dieser Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel, Hyperbel ist oder in eine Gerade übergeht.

50) Ebenso soll gezeigt werden, dass der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher einen gegebenen Kreis berührt und zugleich durch einen gegebenen Punkt geht, ein Kegelschnitt ist.

51) Zwei Winkel α und β drehen sich um ihre Scheitel A und B. Es soll nachgewiesen werden, dass der Schnittpunkt des einen Paares der Schenkel einen durch A und B gehenden Kegelschnitt beschreibt, wenn der Schnittpunkt des andern Paares eine Gerade durchläuft.

52) Die Seiten eines Dreiecks gehen durch drei feste Punkte P_1, P_2 und P_3. Zwei Eckpunkte des Dreiecks bewegen sich auf gegebenen Geraden G_1 und G_2. Man soll beweisen, dass der dritte Eckpunkt des ver-

änderlichen Dreiecks einen Kegelschnitt durchläuft, welcher durch P_1, P_2 und P_3 geht.

53) Es soll bewiesen werden, dass eine Ellipse und eine Hyperbel, welche die Brennpunkte gemeinschaftlich haben (konfokale Kegelschnitte), sich rechtwinklig durchschneiden.

54) Ein Kegelschnitt K und ein Punkt M in der Ebene desselben sind gegeben. Man soll ein Kollineationscentrum so bestimmen, dass die dem Kegelschnitt entsprechende kollineare Figur ein Kreis und der M entsprechende Punkt dessen Mittelpunkt wird (Fig. 154).

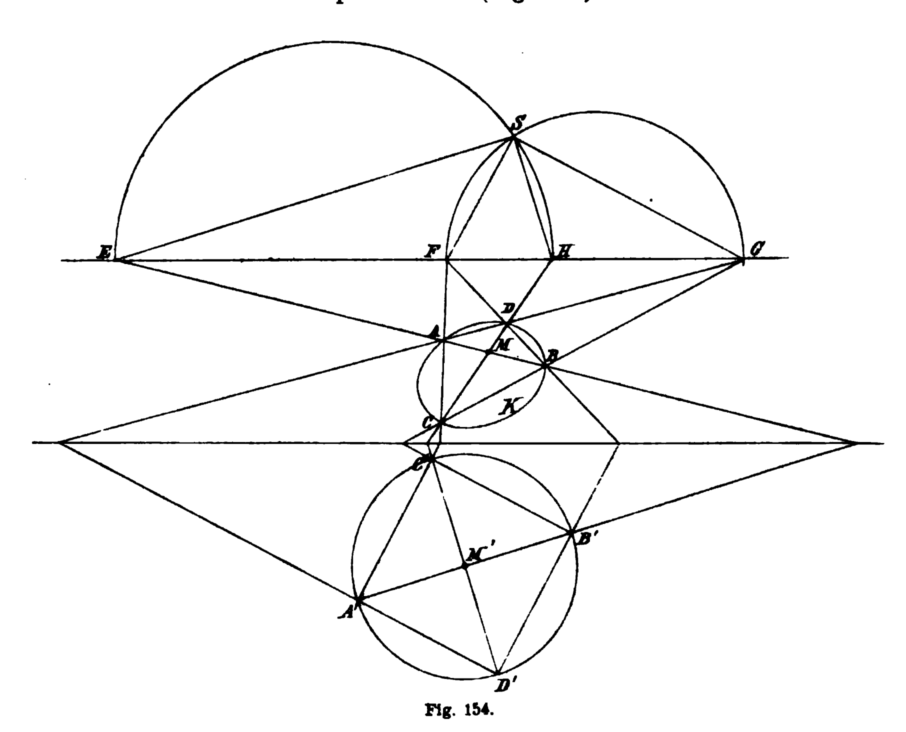


Fig. 154.

Aufl. Man ziehe durch M die beiden Sehnen AB und CD und zeichne das Viereck ABCD. Die beiden Paare gegenüberliegender Seiten des letzteren schneiden sich in F und G; dann ist FG die Polare des Punktes M. Wir nehmen diese als Fluchtlinie und verlängern die Diagonalen AB und CD, bis sie dieselbe in E bez. H schneiden. Über den beiden Abschnitten EH und FG zeichnen wir Halbkreise, deren Durchschnitt S das gesuchte Kollineationscentrum ist. In Fig. 154 ist die kollineare Figur, die ja nach I, 14 leicht konstruiert werden kann, hinzugefügt.

55) Aus 4 Tangenten einer Parabel die Achse, Brennpunkt und den Scheitel zu finden. Leicht nach 39) und (IV, 28, I. Teil) zu konstruieren.

56) Zwei Punkte einer Parabel und der Brennpunkt derselben sind gegeben. Man soll die Leitlinie und die Achse bestimmen.

57) Die beiden Asymptoten einer Hyperbel und ein Punkt der letzteren sind gegeben. Man soll andere Punkte der Hyperbel, die Achse und die Brennpunkte bestimmen.

58) Zwei Punkte einer Hyperbel, eine Asymptote und die Richtung der Hauptachse (d. h. eine Gerade, welche der letzteren parallel ist) sind gegeben. Man soll andere Punkte der Hyperbel, Achse und Brennpunkte derselben bestimmen.

59) Die beiden Asymptoten einer Hyperbel und eine Tangente sind gegeben. Man soll die Hauptachse und die Brennpunkte bestimmen.

60) Legt man durch einen Punkt M einer Ellipse (oder Hyperbel) und durch die beiden Brennpunkte einen Kreis, so gehen Tangente und Normale durch die Schnittpunkte des letzteren mit der kleinen Achse.

Man löse hiernach die Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt der kleinen Achse einer Ellipse eine Normale an dieselbe zu ziehen.

61) Sind A und B die beiden Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel und zieht man durch einen derselben z. B. B eine Sehne MN, ferner durch die Endpunkte M und N die Tangenten und Normalen, dann liegen der Schnittpunkt P der beiden Tangenten, der Schnittpunkt Q der beiden Normalen und der andere Brennpunkt A auf einer Geraden.

Es ist nämlich (bei der Ellipse) Q als Durchschnitt zweier Winkelhalbierenden des Dreiecks AMN der Mittelpunkt des dem letzteren einbeschriebenen Kreises und P als Durchschnitt der Halbierenden zweier Aussenwinkel desselben Dreiecks der Mittelpunkt eines anbeschriebenen Kreises. Folglich liegen P und Q beide auf der Halbierungslinie des Winkels MAN.

IV. Abschnitt.

Doppelelemente.

1) Liegen zwei projektivische Punktreihen auf einer Geraden, so können dieselben nach 4) Doppelpunkte enthalten. In jedem derselben fallen zwei entsprechende Punkte der Reihen zusammen. Zur Bestimmung der Doppelpunkte zweier auf einer Geraden vereinigt liegenden projektivischen Punktreihen gelangen wir durch folgende Betrachtung.

Eine Gerade g schneidet einen Kegelschnitt k (Fig. 155) im Allgemeinen in 2 Punkten. Nimmt man auf k zwei beliebige Punkte S und S′ als Mittelpunkte zweier projektivischen Strahlenbüschel an, welche die übrigen

Punkte ABC ... des Kegelschnittes projicieren, so wird g von diesen Büscheln in zwei projektivischen Punktreihen A′B′C′ ... und A″B″C″ ... geschnitten. In den beiden Punkten P und Q, in welchen g von dem Kegelschnitt k getroffen wird, schneiden sich aber je zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel S und S′, daher fallen in jedem dieser Punkte zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen zusammen. Dies sind also die gesuchten Doppelpunkte.

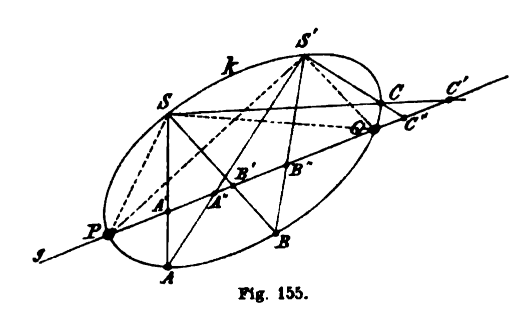


Fig. 155.

Projiciert man zwei auf einer Geraden vereinigt liegende projektivische Punktreihen aus einem beliebigen Mittelpunkte, so entstehen zwei projektivische Strahlenbüschel mit gemeinschaftlichem Mittelpunkte. In demjenigen Strahl, welcher durch einen Doppelpunkt der Punktreihen geht, fallen demnach zwei entsprechende Strahlen zusammen, man erhält also einen Doppelstrahl.

Werden endlich jene beiden Punktreihen von einer Achse aus durch einen Ebenenbüschel projiciert, so fällt jede durch einen Doppelpunkt gehende Ebene mit ihrer entsprechenden zusammen. Wir erhalten also auch in zwei projektivischen Ebenenbüscheln, welche eine gemeinsame Ache haben, Doppelebenen.

Die Aufsuchung der Doppelelemente zweier vereinigt gelegenen projektivischen Gebilde wird nun unsere nächste Aufgabe sein. Man übersieht leicht, dass es genügt, die Doppelpunkte zweier auf derselben Geraden liegenden projektivischen Punktreihen zu bestimmen, weil die Ermittelung der Doppelelemente anderer Gebilde hierauf zurückgeführt werden kann.

2) Um die Doppelpunkte der auf der Geraden g liegenden projektivischen Punktreihen ABC ..., A′B′C′ ... (Fig. 156), welche durch drei Paare entsprechender Punkte gegeben sind, zu bestimmen, benutzen wir irgend einen Kegelschnitt, am einfachsten also einen beliebigen Kreis k. Auf dem letzteren nehmen wir einen Punkt S als gemeinsamen Mittelpunkt zweier projektivischen Strahlenbüschel an, welche die gegebenen Punktreihen projicieren. Die Strahlen des einen Büschels S (ABC) treffen den Kreis in α, β, γ und die des anderen Büschels S (A′B′C′) in $\alpha'\beta'\gamma'$. Projicieren wir nun die Punkte $\alpha\beta\gamma$ aus α' und die Punkte $\alpha'\beta'\gamma'$ aus α als Mittelpunkt, so sind diese beiden neuen Büschel unter sich projektivisch, denn:

$\alpha(\alpha'\beta'\gamma')$ ist projektivisch S $(\alpha'\beta'\gamma')$ oder S (A′B′C′)
$\alpha'(\alpha\beta\gamma)$ „ „ S $(\alpha\beta\gamma)$ „ S (ABC).

Nach Voraussetzung sind aber die Büschel S (A′B′C′) und S (ABC)

projektivisch, folglich gilt dasselbe für die beiden Büschel $\alpha\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$ und $\alpha'\,(\alpha\,\beta\,\gamma)$. Die beiden letzteren Büschel haben aber den Strahl $\alpha\,\alpha'$ entsprechend gemeinschaftlich, folglich sind sie in perspektivischer Lage, d. h. die Schnittpunkte entsprechender Strahlen der Büschel liegen auf einer Ge-

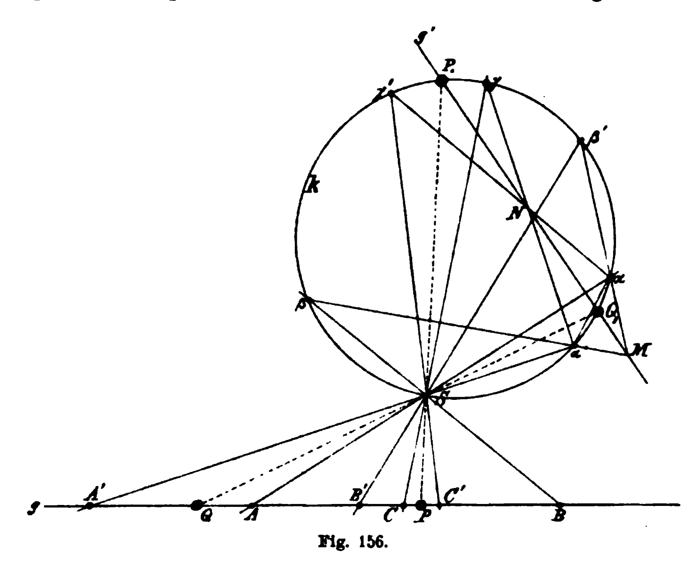


Fig. 156.

raden g'. Nun treffen sich $\alpha\beta'$ und $a'\beta$ in M, ferner $\alpha\gamma'$ und $\alpha'\gamma$ in N; durch diese beiden Punkte ist g' bestimmt. Die Gerade g' schneidet den Kreis k in den beiden Punkten P_1 und Q_1. Ziehen wir nun den Strahl SP_1 als Strahl des Büschels S (A B C), so entspricht derselbe dem Strahle αP_1 des Büschels $\alpha\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$. Ebenso entspricht SP_1 als Strahl des Büschels

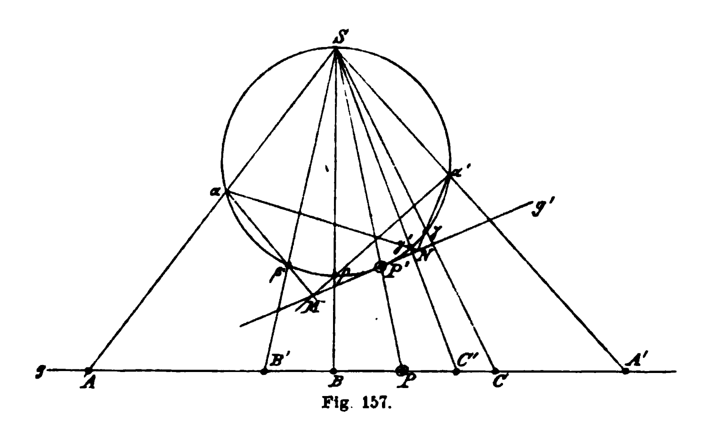


Fig. 157.

S (A′B′C′) dem Strahle $\alpha' P_1$ des Büschels $\alpha'\,(\alpha\beta\gamma)$. Folglich fallen in SP_1 zwei entsprechende Strahlen der Büschel S (ABC) und S (A′B′C′) zusammen.

SP_1 ist demnach ein Doppelstrahl und sein Schnittpunkt P mit der Geraden g ein Doppelpunkt der gegebenen Punktreihen. Der zweite Doppelpunkt Q ergiebt sich als Durchschnitt des Strahles SQ_1 mit g.

Wenn die Gerade g′ den Hülfskreis k in zwei Punkten schneidet, dann haben die beiden auf g vereinigten Punktreihen zwei Doppelpunkte (wie in Fig. 156). Berührt g′ den Kreis k, dann erhalten wir nur einen Doppelpunkt P (s. Fig. 157). Die beiden Punktreihen haben keinen Doppelpunkt, wenn g′ den Kreis k nicht trifft (Fig. 158). Ebenso haben zwei projek-

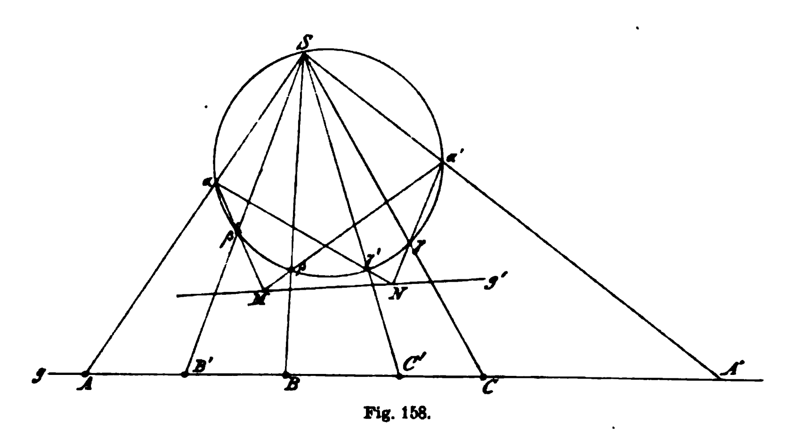


Fig. 158.

tivische Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte zusammenfallen, zwei Doppelstrahlen, einen Doppelstrahl oder gar keinen, wenn eine dem Strahlenbüschel perspektivisch liegende Punktreihe bezw. zwei, einen oder keinen Doppelpunkt besitzt.

3) Die Doppelpunkte zweier auf derselben Geraden g liegenden projektivischen Punktreihen lassen sich auch auf folgende Weise bestimmen (Fig. 159).

Man zeichne einen Kreis k, welcher die Gerade g berührt und ziehe von den gegebenen Punkten ABC, A′B′C′ die Tangenten a, b, c, a′b′c′ an k.

Die Tangenten a und a′ werden von a′b′c′ bez. abc in den Punkten A″B″C″ bez. A‴B‴C‴ geschnitten.

Dann ist A″B″C″ . . projektivisch zu ABC . .
A‴B‴C‴ „ „ A′B′C′.

Da nun nach Voraussetzung ABC . . projektivisch zu A′B′C′, so ist auch:
A″B″C″ „ „ A‴B‴C‴.

Die beiden letzten Reihen haben aber den Punkt A″ entsprechend gemeinschaftlich, folglich liegen sie perspektivisch. Das Projektionscentrum, welches beide Reihen projiciert, ist der Punkt S, in welchem die Geraden B″B‴ und C″C‴ sich treffen. Ziehen wir nun von S aus die beiden Tangenten t und t′ an k, so schneiden dieselben g in den gesuchten Doppel-

punkten P und P'. Denn P entspricht sowohl dem Punkte P'' als auch dem Punkte P''', welche den auf a bez. a' liegenden Punktreihen angehören. Diese waren aber zu jeder der beiden gegebenen Punktreihen auf g projektivisch. Folglich entspricht P als Punkt der Reihe ABC betrachtet dem Punkte P, d. h. sich selbst, wenn man ihn als Punkt der Reihe A'B'C' ansieht, und dasselbe ist mit Q der Fall.

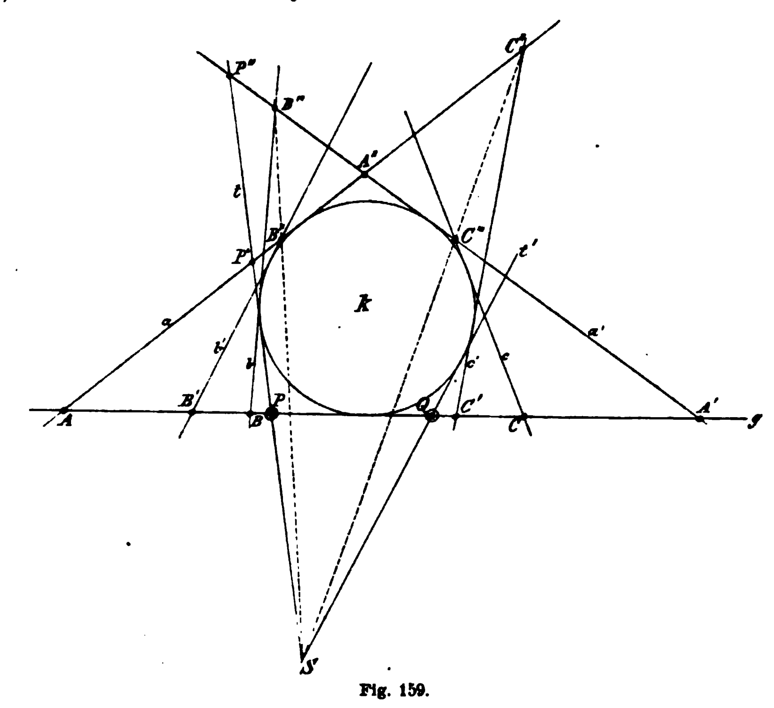


Fig. 159.

Wir wollen den vorstehenden Satz zunächst auf die Lösung von Aufgaben zweiten Grades anwenden, welche deshalb so genannt werden, weil sie bei algebraischer Lösung auf Gleichungen zweiten Grades führen. Jede derartige Gleichung liefert entweder zwei reelle und verschiedene Wurzeln, oder zwei gleiche und reelle Wurzeln oder zwei imaginäre Wurzeln und hierdurch ist die Zahl der Lösungen der Aufgabe bestimmt. Im ersten Falle haben wir zwei verschiedene Lösungen, im zweiten Falle nur eine, und im dritten Falle keine (geometrisch darstellbare) Lösung.

Die zu befolgende Methode werden wir an den Beispielen entwickeln.

4) Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten a, b, c bez. durch drei gegebene Punkte A_1, A_2, A_3 gehen und dessen Ecken bez. auf drei gegebenen Geraden α, β, γ liegen (Fig. 160).

Aufl. Wir ziehen durch A_1 die Gerade b' beliebig; dieselbe schneidet

α in B und β in B''. Von B'' ziehen wir durch A_2 die Gerade b'', welche γ in B''' trifft. Endlich ziehen wir von B''' aus die Gerade b''' durch A_3, welche die erste Gerade α in dem Punkte B' schneidet. Die Aufgabe würde gelöst sein, wenn B' mit B zusammengefallen wäre. Ziehen wir in gleicher Weise mehrere Geraden durch die Punkte A_1, B_1 und C_1, so erhalten wir drei projektivische Strahlenbüschel mit diesen Punkten als Mittelpunkten. Je zwei dieser Büschel haben perspektivische Lage, folglich schneiden die Büschel, deren Mittelpunkte A_1 und A_3 sind, auf der Geraden α zwei projektivische Punktreihen BCD.., B'C'D.. aus. Wir bemerken nun leicht,

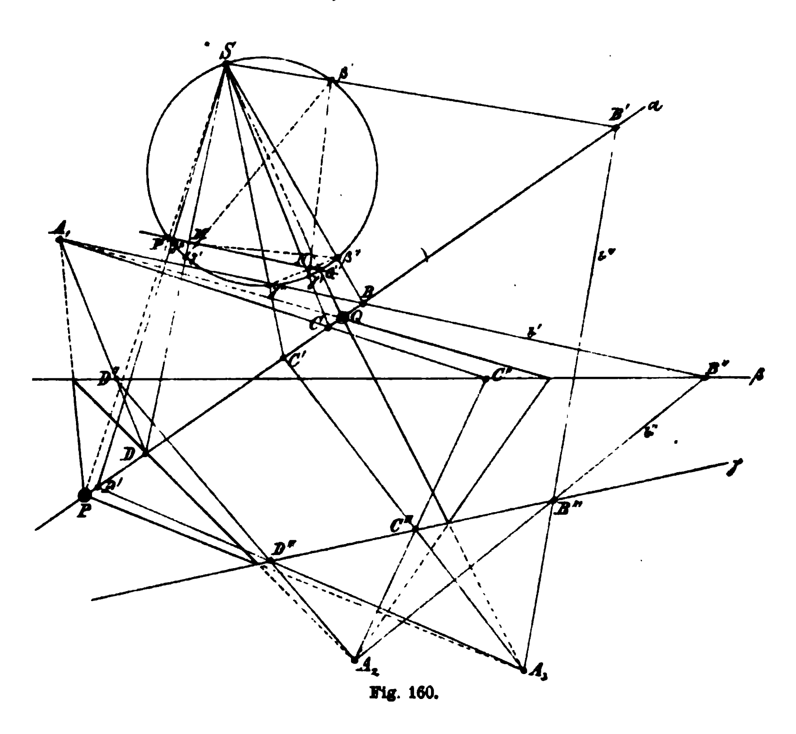


Fig. 160.

dass jeder Doppelpunkt dieser beiden Reihen ein erster Eckpunkt des gesuchten Dreiecks sein muss. Es sind deshalb im Allgemeinen zwei Dreiecke möglich.

Man löse hiernach die Aufgabe: Ein Vieleck zu konstruieren, dessen Seiten durch gegebene feste Punkte gehen und dessen Ecken auf gegebenen Geraden liegen.

5) Die Durchschnittspunkte einer Geraden g mit einem durch fünf Punkte ABCSS' gegebenen Kegelschnitt zu bestimmen.

Aufl. Nehmen wir zwei der gegebenen Punkte z. B. S und S' als Mittelpunkte von projektivischen Strahlenbüscheln an, welche die übrigen

Punkte des Kegelschnittes projicieren, so schneiden die Strahlen der Büschel auf g drei Paare entsprechender Punkte $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ zweier projektivischen Punktreihen aus. In den Doppelpunkten P und Q dieser Reihen treffen sich zwei Paare entsprechender Strahlen, folglich sind P und Q die gesuchten Schnittpunkte.

6) In ähnlicher Weise lösen wir die der vorigen dualistische Aufgabe: Die beiden Tangenten von einem Punkte S an einem durch fünf Tangenten a, b, c, d, e gegebenen Kegelschnitt zu bestimmen (Fig. 161).

Aufl. Auf zwei der gegebenen Tangenten, z. B. a und e werden von den übrigen Tangenten des Kegelschnittes projektivische Punktreihen ausgeschnitten. Von den letzteren sind drei Paare entsprechender Punkte,

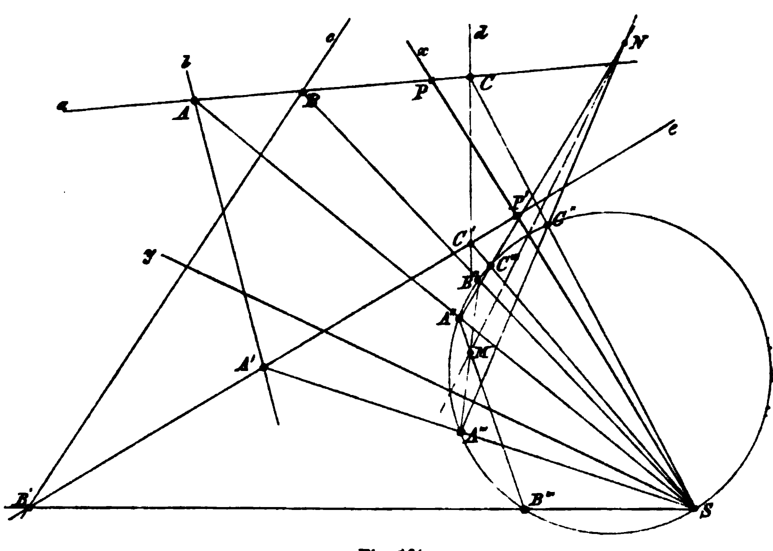


Fig. 161.

nämlich AA', BB', CC', in welchen b, c und d die Tangenten a und e schneiden, gegeben. Projicieren wir diese Punktreihen aus S, so erhalten wir zwei projektivische Strahlenbüschel mit gemeinschaftlichem Mittelpunkt. Ist nun x ein Doppelstrahl dieser Büschel, so schneidet derselbe a und e in zwei einander entsprechenden Punkten P und P', deren Verbindungslinie, nämlich x, eine Tangente des Kegelschnittes ist. Aus gleichem Grunde ist der zweite Doppelstrahl y die andere Tangente.

7) Durch einen Punkt P (Fig. 162) eine Gerade zu ziehen, welche mit zwei gegebenen Geraden g und g' ein Dreieck von gegebenem Flächeninhalt F bildet.

Aufl. F sei durch das Dreieck MSS' dargestellt. Wir ziehen durch P

die Gerade PA beliebig und projicieren durch diese den Punkt A der Geraden g nach A″. Ziehen wir jetzt den Strahl S′A″ und zu dem letzteren von S aus die Parallele SA′, so würde PA″ die gesuchte Gerade sein, wenn A′ mit A zusammenfiele. Projicieren wir nun noch zwei andere Punkte B und C der Geraden g von P aus nach B″ und C″ und ziehen SB′ ∥ S′B″; SC′ ∥ S′C″, so sind die Büschel S (A′B′C′ . .) und S′ (A″B″C″ . .) projektivisch (kongruent). Ferner haben die Büschel P (ABC . .) und S′ (A″B″C″ . .) perspektivische Lage, weil beide die Punktreihe A″B″C″ . . projicieren, folg-

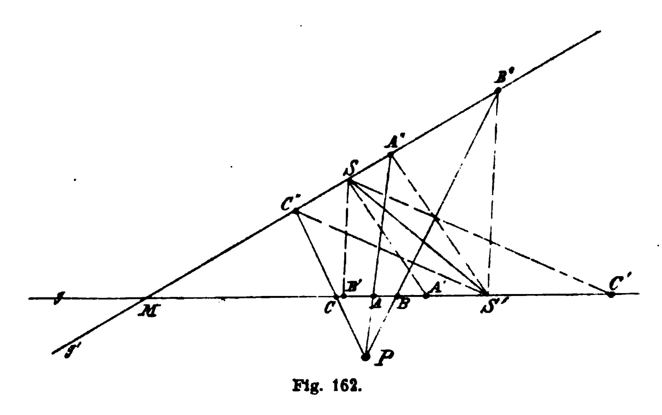


Fig. 162.

lich sind auch die Büschel P (A, B, C . .) und S (A′B′C′ . .) projektivisch. mithin auch die auf g vereinigt liegenden Punktreihen A, B, C . ., A′B′C′ . ., welche von den beiden letzten Büscheln bez. projiciert werden. Die oben genannte Bedingung wird also durch diejenigen Geraden erfüllt, welche von P aus die Doppelpunkte jener beiden Punktreihen projicieren.

Nach III, 21 ist die Einhüllende aller Geraden, welche mit g und g′ ein Dreieck von demselben Inhalt bilden, eine Hyperbel. Wie kann man hiernach die Aufgabe lösen?

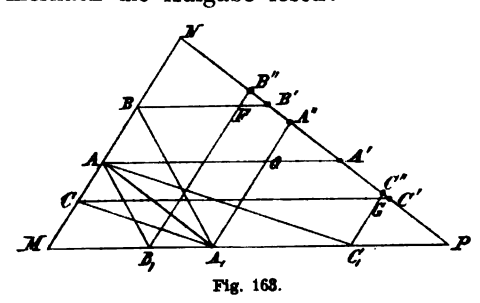


Fig. 163.

8) Einem Dreieck MNP (Fig. 163) soll ein Parallelogramm von gegebenem Flächeninhalt so einbeschrieben werden, dass zwei Seiten desselben in MN bez. MP liegen und der M gegenüberliegende Eckpunkt auf NP fällt.

Anl. zur Aufl. Das gesuchte Parallelogramm sei dem gegebenen Parallelogramm $MAQA_1$ an Inhalt gleich. Das letztere zerlegen wir durch die Diagonale AA_1 in zwei kongruente Dreiecke MAA_1 und AA_1Q. Nehmen wir nun B auf MN beliebig an, ziehen A_1B und parallel zu dieser AB_1,

so ist $\triangle MBB_1 = \triangle MAA_1$. Ziehen wir ferner B_1F parallel zu BM und BF parallel zu B_1M, so ist auch $MBFB_1 = MAQA_1$, es wird aber der Eckpunkt Q nicht auf NP liegen. Wir zeichnen in gleicher Weise noch ein drittes Parallelogramm $MCGC_1$, welches ebenfalls gleich $MAQA_1$ ist. dann sind die Büschel $A(A_1B_1C_1 \ldots)$ und $A_1(A, B, C\ldots)$ kongruent, folglich $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$ projektivische Punktreihen. Die beiden letzteren werden durch Strahlen, welche zu MP bez. MN parallel sind, auf NP projiciert, wodurch nun auf dieser die beiden projektivischen Punktreihen $A'B'C'\ldots$ und $A''B''C''\ldots$ entstehen. Der auf NP liegende Eckpunkt des gesuchten Parallelogramms ist folglich ein Doppelpunkt dieser beiden Punktreihen.

Anmerkung. Die Eckpunkte F, Q, G der benutzten Parallelogramme sind die Durchschnittspunkte der entsprechenden Strahlen zweier projektivischen Parallelstrahlenbüschel. Folglich liegen diese Punkte auf einem Kegelschnitt. Da die unendlich fernen Mittelpunkte jener Büschel die Kurve angehören, so ist dieselbe eine Hyperbel. Die auf NP liegende Ecke des gesuchten Parallelogramms ist ein Durchschnittspunkt dieser Hyperbel mit NP. In welchem Falle ergiebt die Lösung zwei Parallelogramme, eins oder gar keines?

9) Durch einen Punkt P (Fig. 164) zwei Strahlen zu ziehen, welche auf zwei Geraden g und g′ Strecken von gegebenen Längen m und n begrenzen.

Anl. zur Aufl. Man ziehe von P aus den Strahl $P\alpha'$ beliebig. Derselbe schneidet g und g′ in α bez. α'. Machen wir nun $\alpha A = m$ und

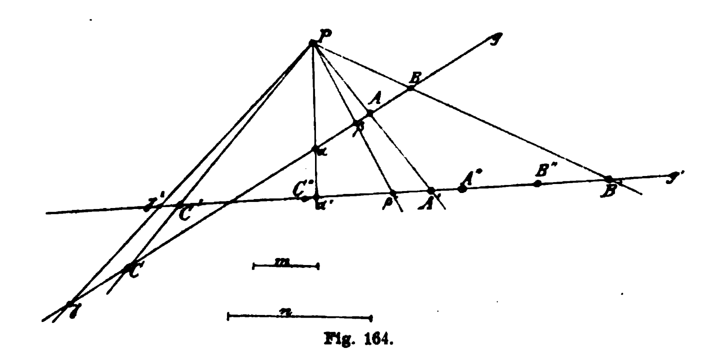


Fig. 164.

$\alpha' A'' = n$, so werden A und A″ nicht auf demselben durch A gehenden Strahle liegen. Wir ziehen durch P noch die Strahlen $P\beta'$ und $P\gamma'$, machen ferner jede der Strecken βB und γC gleich m und $\beta' B''$ sowohl wie $\gamma' C''$ jede gleich n u. s. f. Dann sind die Punktreihen $\alpha\beta\gamma\ldots$ und $ABC\ldots$ kongruent. Ferner ist die Reihe $\alpha'\beta'\gamma'\ldots$ eine Projektion von $\alpha\beta\gamma\ldots$ aus P und die Reihe $A''B''C''\ldots$ ist der Reihe $\alpha'\beta'\gamma'\ldots$ kongruent. Projicieren wir nun noch die Reihe $ABC\ldots$ nach $A'B'C'\ldots$ auf g′, so folgt, dass die

Reihe A′B′C′ .. projektivisch zu A″B″C″ .. ist. Man erkennt hieraus leicht, dass die Aufgabe durch die Ermittelung der Doppelpunkte dieser beiden letzten Reihen gelöst werden kann.

10) Zwischen zwei Geraden g und g′ eine Strecke so zu bestimmen, dass dieselbe aus zwei gegebenen Punkten S und S′ unter rechtem Winkel erscheint (Fig. 165).

Anl. zur Aufl. Wir ziehen die Strahlen SA, SB, SC .. beliebig und zu diesen bez. senkrecht die Strahlen SA″, SB″, SC″ .. Die Punktreihen A, B, C .. und A″B″C″ .. sind alsdann projektivisch. Projicieren wir nun die Punkte A″, B″, C″ .. aus dem Mittelpunkte S′, ziehen ferner die Strahlen S′A′, S′B′, S′C′ .. bez. senkrecht zu S′A″, S′B″, S′C″ .. Dann ist auch die Punktreihe A′B′C′ projektivisch zu A″B″C″ .., folglich auch projektiv zu A, B, C .. Die gesuchte Gerade geht nun offenbar durch einen der Doppelpunkte der Reihen ABC .. und A′B′C′ ..

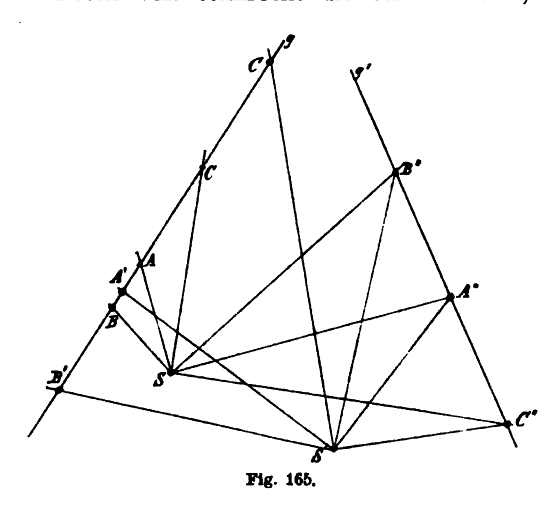


Fig. 165.

11) Ein Viereck zu zeichnen, von welchem zwei gegenüberliegende Seiten durch zwei gegebene Punkte gehen, die beiden anderen Seiten zwei gegebenen Geraden parallel sind und dessen Ecken auf vier gegebenen Geraden liegen.

12) Ein Viereck zu zeichnen, dessen Ecken auf gegebenen Geraden liegen und dessen Seiten vier anderen gleichfalls gegebenen Geraden parallel sind.

Die beiden folgenden Aufgaben der elementaren darstellenden Geometrie kommen auf 11 und 12 zurück.

13) Durch einen gegebenen Punkt $(A_1 A_2)$ (Fig. 166) eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Geraden (l_1, l_2), (m_1, m_2) schneidet.

Anl. z. Aufl. Sind n_1 und n_2 die beiden Projektionen der gesuchten durch A_1 und A_2 gehenden Geraden, so müssen die Schnittpunkte B_1 und B_2, ebenso die Schnittpunkte C_1 und C_2 auf Geraden liegen, welche senkrecht zur Achse OX stehen. (S. II, 17, I. Teil.)

Wenn wir nun von A_1 aus eine beliebige Gerade A_1D_1 ziehen, welche l_1 in D_1 und m_1 in E′ schneidet und bestimmen die zweite Projektion des Punktes D_1 in D_2, dann wird die Gerade A_2D_2 die m_2 in einem Punkte

E_2 treffen, welcher nicht senkrecht über E′ liegt. Wir bestimmen die erste Projektion E_1 des neuen Punktes. Ziehen wir beliebig viele solcher Geraden, so erhalten wir auf m_1 zwei Punktreihen E_1 . . und E′ . ., welche, wie man leicht sieht, projektivisch sind. Ein Doppelpunkt dieser beiden Reihen wird deshalb derjenige Punkt sein, durch welchen die erste Projektion der gesuchten Geraden geht.

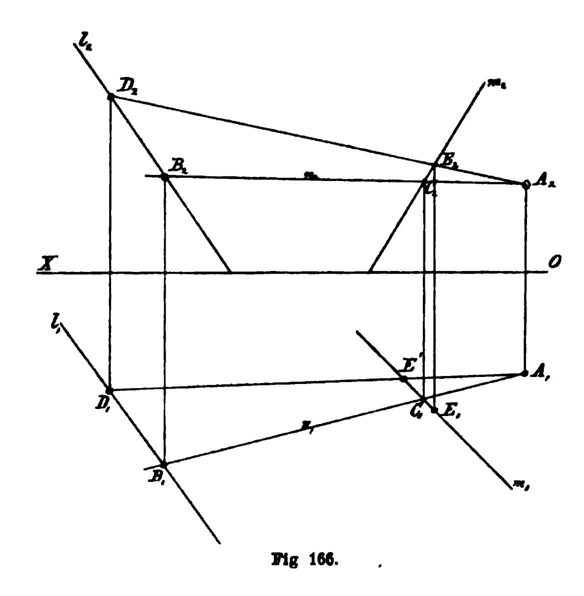


Fig 166.

Die Aufgabe lässt, wenn die beiden gegebenen Geraden windschief sind, nur eine Lösung zu. Wie zeigt sich dies bei der Ausführung der Konstruktion?

14) Die Projektionen einer Geraden zu finden, welche zwei gegebene Geraden (l_1, l_2) und (m_1, m_2) schneidet und einer dritten Geraden (g_1, g_2) parallel ist.

15) Durch die Mittelpunkte S und S′ (Fig. 167) zweier projektivischen Strahlenbüschel legen wir einen Kegelschnitt k. Ferner sei K der von den beiden Büscheln erzeugte Kegelschnitt. Zwei entsprechende Strahlen der Büschel sind a und a′. Dieselben treffen sich in einem Punkte α des Kegelschnittes K und bestimmen auf k die Punkte A und A′. Ebenso treffen die entsprechenden Strahlen b und b′, ferner c und c′ den Kegelschnitt k in den Punkten B bez. B′, C bez. C′.

Fig. 167.

Projiciert man die Punkte ABC . . und A′B′C′ . . aus zwei anderen Punkten des Kegelschnittes k, so erhält man zwei neue Büschel,

welche den Büscheln S und S′ und folglich untereinander projektivisch sind. Aus diesem Grunde nennt man die auf k liegenden Reihen ABC.., A′B′C′.. ebenfalls projektivische Punktreihen.

Wir projicieren A′B′C′.. aus A und ABC.. aus A′. Die hierdurch entstehenden projektivischen Strahlenbüschel haben alsdann den Strahl AA′ entsprechend gemeinschaftlich, folglich liegen die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen auf einer Geraden g. Die letztere geht aber, wie man leicht erkennt, durch die beiden anderen Schnittpunkte M und N der Kegelschnitte k und K, denn in diesen Punkten treffen sich je zwei entsprechende Strahlen der Büschel S und S′. Es sind demnach auch M und N Doppelpunkte der beiden Reihen ABC.., A′B′C′.. Man findet jetzt den einem beliebigen Punkte D der ersten Reihe entsprechenden Punkt D′ auch, wenn man D aus A′ nach D″ auf g und D″ aus A nach D′ projiciert.

16) Die dualistische Übertragung des vorigen lautet:

An die Träger g und g′ zweier projektivischen Punktreihen legen wir einen berührenden Kegelschnitt k. Ferner sei K der von den Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Reihen erzeugte Kegelschnitt. Durch zwei entsprechende Punkte z. B. A und A′ der beiden Reihen geht eine Tangente des Kegelschnittes K und von A und A′ können wir noch zwei Tangenten a bez. a′ an k ziehen. Ebenso können von B und B′, ferner C und C′ die Tangenten b bez. b′ und c bez. c′ an k gezogen werden. Schneiden wir die Tangenten a, b, c.. und a′b′c′ durch zwei andere Tangenten des Kegelschnittes k, so erhalten wir auf den letzteren zwei neue Punktreihen, welche den Reihen g und g′, folglich auch untereinander projektivisch sind. Aus diesem Grunde nennt man die Reihen der Tangenten a, b, c.., a′b′c′.. projektivische Reihen.

Wir schneiden nun die Reihe a′b′c′.. durch a und die Reihe abc.. durch a′. Die hieraus entstehenden projektivischen Punktreihen haben den Schnittpunkt der Tangenten a und a′ entsprechend gemeinschaftlich, folglich gehen die Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Reihen durch einen Punkt G. Der letztere liegt aber auf den beiden anderen gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte k und K, denn durch G gehen auch die Verbindungslinien zweier entsprechenden Punkte der Reihen ABC.. und A′B′C′..

17) Werden die Punkte eines Kegelschnittes k aus einem beliebigen Punkte S, welcher nicht auf k liegt, projiciert, so wird k von dem Büschel S in zwei projektivischen Punktreihen geschnitten, welche involutorisch sind. Zwei Strahlen a und b des Büschels schneiden nämlich k in A, A′ bez. B und B′. Die Verbindungslinien der Punkte A und B′, A′ und B schneiden sich aber auf der Polare g des Punktes S. Ebenso die Geraden A′C und AC′, wenn C und C′ die Schnittpunkte eines Strahles c des Büschels S mit

k sind. Daraus folgt, dass die Büschel, welche A'B'C'.. aus A und ABC.. aus A' projicieren, projektivisch sind und weil beide die Punktreihe g projicieren, perspektivische Lage haben. Betrachten wir nun B' als Punkt der Reihe ABC.., so finden wir, da die Geraden AB und A'B' ebenfalls in einem Punkte β' der Polare g zusammentreffen, dass β' eine Projektion von B' aus A' und B alsdann Projektion von β' aus A ist. Demnach ist B der dem Punkte B' entsprechende Punkt der Reihe A'B'C'.. Damit ist die obige Behauptung bewiesen. Die Punkte M und N, in welchen g den Kegelschnitt k trifft, sind die Doppelpunkte der beiden Reihen. In diesen Punkten berühren die von S an k gelegten Tangenten den Kegelschnitt.

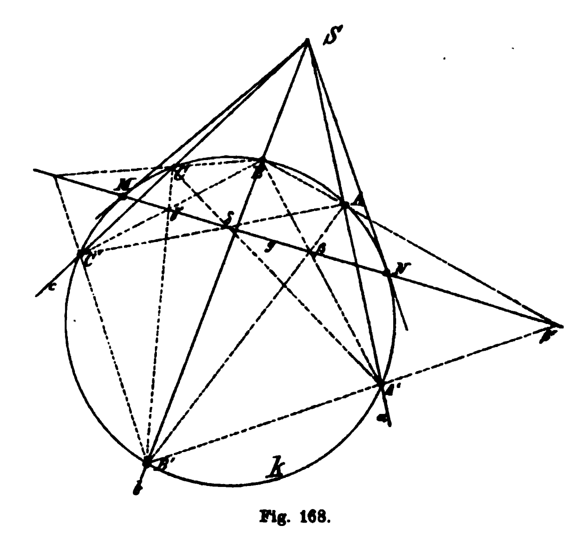


Fig. 168.

Liegt S unendlich fern, so wird die Gerade g ein Durchmesser des Kegelschnittes.

Betrachtet man S als Kollineationscentrum, g als Kollineationsachse und nimmt man B und B' als entsprechende Punkte zweier kollinearen Systeme an, dann sind auch zwei auf einem beliebigen Kollineationsstrahl liegende Punkte des Kegelschnittes k entsprechende Punkte der beiden Systeme, wie sich aus dem Anblick der Fig. 168 unmittelbar ergiebt. Der Kegelschnitt ist also in diesem Falle sich selbst kollinear.

18) a, b, c.. (Fig. 169) seien Tangenten eines Kreises k, welche von einer beliebigen Tangente t in den Punkten A'B'C'.. geschnitten werden. Die Reihe A'B'C'.. wird aus dem Mittelpunkte O des Kreises durch ein Strahlenbüschel O (A'B'C'..) projiciert. Die Berührungspunkte der Tangenten a, b, c.. seien A, B, C.. und in M berühre t den Kreis. Projicieren wir A, B, C.. aus dem Endpunkte S des von M ausgehenden Durch-

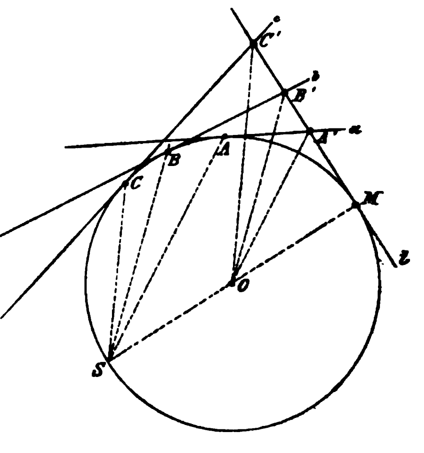


Fig. 169.

messers, dann ist:

$$A'O \parallel AS$$
$$B'O \parallel BS$$
$$C'O \parallel CS$$

Demnach sind die Büschel S (ABC . .) und O (A'B'C' . .) kongruent. Die Punktreihe A'B'C' ist demnach dem Strahlenbüschel S (A B C . .) und folglich auch der Reihe A, B, C . . projektivisch. Da nun die Reihe A'B'C' . . ein Schnitt der Reihe der Tangenten a, b, c . . mit t ist, so folgt, dass die Reihe a, b, c . . der Reihe A, B, C . . ebenfalls projektivisch ist.

Da durch eine beliebige Projektion der Fig. 169 in diesen Beziehungen nichts verändert wird, so folgt allgemein:

Die Reihe der Tangenten eines Kegelschnittes ist projektivisch zu der Reihe ihrer Berührungspunkte.

19) Ziehen wir von den Punkten α, β, γ . . . (Fig. 170) einer Geraden g die Tangenten a, a'; b, b'; c, c' . . an einen Kegelschnitt k und sind A, A'; B, B'; C, C' die Berührungspnnkte derselben, so gehen die Verbindungslinien A A', B B', C C' . . durch einen Punkt G, den Pol der Geraden g. Nach 17) sind deshalb die Punktreihen ABC. . und A'B'C' involutorisch und folglich bilden auch die beiden Tangentenreihen abc.., a'b'c'.. eine Involution. Trifft die Gerade g den Kegelschnitt, so sind die Tangenten in den Schnittpunkten die Doppelelemente dieser Involution. Liegt die Gerade g ausserhalb des Kegelschnittes, so hat die Involution keine Doppelelemente.

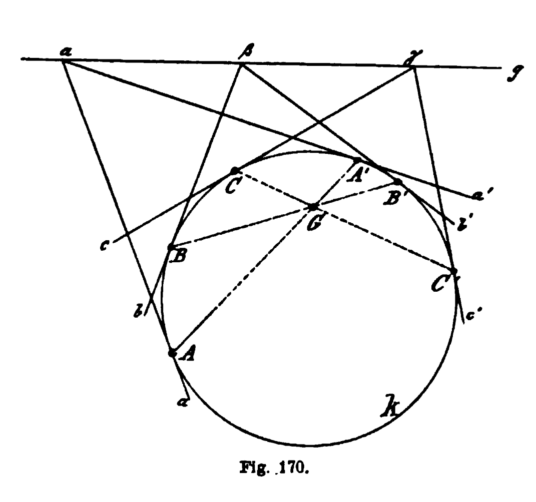


Fig. 170.

Mit Hülfe der Sätze 15—19 lassen sich die folgenden Aufgaben lösen:

20) Zwei Durchschnittspunkte zweier gegebenen Kegelschnitte sind gegeben. Man soll die beiden anderen Schnittpunkte bestimmen.

Als besonderen Fall löse man dieselbe Aufgabe in der folgenden Form:

21) Ein Kegelschnitt k ist durch fünf Punkte gegeben. Durch zwei derselben ist ein Kreis gelegt; man soll die beiden andern Schnittpunkte des Kreises mit k bestimmen.

22) Zwei gemeinschaftliche Tangenten zweier gegebenen Kegelschnitte k und K sind bekannt. Man soll die beiden andern gemeinschaftlichen Tangenten bestimmen.

23) Ein Kreis K ist gegeben. Ein Kegelschnitt k ist durch fünf seiner Tangenten, von welchen zwei den Kreis K berühren, bestimmt. Man soll die beiden anderen gemeinschaftlichen Tangenten des Kreises und Kegelschnittes bestimmen.

24) Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Eckpunkte auf einem gegebenen Kegelschnitt k liegen und dessen Seiten durch drei gegebene Punkte X, Y und Z gehen (Fig. 171).

Wir projicieren drei beliebige Punkte A, B, C des Kegelschnittes der Reihe nach aus X nach $A_1B_1C_1$, diese Punkte aus Y nach A_2, B_2, C_2, und

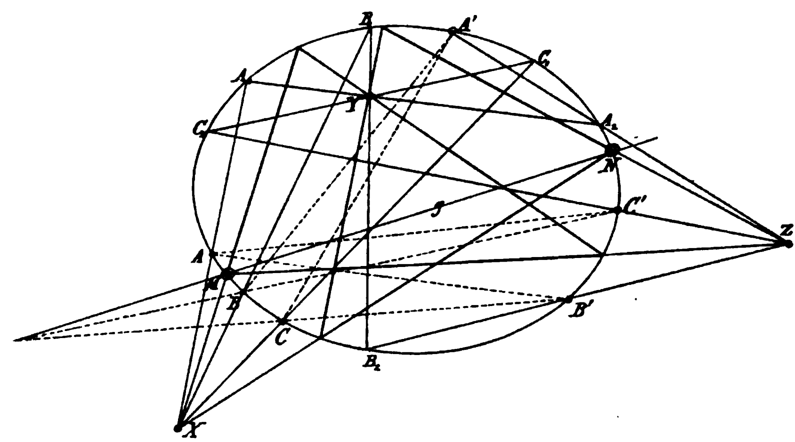


Fig. 171.

die letzteren aus Z nach A′, B′, C′. Aus 17) folgt, dass dann die Reihe A, B, C der Reihe A′B′C′ projektivisch ist. Die Auflösung erfordert demnach die Bestimmung der Doppelpunkte beider Reihen. Wir konstruieren deshalb die Gerade g, auf welcher sich die entsprechenden Strahlen der perspektivisch liegenden Büschel A (A′, B′, C′) und A′ (A, B, C) schneiden. Diese Gerade trifft k in den Doppelpunkten M und N, und jeder der letzteren kann als ein erster Eckpunkt des gesuchten Dreiecks angesehen werden.

25) Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten einen gegebenen Kegelschnitt berühren und dessen Ecken auf drei gegebenen Geraden liegen.

26) Ein Vieleck zu zeichnen, dessen Ecken auf einem gegebenen Kegelschnitt liegen und dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen.

27) Ein Vieleck zu zeichnen, dessen Seiten einen gegebenen Kegelschnitt berühren und dessen Ecken auf gegebenen Geraden liegen.

28) Ein Dreieck (oder ein Vieleck) zu zeichnen, welches einem gegebenen Kegelschnitt einbeschrieben ist und dessen Seiten drei gegebenen Geraden parallel sind.

29) Fünf Punkte A, B, C, D, E eines Kegelschnittes und ein Punkt S

sind gegeben; man soll die Polare des letzteren in Bezug auf den Kegelschnitt bestimmen.

Anl. z. Aufl. Man verbinde S mit zwei Punkten z. B. A und C und bestimme nach III, 2 die zweiten Durchschnittspunkte F und G der Geraden AS bez. CS mit dem Kegelschnitt. Die gesuchte Polare s geht dann durch die Schnittpunkte der Geraden AC und FG und der Geraden AG und CF.

30) Ist in dem vorigen Falle eine Gerade s gegeben und soll der Pol derselben bestimmt werden, so suche man die Polaren von 2 Punkten der Geraden s; dieselben schneiden sich in dem gesuchten Pole.

31) Fünf Tangenten eines Kegelschnittes sind gegeben. Man soll

α) den Pol einer gegebenen Geraden s

β) die Polare eines gegebenen Punktes S

in Bezug auf den Kegelschnitt bestimmen.

32) Fünf Punkte A, B, C, D, E eines Kegelschnittes sind gegeben; man soll den Mittelpunkt desselben finden.

Anl. zur Aufl. Aus zwei der gegebenen Punkte z. B. A und B projiciere man die drei anderen Punkte. Ziehe durch B einen Strahl g parallel zu einem Strahle des Büschels A, z. B. parallel zu AE und bestimme nach III, 2 den zweiten Schnittpunkt des Strahles g mit dem Kegelschnitt. Hierdurch erhält man zwei parallele Sehnen, durch deren Mitten ein Durchmesser des Kegelschnittes geht. In gleicher Weise konstruiert man einen zweiten Durchmesser, wodurch sich dann der Mittelpunkt ergiebt.

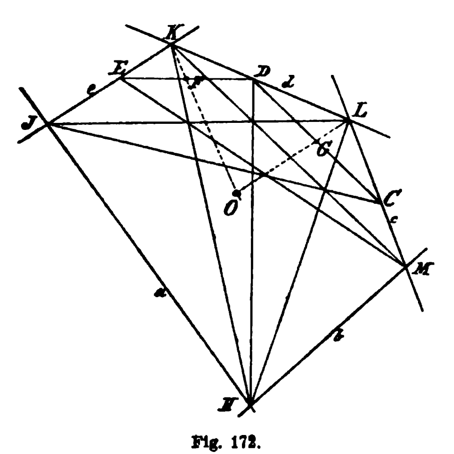


Fig. 172.

33) Fünf Tangenten a, b, c, d, e eines Kegelschnittes sind gegeben; man soll den Mittelpunkt desselben bestimmen.

Aufl. Es seien C, D, E (Fig. 172) die nach III, 10 bestimmten Berührungspunkte der Tangenten c, d bez. e. Wir ziehen die Geraden CD und DE (Berührungssehnen), halbieren dieselben in G bez. F und ziehen nun die Geraden KF und GL, welche Durchmesser des Kegelschnittes sind und sich deshalb im Mittelpunkt O desselben schneiden.

V. Abschnitt.

Regelscharen und Regelflächen.

1) Es seien l_1, l_2, l_3 drei windschiefe Geraden, welche in Fig. 173 durch ihre geraden Projektionen $l_1'l_1''$; $l_2'l_2''$; $l_3'l_3''$ dargestellt sind. Wir können unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, dass eine der drei Geraden, z. B. l_1 senkrecht zu der ersten Projektionsebene steht, dann ist die

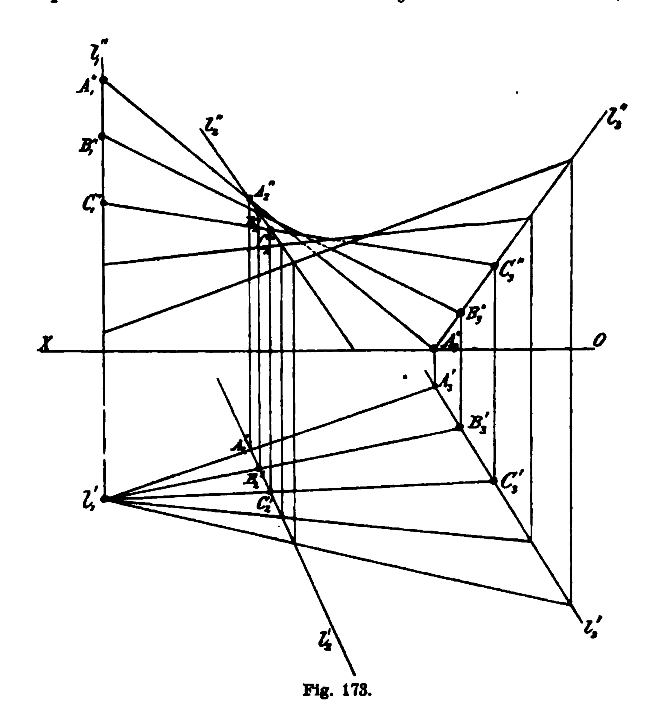


Fig. 173.

erste Projektion derselben der Punkt l_1'. Um eine Gerade zu bestimmen, welche die drei gegebenen Geraden schneidet, legen wir durch l_1 irgend eine Ebene E. Diese letztere steht alsdann senkrecht zur ersten Projektionsebene und sie schneidet l_2 und l_3 in zwei Punkten A_2 bez. A_3, deren erste Projektionen A_2' und A_3' sind. Die zweiten Projektionen A_2'' und A_3'' dieser Punkte ergeben sich durch Senkrechten zur Achse OX auf bekannte Weise. Hiernach sind nun $A_2'A_3'$ und $A_2''A_3''$ die Projektionen einer Geraden A_2A_3, welche die drei gegebenen Windschiefen $l_1l_2l_3$ schneidet. Auf gleiche Weise sind in Fig. 173 noch mehrere solcher Geraden durch

ihre Projektionen dargesellt z. B. $B_2'B_3''$, $B_2''B_3''$; $C_2'C_3'$, $C_2''C_3''$ u. s. f. (Vergl. auch die schiefe Projektion, Fig. 174).

Die Gesamtheit aller Geraden, welche drei windschiefe Geraden schneiden, wird eine Regelschar genannt. Wir können jedoch aus der oben an-

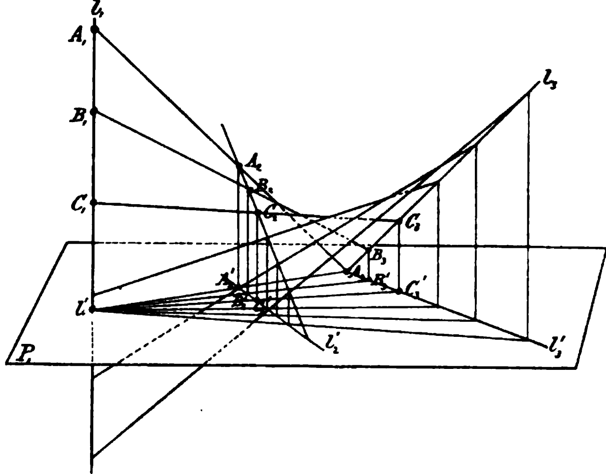


Fig. 174.

gegebenen Konstruktion noch eine andere Erklärung für dieselbe aufstellen. Betrachten wir die ersten Projektionen der Geraden der Regelschar, so bemerken wir, dass dieselben einen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt l_1' bilden, welcher l_2' und l_3' in zwei projektivischen Punktreihen $A_2'B_2'C_2'$.. und $A_3'B_3'C_3'$ von perspektivischer Lage schneidet. Es sind aber diese Reihen gerade Projektionen der Reihen $A_2B_2C_2$.., $A_3B_3C_3$.., welche auf l_2 und l_3 liegen; folglich sind auch die letzteren projektivische Punktreihen. (Dass auch l_1 von den Geraden der Regelschar in einer Punktreihe geschnitten, welche den Punktreihen auf l_2 und l_3 projektivisch ist, folgt, wenn man die Regelschar auf eine Ebene projiciert, welche senkrecht zu l_2 oder l_3 steht.) Hieraus ergiebt sich:

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der auf zwei windschiefen Geraden l_2 und l_3 liegenden projektivischen Punktreihen bilden eine Regelschar. Die sämtlichen Geraden der Regelschar erfüllen eine krumme Fläche, welche eine Regelfläche genannt wird.

2) Eine Gerade l, welche drei Geraden einer Regelschar schneidet, liegt ganz in der Regelfläche, d. h. sie schneidet auch alle anderen Geraden der Regelschar (Fig. 175).

Beweis. Es seien l_1 und l_2 die Träger der beiden projektiven Punktreihen $A_1B_1C_1$.., $A_2B_2C_2$.. und A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 drei Geraden der hierdurch bestimmten Regelschar; l schneide die letzteren in den Punkten A,

B und C. Legen wir durch l und A_1 die Ebene Q_1, durch l und B_1 die Ebene Q_2 und durch l und C_1 die Ebene Q_3, so gehen diese Ebenen auch bez. durch A_2, B_2 und C_2. Jede der Punktreihen l_1 und l_2 liegt demnach perspektivisch zu dem Ebenenbüschel, welcher die beiden Reihen aus der Achse l projiciert. Die Verbindungslinie von irgend zwei entsprechenden Punkten der Reihen l_1 und l_2 liegt deshalb in einer der projicierenden Ebenen des Büschels mit der Achse l, folglich wird l von dieser Geraden geschnitten.

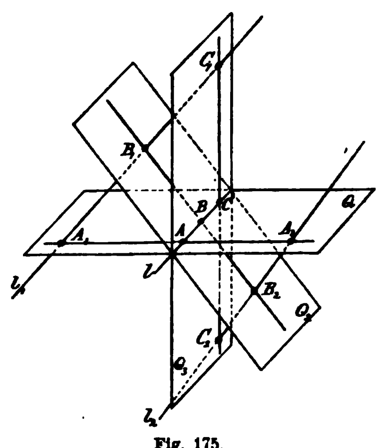


Fig. 175.

Eine Regelfläche wird deshalb noch von einer zweiten Regelschar erfüllt. Jede Gerade der einen Schar schneidet jede Gerade der anderen Schar. Eine der Scharen ist bestimmt, wenn drei Geraden der andern Schar gegeben sind. Man nennt deshalb auch jede Gerade der einen Schar eine Leitgerade der andern Schar. Alle Geraden der einen Schar werden von den Geraden der andern Schar in projektivischen Punktreihen geschnitten.

3) Legen wir durch l_2 und A_1 eine Ebene, so schneidet dieselbe l in A; ebenso schneidet die durch l_2 und B_1 gehende Ebene die Gerade l in B u. s. f. Es ist aber ein die Punkte $A_1 B_1 C_1$ .. aus der Achse l_2 projicierender Ebenenbüschel dem Büschel projektivisch, welcher dieselben Punkte aus der Achse l projiciert. Die entsprechenden Ebenen der Büschel schneiden sich nun in den Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ u. s. f., d. h.:

Eine Regelschar wird auch durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen zweier projektivischen Ebenenbüschel erzeugt, deren Achsen nicht in einer Ebene liegen.

Hieraus ergeben sich noch folgende Eigenschaften einer Regelfläche: Der Durchschnitt einer beliebigen Ebene mit einer Regelfläche ist ein Kegelschnitt. Denn diese Ebene schneidet die beiden Ebenenbüschel, welche die Regelschar erzeugen in zwei projektivischen Strahlenbüscheln. Durch diese ist der Kegelschnitt bestimmt. Geht aber die Schnittebene durch eine Gerade der Regelschar, so schneidet sie die Fläche auch noch in einer zweiten Geraden, welche der anderen auf der Regelfläche liegenden Schar angehört.

4) Beispiele. Das hyperbolische Paraboloid.

Sind drei Leitgeraden gegeben, so ist die Regelfläche bestimmt. Wir machen zuerst die Annahme, dass eine der drei Leitgeraden z. B. l_1 unendlich fern liegt. Die Ebenen des Büschels mit der Achse l_1 werden dann unter sich parallel, die Regelfläche wird also von einer Geraden beschrieben,

welche an l_2 und l_3 gleitet und dabei einer festen Ebene stets parallel bleibt.

In Fig. 176 ist die Fläche durch eine schiefe Parallelprojektion dargestellt. l_2 und l_3 sind die beiden Leitgeraden der einen Schar, die dritte Leitgerade l_1 liegt unendlich fern. P ist eine Ebene, welche so angenommen wurde, dass die beiden geraden Projektionen l_2' und l_3' der Leitgeraden l_2 und l_3 unter sich parallel sind. Die unendlich ferne Gerade l_1 stehe senkrecht zu P, dann werden die Projektionen aller Geraden der l_1, l_2 und l_3

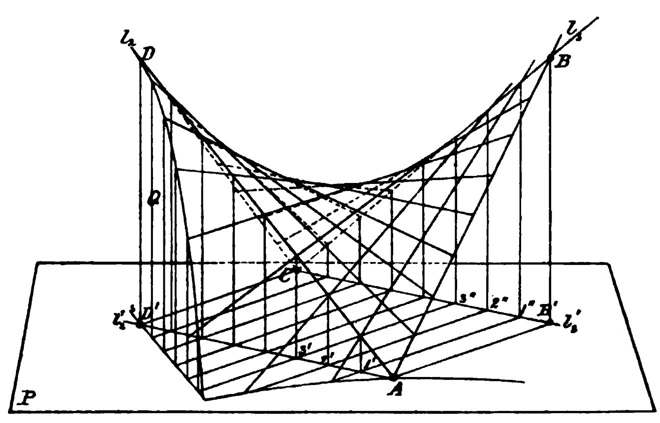


Fig. 176.

schneidenden Regelschar auf P eine Schar von parallelen Geraden bilden. Die Regelfläche ist hiernach leicht durch eine Anzahl von Erzeugenden anschaulich zu machen. Es seien A und C die Punkte, in welchen l_2 bez. l_3 die Ebene P treffen, ferner sei AB eine Gerade der Regelschar, AB′ ihre Projektion auf P, dann werden die Projektionen der übrigen Geraden der Regelschar nach den gemachten Voraussetzungen parallel zu AB′ sein. Ziehen wir also 1′1″, 2′2″, 3′3″.. parallel zu AB′ in der Ebene P, so schneiden diese die Geraden l_2' und l_3'. In den Schnittpunkten errichten wir Lote auf P; dieselben treffen l_2 bez. l_3 und nun gehören die Verbindungslinien derjenigen dieser Schnittpunkte, welche senkrecht über je einer der Geraden 1′1″, 2′2″, 3′3″.. liegen, der gesuchten Regelschar an.

Die Projektionen der Geraden der zweiten Regelschar bilden einen Strahlenbüschel, dessen Strahlen mit den beiden Geraden AD′ und B′C parallel sind. Die zweite Schar kann hiernach in gleicher Weise dargestellt werden.

Der Durchschnitt der Regelfläche mit der Ebene P ist leicht zu finden. Jede Gerade einer Schar trifft ihre Projektion auf P in einem Punkte der gesuchten Durchschnittskurve, welche, wie man leicht erkennt, aus zwei unendlichen Zweigen besteht und demnach eine Hyperbel sein muss. Legen

wir durch DD′ eine Ebene Q senkrecht zu P und ist s die Schnittlinie beider, so liegen die Schnittpunkte der Geraden jeder Schar senkrecht über den Punkten, in welchen s von den Projektionen jener Geraden getroffen wird. Die durch diese Punkte gehende Durchschnittskurve ist eine Parabel. Wegen der Eigenschaft, dass diese Fläche von einer Ebene nur in einer Hyperbel oder Parabel, aber nicht in einer Ellipse geschnitten werden kann, nennt man dieselbe ein hyperbolisches Paraboloid. Ein hyperbolischer Schnitt kann auch in zwei gerade Linien zerfallen, wenn die Ebene durch zwei Geraden geht, welche verschiedenen Regelscharen angehören. In dem Schnittpunkte der beiden Geraden wird die Ebene in diesem Falle die Regelfläche berühren (s. I. Teil, VIII, 13).

In Fig. 177 ist ein Teil des hyperbolischen Paraboloids durch Grundriss, Aufriss und Seitenansicht dargestellt. Das Parallelogramm A′B′C′D

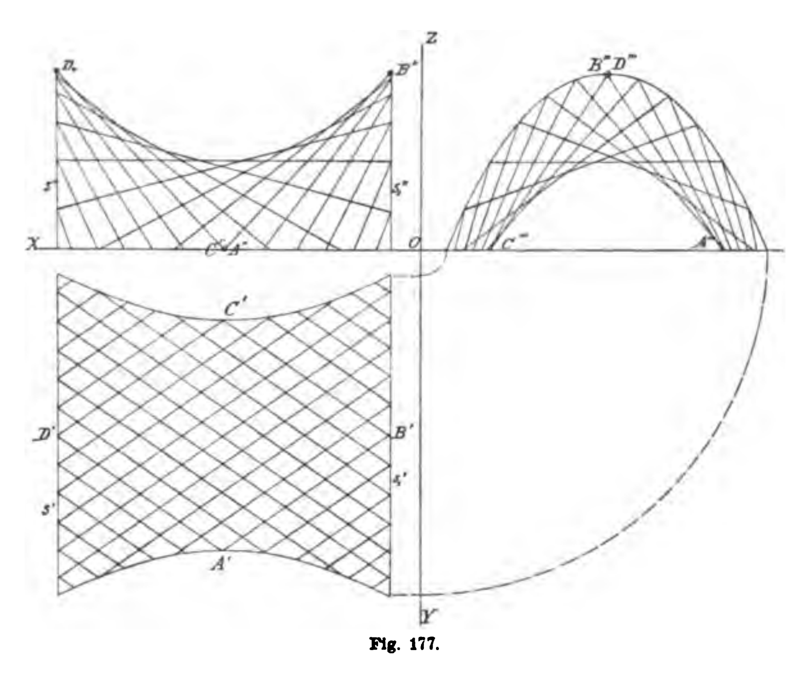


Fig. 177.

ist die erste Projektion des windschiefen Vierecks ABCD (Fig. 177). Dasselbe ist so angeordnet, dass die zweiten Projektionen von A′ und C′ in der Achse OX zusammenfallen. Die ersten Projektionen der beiden auf der Fläche liegenden Regelscharen sind die zwei Parallelstrahlenbüschel. Die zweiten und dritten Projektionen der Regelscharen ergeben sich dann leicht, ebenso die dritten Projektionen der zu OX senkrecht stehenden parabolischen Schnitte, deren erste und zweite Projektionen durch die beiden Geraden s′, s″ und s_1', s_1'' dargestellt werden.

Das elliptische Hyperboloid.

5) Drei Leitgeraden einer Schar des hyperbolischen Paraboloids sind einer und derselben Ebene parallel, deshalb besitzt die Fläche auch zwei unendlich ferne Geraden (jede der beiden Regelscharen eine). Wenn aber drei Leitgeraden nicht derselben Ebene parallel sind, so liegt auch keine der Geraden der Schar unendlich fern. Keine der Ebenen des Büschels,

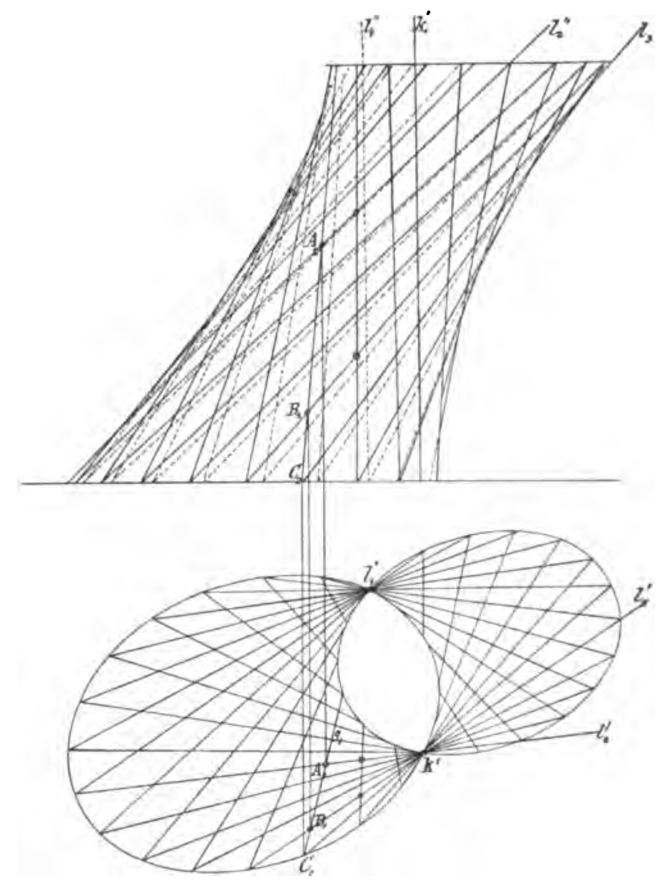


Fig. 178.

dessen Achse eine der Leitgeraden ist, kann in diesem Falle die beiden anderen Leitgeraden zugleich in zwei unendlich fernen Punkten schneiden.

Nehmen wir mit Rücksicht auf möglichst einfache Konstruktion an, die eine der drei Leitgeraden l_1 (l_1', l_1'') (Fig. 178) stehe wieder senkrecht zur ersten Projektionsebene; l_2 (l_2', l_2'') und l_3 ($l_3' l_3''$) seien die beiden anderen Leitgeraden. Irgend eine Gerade der Regelschar, welche diese drei schneidet,

erhalten wir, wenn wir durch l_1' die Gerade g_1 beliebig als erste Projektion einer solchen annehmen. Dieselbe schneidet l_2' und l_3' in A_1 und B_1, deren zweite Projektionen A_2 und B_2 auf l_2'' und l_3'' liegen. Durch A_2 und B_2 geht nun die zweite Projektion der gesuchten Geraden. Wir bestimmen noch die Projektionen C_1 und C_2 des Schnittpunktes dieser Geraden mit der ersten Projektionsebene auf bekannte Weise. In Fig. 178 sind so viele Geraden der Regelschar durch ihre Projektionen angegeben, dass der elliptische Durchschnitt der Regelfläche mit der ersten Projektionsebene deutlich zum Vorschein kommt. Die Regelschar enthält zwei Geraden, welche l_2 bez. l_3 parallel sind.

Der Umriss der zweiten Projektion der Regelfläche ist eine Hyperbel. Wir erkennen nämlich leicht, dass im Grundriss auf l_2' und l_3' durch die ersten Projektionen der Geraden der Regelschar zwei projektivische Punktreihen von perspektivischer Lage entstehen. Die zweiten auf l_2'' und l_3'' liegenden Projektionen dieser Reihen sind deshalb auch projektivisch und da die Verbindungslinien entsprechender Punkte der letzteren die zweiten Projektionen der Geraden der Regelschar sind, so hüllen dieselben einen Kegelschnitt ein, welcher in diesem Falle aus zwei getrennten unendlichen Zweigen besteht, mithin eine Hyperbel ist.

Diese Regelfläche wird das einschalige Hyperboloid (auch elliptisches Hyperboloid) genannt. Um die zweite Regelschar, welche auf der Fläche noch möglich ist, darzustellen, betrachten wir die zur ersten Projektionsebene senkrechte Gerade k_1', k_1'' (deren erste Projektion der Punkt k_1' ist, in welchen l_2' und l_3' sich kreuzen) als Achse eines Ebenenbüschels. Jede der Ebenen dieses Büschels erscheint im Grundriss als eine durch k_1' gehende Gerade. Ist z. B. l_2' eine solche, so schneidet dieselbe sämtliche Geraden der Regelschar. Aus den ersten Projektionen zweier dieser Schnittpunkte ergeben sich leicht die zweiten Projektionen derselben und hierdurch ist die zweite Projektion einer Geraden der anderen Regelschar bestimmt.

Im I. Teile d. W. VIII, 6 ist die besondere Form des einschaligen Hyperboloids dargestellt, welches von einer Hyperbel durch Drehung um ihre zur Hauptachse senkrechte Achse durchlaufen wird. Wir können die allgemeinere Form des einschaligen Hyperboloids aus diesem auch durch eine Kollineation bilden, am einfachsten, wenn wir den in Fig. 179 dargestellten Grundriss durch Affinität umwandeln, während der Aufriss in diesem Falle unverändert bleibt. Das letztere ist der Fall, wenn wir die Affinitätsstrahlen senkrecht zur zweiten Projektionsebene und denjenigen Durchmesser, welcher parallel zur Achse OX, ist als Kollineationsachse annehmen.

Die Teilpunkte der in der ersten Projektionsebene liegenden Ellipse bez. derjenigen, welche mit der ersten Ebene parallel ist, entsprechen den gleich

weit voneinander entfernten Teilpunkten der entsprechenden Kreise. Man kann dieselben deshalb leicht nach IV, 5, I. Teil bestimmmen. Hierdurch ergiebt sich die Darstellung dieser Fläche in einfachster Weise.

Aufgaben.

6) Ein einschaliges Hyperboloid ist durch Grund- und Aufriss gegeben. Man soll die Durchschnittskurve desselben mit einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene bestimmen.

7) Von dem Punkte M $(m_1 m_2)$ aus Berührungsebenen an das Hyperboloid $(H_1 H_2)$ zu legen (Fig. 179).

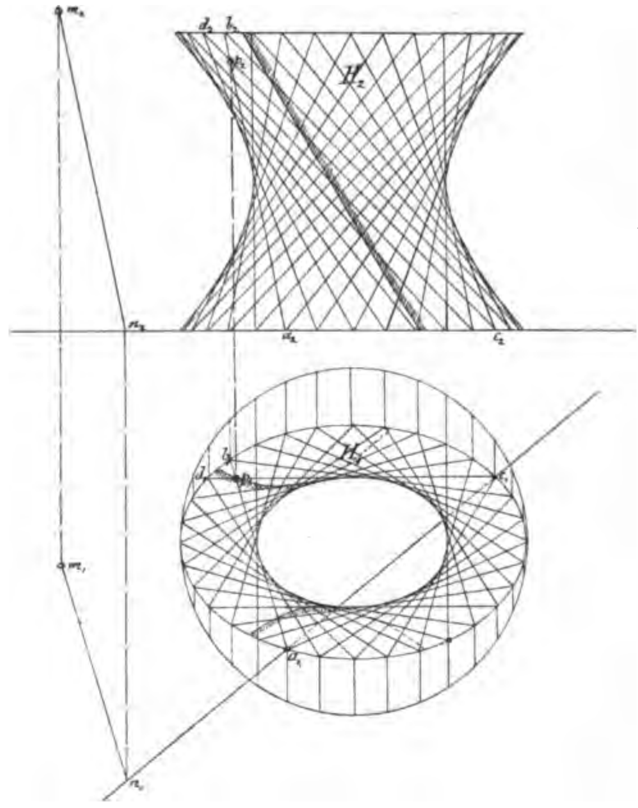


Fig. 179.

Auflösung. Wir können durch den gegebenen Punkt M und eine der auf den Hyperboloid liegenden Geraden z. B. $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ eine Ebene E legen. Zu diesem Zwecke ziehen wir durch (m_1, m_2) die Gerade $(m_1 n_1, m_2 n_2)$ parallel zu $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ und legen durch diese beiden Parallelen die Ebene. Die erste Spur s der letzteren geht durch die beiden ersten Spuren n_1 bez. a_1 jener Geraden und sie trifft die Durchschnittsellipse des Hyper-

boloids und der ersten Projektionsebene in einem zweiten Punkte c_1. Hiernach können wir die erste Projektion der zweiten Seitenlinie des Hyperboloids zeichnen, in welcher dasselbe von der Ebene E geschnitten wird, nämlich die von c_1 aus an die Kehlellipse gelegte Tangente $c_1 d_1$. Die Ebene E berührt nun das Ellipsoid in dem Schnittpunkte der beiden Seitenlinien des Hyperboloids, durch welche sie gelegt ist, dessen erste Projektion sich hiernach in p_1 ergiebt. Die zweite Projektion p_2 dieses Punktes bestimmt man durch die zweiten Projektionen jener Seitenlinien. Auf diese Weise erhalten wir beliebig viele Berührungspunkte, so dass der Ort derselben anschaulich gemacht werden kann. In Fig. 179 sind die beiden Projektionen der Kurve vollständig angegeben.

Ist M ein leuchtender Punkt, so stellt diese Kurve die Grenzlinie zwischen dem hellenden und dunklen Teil der Fläche dar.

8) An ein einschaliges Hyperboloid Berührungsebenen zu legen, welche einer gegebenen Geraden g parallel sind (Fig. 180).

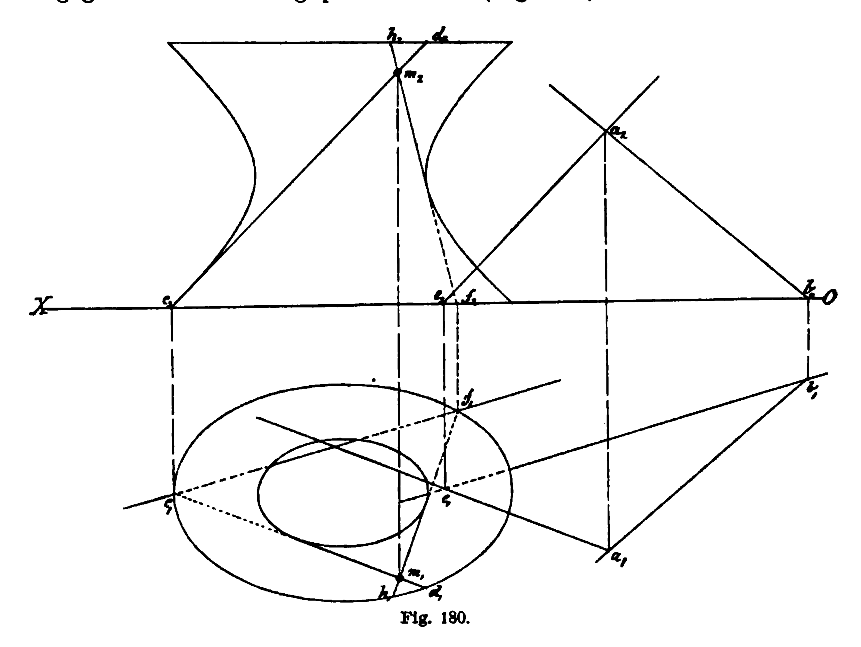


Fig. 180.

Auflösung. Wir nehmen auf der gegebenen Geraden ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) den Punkt (a_1, a_2) beliebig an und ziehen durch denselben eine Parallele ($a_1 e_1$, $a_2 e_2$) zu einer Seitenlinie ($c_1 d_1$, $c_2 d_2$) des Hyperboloids. Durch die beiden sich schneidenden Geraden legen wir eine Ebene, deren erste Spur $b_1 e_1$ durch die beiden ersten Spuren jener Geraden geht. Durch ($c_1 d_1$, $c_2 d_2$) können wir nun eine Ebene E parallel zu der eben gefundenen Ebene legen, deren erste Spur $c_1 f_1$ parallel $b_1 e_1$ ist. Diese Ebene schneidet das Hyper-

boloid noch in einer zweiten Geraden, welche durch f_1 geht und deren erste Projektion $f_1 h_1$ sich leicht ergiebt. Der Schnittpunkt m_1 der beiden Seitenlinien $c_1 d_1$ und $f_1 h_1$ ist die erste Projektion des Berührungspunktes der Ebene E und des Hyperboloids. Die zweite Projektion m_2 desselben Punktes bestimmt man durch die zweiten Projektionen jener Seitenlinien.

Der Ort der Berührungspunkte aller Ebenen, welche parallel zu der gegebenen Geraden sind, bedeutet auch in diesem Falle die Grenzlinie zwischen dem erleuchteten und dem dunklen Teile des Hyperboloids, wenn das letztere von Lichtstrahlen getroffen wird, welche jener Geraden parallel sind.

VI. Abschnitt.

A. Princip der reciproken Radien.

1) Zwei Punkte einer Ebene, welche in Bezug auf einen derselben Ebene angehörigen Kreis K eine solche Lage haben, dass jeder von ihnen auf der Polare des anderen liegt, heissen **konjugierte** Punkte. Liegen zwei konjugierte Punkte P und P_1 auf derselben durch den Mittelpunkt C gehenden Geraden (Fig. 181), so sollen sie **zugeordnete** Punkte genannt werden. Die Schnittpunkte A und B dieser Geraden mit K, und die Punkte P und P_1 bilden dann eine Gruppe von vier harmonischen Punkten und da C die Mitte zwischen A und B ist, so haben wir noch die Beziehung: $CP \,.\, CP_1 = r^2$, also

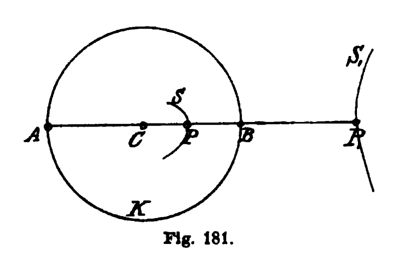


Fig. 181.

$$CP = \frac{r^2}{CP_1} \text{ oder } CP_1 = \frac{r^2}{CP} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wenn r der Halbmesser des Kreises K ist.

Bewegt sich der Punkt P_1 auf irgend einer Kurve S_1 in der Ebene des Kreises K, so durchläuft der zugeordnete Punkt P eine andere Kurve S, deren Gestalt von S_1 abhängig und durch diese völlig bestimmt ist. S und S_1 werden alsdann zugeordnete Kurven hinsichtlich des Kreises K genannt. Jede dieser Kurven betrachtet man als eine Abbildung der anderen und mit Rücksicht auf die Gleichungen (1) nennt man dieses Abbildungsprincip das Princip der reciproken Radien.

2) Wir bestimmen zunächst diejenige Kurve, welche einer beliebigen Geraden g in Bezug auf den Kreis K zugeordnet ist (Fig. 182). Ist P der Pol der Geraden g, so ist CP ⊥ g. Durch P geht ferner die Polare eines jeden Punktes der Geraden g. Um hiernach den Q_1 zugeordneten Punkt zu bestimmen, ziehen wir durch P die Gerade g′ ⊥ zu CQ_1. Ihr Schnittpunkt Q mit CQ_1 ist alsdann der gesuchte Punkt. Da nun Q der Scheitel eines rechten Winkels ist, welcher über CP steht, so ist der Ort des Punktes Q der über CP als Durchmesser gezeichnete Kreis k. Einer beliebigen Geraden g ist somit ein Kreis k zugeordnet, welcher durch den Mittelpunkt C der reciproken Radien geht. Dieser Mittelpunkt ist dem unendlich fernen Punkte der Geraden g zugeordnet.

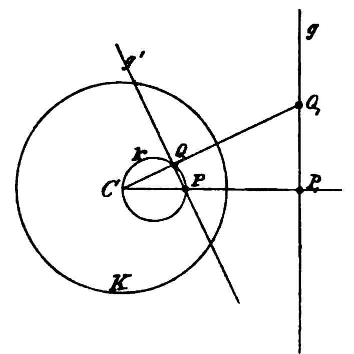


Fig. 182.

Umgekehrt ist jedem durch C gehenden Kreise eine Gerade zugeordnet. Geht die Gerade g durch den Mittelpunkt C, so wird der Durchmesser des zugeordneten Kreises unendlich gross, der Kreis fällt mit g zusammen. Jede durch C gehende Gerade ist sich selbst zugeordnet.

Anmerkung. Bezeichnen wir die Strecke CP_1 mit x, die Halbmesser der Kreise K und k mit R bez. r, die Längen der Tangenten von P_1 an K und k mit T bez. t, so ist:

$$T^2 = x^2 - R^2 \quad \text{und} \quad t^2 = (x - r)^2 - r^2 = x^2 - 2rx.$$

Da nun nach Gl. 1) $CP \cdot CP_1 = R^2$ oder $2rx = R^2$ ist, so sind die für T^2 und t^2 gefundenen Ausdrücke einander gleich, woraus folgt, dass g die Chordele des ihr zugeordneten Kreises und des Kreises K ist. Schneidet demnach die g den Kreis k, so geht der zugeordnete Kreis durch die beiden Schnittpunkte und wenn g den Kreis K berührt, so berührt auch der zugeordnete Kreis den Kreis K in demselben Punkte. Überhaupt ist jeder Punkt im Umfange des Kreises K sich selbst zugeordnet.

3) Sind die durch C gehenden Kreise M und M′ (Fig. 183) den Geraden g bez. g′ hinsichtlich des Kreises K zugeordnet, so ist der Schnittpunkt A von M und M′ dem Schnittpunkte A′ der Geraden g und g′ zugeordnet. Die beiden Tangenten, welche in C die Kreise M und M′ berühren, sind den Geraden g und g′ bez. parallel; M und M′ schneiden sich deshalb in C und folglich auch in A unter einem Winkel, welcher dem von g und g′ gebildeten Winkel gleich ist.

4) Einem von drei Geraden g, g′, g″ (Fig. 184) gebildeten Dreieck A′B′C′ ist das von drei Bögen der entsprechenden Kreise gebildete Dreieck ABC zugeordnet. Nach 3) schneiden sich die Kreise in den Ecken dieses Dreiecks unter denselben Winkeln wie die Geraden g, g′ und g″. Sind demnach die beiden zugeordneten Dreiecke unendlich klein, so kann man

die Bögen A B, A C, B C als gerade Linien ansehen und die zugeordneten Dreiecke ABC und A′B′C′ sind wegen der Gleichheit der Winkel einander ähnlich. Hieraus ergiebt sich der folgende wichtige Satz:

Zwei einander zugeordnete Figuren F und F′ sind als Abbildungen voneinander zu betrachten, welche die Eigenschaft haben, dass die unendlich

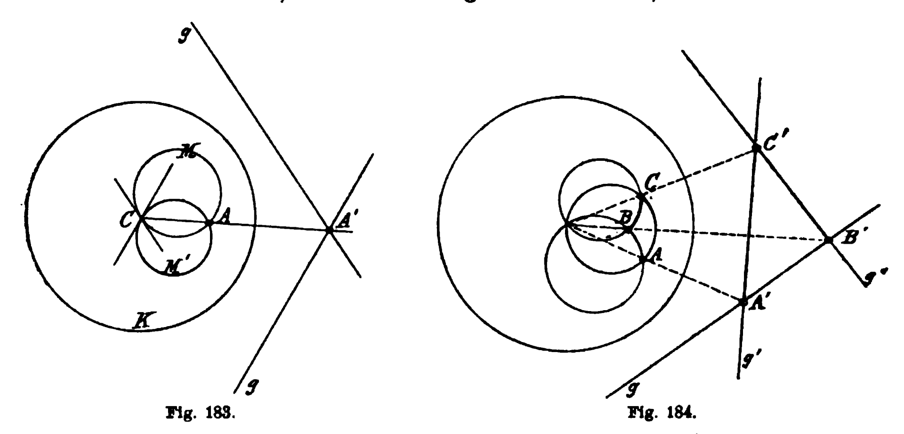


Fig. 183. Fig. 184.

kleinen Teile der einen den zugeordneten Teilen der anderen ähnlich sind. Zwei zugeordnete Kurven treffen sich in ihren Schnittpunkten unter gleichen Winkeln. Alle durch einen Punkt gehenden unendlich kleinen Strecken sind den ihnen zugeordneten Strecken proportioniert.

5) Einem beliebigen Kreise ist wiederum ein Kreis zugeordnet. Denn aus der Ähnlichkeit der unendlich kleinen einander zugeordneten Teile folgt, dass die einem Kreise zugeordnete Kurve wieder eine Kurve von konstanter Krümmung sein muss.

Dieser wichtige Satz kann jedoch auch ohne Rücksicht auf 4) leicht bewiesen werden. Nehmen wir an, es sei k der gegebene Kreis, dessen zugeordnete Figur hinsichtlich des Kreises K bestimmt werden soll (Fig. 185), g sei die Zentrallinie der Kreise K und k, und auf dieser seien M′ und N′ den Punkten M bez. N zugeordnet. Dann ist: $CM . CM' = CN . CN' (= R^2)$, wenn R der Halbmesser von K ist. Eine andere durch den Mittelpunkt C der reciproken Radien gehende Gerade g′ schneide den Kreis k in A und B. Diesen seien die Punkte A′ bez. B′ zugeordnet. Dann ist $CA . CA' = CB . CB' = R^2$.

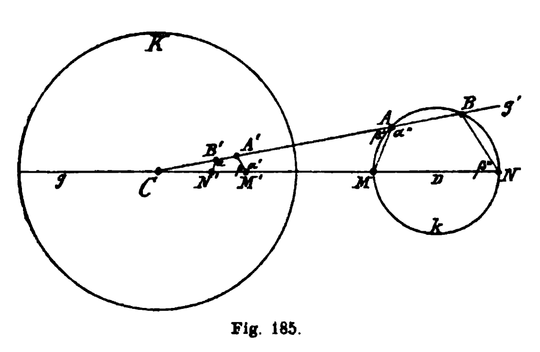


Fig. 185.

Hieraus folgt nun: $CA \,.\, CA' = CM \,.\, CM'$

$$CB \,.\, CB' = CM \,.\, CM' = CN \,.\, CN'.$$

Nach dem bekannten Sekantensatz der Planimetrie ergiebt sich hieraus, dass $AA'M'M$ und $BB'N'N$ Kreisvierecke sind. Folglich ist $\angle\alpha + \angle\beta'' = 2R$; $\angle\alpha'' + \angle\beta'' = 2R$, folglich $\angle\alpha = \angle\alpha''$ und folglich $B'N' \parallel AM$. Ebenso leicht ergiebt sich, dass $\angle\beta = \angle\beta''$, folglich auch $BN \parallel A'M'$ ist. Hiernach beträgt die Summe der Winkel α und β ebenfalls $2R$, also liegen die Punkte A', B', M', N' auf einem Kreise. Das Gleiche kann für beliebige andere Paare zugeordneter Punkte nachgewiesen werden.

Die von C an k gezogenen Tangenten haben jede nur einen Punkt mit k gemeinschaftlich. Folglich kann auch nur je ein Punkt des zugeordneten Kreises auf jeder derselben liegen, d. h. jene Tangenten berühren auch den zugeordneten Kreis. Der Mittelpunkt der reciproken Radien ist demnach der äussere Ähnlichkeitspunkt von je zwei einander zugeordneten Kreisen.

5) Sind k_1 und k_2 (Fig. 186) zwei beliebige Kreise und k_1' bez. k_2' die denselben in Bezug auf den Kreis K zugeordneten Kreise, dann ist der Centrallinie g von k_1 und k_2 der durch den Mittelpunkt C der reciproken Radien gehende Kreis k zugeordnet. Da g die Kreise k_1 und k_2 rechtwinklig schneidet, so muss dasselbe mit k in Bezug auf k_1' und k_2' der Fall sein.

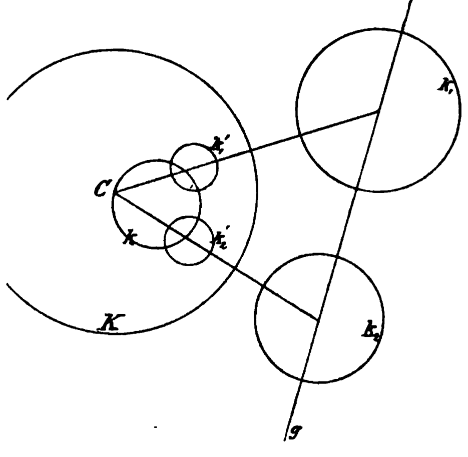


Fig. 186.

Wenn demnach 3 Kreise k_1, k_2 und k_3 gegeben sind und man nimmt den Mittelpunkt der reciproken Radien auf dem Umfang desjenigen Kreises k an, welcher die 3 gegebenen Kreise rechtwinklig durchschneidet (Orthogonalkreis), so werden die letzteren in drei andere Kreise verwandelt, welche von der dem Kreise k zugeordneten Geraden g rechtwinklig durchschnitten werden. Dies ist jedoch nur möglich, wenn g durch die Mittelpunkte der drei zugeordneten Kreise geht.

Man löse hiernach die Aufgabe: Drei gegebene Kreise mittelst reciproker Radien in drei andere Kreise zu verwandeln, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen.

6) Mittelpunkt und Halbmesser desjenigen Kreises zu finden, in Bezug auf welchen zwei gegebene Kreise einander zugeordnet sind.

7) Die den Kegelschnitten zugeordneten Kurven zu finden, wenn der Mittelpunkt der reciproken Radien in einem Brennpunkte liegt.

α) Der Kegelschnitt sei eine Parabel (Fig. 187); k sei der um den Brennpunkt F gezeichnete Kreis, in Bezug auf welchen die der Parabel zugeordnete Kurve konstruiert werden soll. FS sei die Achse, TU die Tangente, welche die Parabel in ihrem Scheitel S berührt. Schneidet die Tangente den Kreis k in T und U, so geht durch diese beiden Punkte und durch F der Kreis k_1, welcher der Tangente TU zugeordnet ist. Die Achse der Parabel trifft k_1 in dem S zugeordneten Punkte S′. Es sei nun T′U′ irgend eine andere Tangente der Parabel, Q ihr Schnittpunkt mit der Scheiteltangente, dann ist QF ⊥ T′U′ (s. IV, 28, I. Teil). Verlängern wir QF, bis sie k_1 in Q′ schneidet, dann ist Q′ der dem Q zugeordnete Punkt. Folglich ist F Q′ der Durchmesser des Kreises k_2, welcher der Tangente T′U′ zugeordnet ist. Die letztere berührt die Parabel in N, (wenn NQ = QL ist); ziehen wir demnach den Strahl von F durch N, so schneidet derselbe den Kreis k_2 in dem Punkte N′, welcher dem Punkte N der Parabel zugeordnet ist.

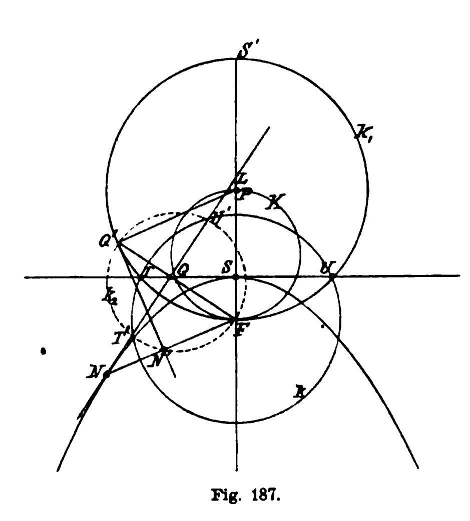
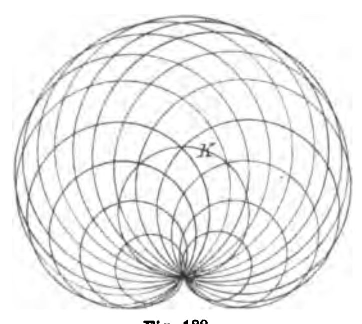
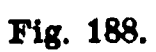
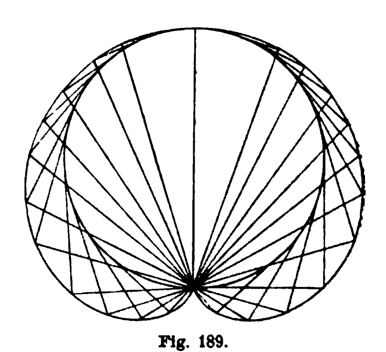


Fig. 187.



Fig. 188.


Fig. 189.

Wir können auf diese Weise beliebig viele Punkte der gesuchten Kurve konstruieren. Für die zeichnerische Darstellung ergiebt sich hiernach die Kurve leicht als Einhüllende aller jener Kreise, welche den Tangenten der Parabel zugeordnet sind. Für diese Kreise lässt sich jedoch ein noch einfacheres Bildungsgesetz angeben. Man erkennt aus der oben angegebenen

Konstruktion leicht, dass jede von F ausgehende Sehne z. B. FQ' des Kreises k_1 ein Durchmesser eines solchen Kreises ist. Die Mittelpunkte aller der Kreise liegen deshalb wieder auf einem Kreise K, dessen Durchmesser $PF = \frac{1}{2} FS'$ ist. Hiernach ist die der Parabel zugeordnete Kurve die Einhüllende aller Kreise, welche durch F gehen und deren Mittelpunkte auf K liegen. Auf diese Weise ist die Kurve in Fig. 188 dargestellt.

Wir können aber auch eine einfache Konstruktion einzelner Punkte finden. Ziehen wir nämlich N'Q', so ist FN'Q' als ein auf dem Durchmesser FQ' stehender Peripheriewinkel in dem Kreise k_2 ein rechter Winkel. Ferner ist noch $\angle NFQ = \angle QFS = \angle PQ'F$ (IV, 28, I. Teil), folglich $PQ' \parallel FN'$. Hiernach steht auch $N'Q' \perp PQ'$, folglich ist N'Q' eine Tangente des Kreises k_1 und FN' das von F auf jene Tangente gefällte Lot.

Die der gegebenen Parabel zugeordnete Kurve, welche Kardioide gegenannt wird, ist der Ort der Fusspunkte aller von F auf die Tangenten des Kreises k_1 gefällten Lote, Fig. 189 (s. d. Verf. Analyt. Geometrie der Ebene VII B, 15; VIII A, 5 u. B, 5).

8) Soll die einer Ellipse zugeordnete Kurve gefunden werden, so zeichnen wir um die grosse Achse als Durchmesser den Hauptkreis (Fig. 190).

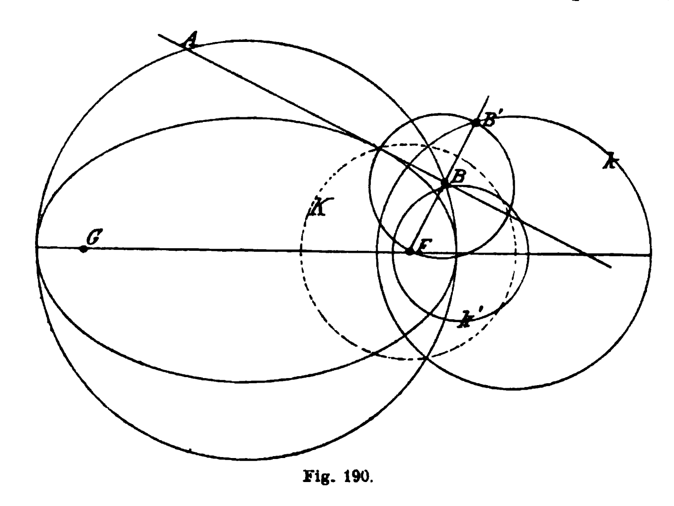


Fig. 190.

Um den Brennpunkt F als Mittelpunkt reciproker Radien sei der Kreis K gezeichnet; in Bezug auf letzteren sei k der dem Hauptkreis zugeordnete Kreis. AB sei eine beliebige Tangente, welche K in A und B schneidet. Dann ist (nach IV, 26 im I. Teil d. W.) $BF \perp AB$. Der Strahl FB trifft k in dem Punkte B', welcher B zugeordnet ist. Hieraus ergiebt sich aber, dass der um FB' als Durchmesser gezeichnete Kreis der Tangente AB zugeordnet ist. Jede von F an den Umfang des Kreises k gezogene Gerade ist hiernach Durchmesser eines Kreises, welcher einer Tangente der Ellipse

zugeordnet ist. Alle derartigen Kreise hüllen die der Ellipse zugeordnete Kurve ein. Der Ort der Mittelpunkte dieser Kreise ist wieder ein Kreis k′; für den letzteren und k ist F ein Ähnlichkeitspunkt. Hiernach können wir die gesuchte Kurve auch auffassen als die Einhüllende aller Kreise, deren Mittelpunkte auf einem gegebenen Kreise k′ liegen und deren Umfänge durch einen festen innerhalb k′ liegenden F Punkt gehen.

Man zeige auch, dass die der Ellipse zugeordnete Kurve der Ort der Fusspunkte aller Senkrechten ist, welche man von F aus auf alle Tangenten des Kreises k fällen kann. — In Fig. 191 ist die Kurve als Einhüllende der vorhin erwähnten Kreise und in Fig. 192 als Ort jener Fusspunkte dargestellt.

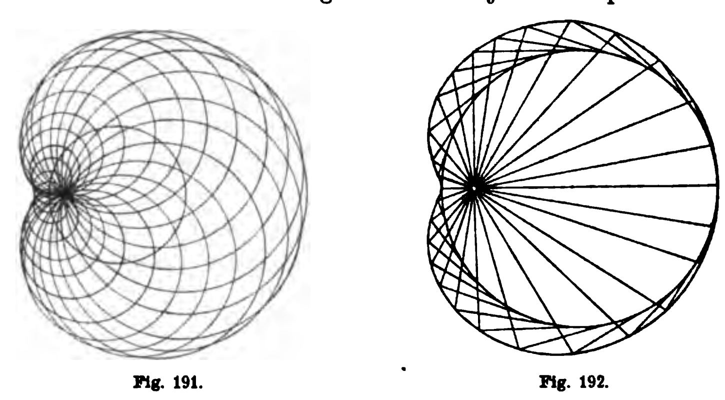


Fig. 191. Fig. 192.

9) Die Kurve, welche einer Hyperbel in Bezug auf einen Brennpunkt als Mittelpunkt reciproker Radien zugeordnet ist (Fig. 193), ergiebt sich in gleicher Weise als Einhüllende aller Kreise, deren Mittelpunkte auf einem festen Kreise k liegen und deren Umfänge durch einen ausserhalb k liegenden festen Punkt gehen (siehe Fig. 194). Oder auch als Ort der Fusspunkte der Lote, welche von einem ausserhalb eines Kreises gegebenen Punkte auf alle Tangenten dieses Kreises gefällt werden können (s. Fig. 195).

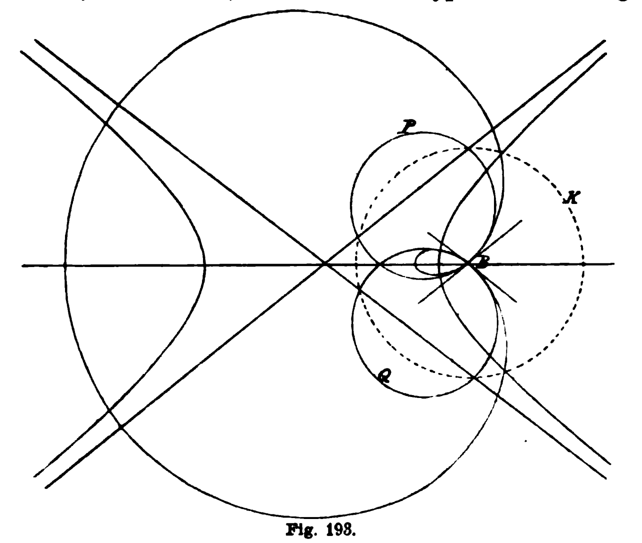


Fig. 193.

10) Wir betrachten noch die Kurve, welche einem Kegelschnitt in Bezug auf dessen Mittelpunkt als Mittelpunkt reciproker Radien zugeordnet ist.

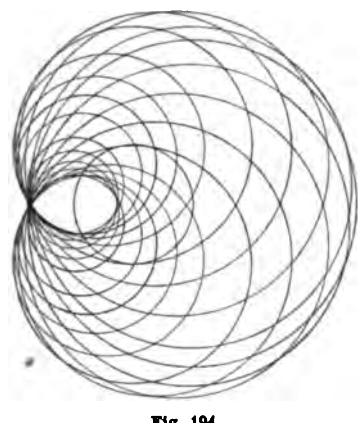




Fig. 194.

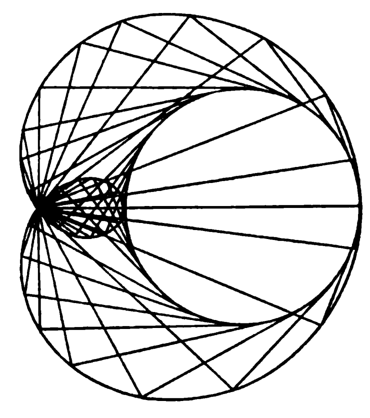


Fig. 195.

Hierbei können natürlich nur Ellipse und Hyperbel in Betracht kommen. Wir nehmen für beide den Hauptkreis als denjenigen an, in Bezug auf welchen die der Ellipse bez. Hyperbel zugeordnete Kurve gefunden werden soll (Fig. 196 und 197).

Wir zeichnen einen beliebigen Kreis P (Fig. 196), welcher durch den Mittelpunkt C der reciproken Radien geht und den Hauptkreis des Kegelschnittes in m und n schneidet; die durch m und n gehende Sekante ist dann dem Kreise P zugeordnet. Schneidet nun P den gezeichnet gegebenen Kegelschnitt in F und G, dann liegen die zugeordneten Punkte f und g auf mn. Trifft dagegen mn den Kegelschnitt in D und E, so liegen die zugeordneten Punkte d und e auf P. Hiernach lassen sich so viele Punkte der zugeordneten Kurve bestimmen, dass dieselbe durch Zeichnung dargestellt werden kann.

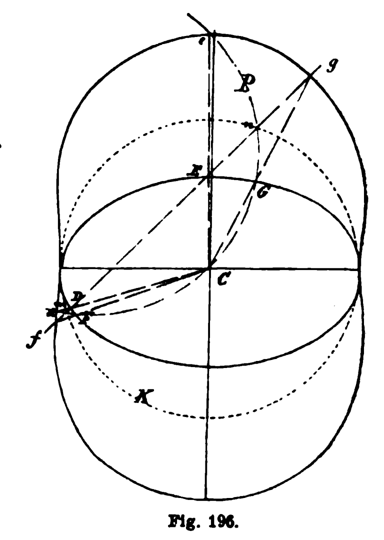


Fig. 196.

Die der Hyperbel zugeordnete Kurve geht durch C. Dieser Punkt ist den unendlich fernen Punkten der Hyperbel zugeordnet. Die Kurve (Lemniskate) erhält eine schleifenartige Gestalt; die Asymptoten der Hyperbel berühren die Kurve in C. (S. hierüber des Verf. Analytische Geometrie Abschn. VIII A, 6).

11) Der Mittelpunkt M eines Kreises vom Halbmesser r (Fig. 198) ist

um die Strecke k vom Mittelpunkt C der reciproken Radien entfernt. Um C ist ein Kreis vom Halbmesser a gezeichnet. Wie gross ist in Bezug auf diesen der Halbmesser des dem ersteren zugeordneten Kreises?

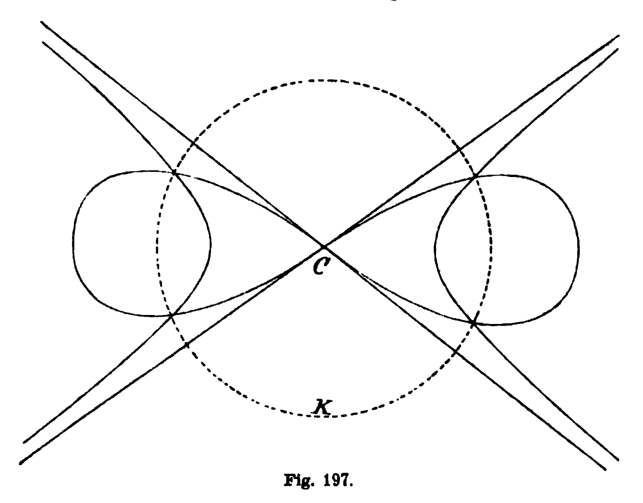


Fig. 197.

Aufl. Die Abstände der beiden auf der Centrale CM liegenden Punkte A und B von C sind $k + r$ bez. $k - r$; folglich erhalten wir für die Entfernungen der ihnen zugeordneten Punkte A′ und B′ von C (s. 1) die Werte: $\frac{a^2}{k+r}$ bez. $\frac{a^2}{k-r}$. Der Unterschied dieser beiden Entfernungen, nämlich

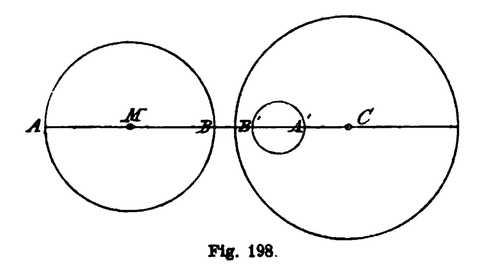


Fig. 198.

$$A'B' = \frac{a^2}{k-r} - \frac{a^2}{k+r} = \frac{2a^2 r}{k^2 - r^2}$$

ist der Durchmesser des zugeordneten Kreises, folglich hat der Halbmesser desselben die Grösse: $\frac{a^2 r}{k^2 - r^2}$.

12) Zwei Kreise haben die Halbmesser r_1 und r_2 (Fig. 199). Die Entfernung ihrer Mittelpunkte A und B ist e. Welche Lage muss der Mittelpunkt reciproker Radien haben, wenn die den ersteren zugeordneten Kreise gleich gross sein sollen?

Aufl. Es sei C der gesuchte Mittelpunkt, seine Entfernungen von A und B gleich k_1 bez. k_2, a der Halbmesser des um C beschriebenen Kreises, dann sind in Bezug auf diesen die Halbmesser der den gegebenen zugeordneten Kreise nach 11):

$$\frac{a^2 r_1}{k_1^2 - r_1^2} \quad \text{und} \quad \frac{a^2 r_2}{k^2 - r_2^2}.$$

Sollen diese einander gleich sein, so ergiebt sich für k_1 und k_2 die Bedingungsgleichung:

$$\frac{a^2 r_1}{k_1^2 - r_1^2} = \frac{a^2 r_2}{k_2^2 - r_2^2},$$

woraus durch leichte Umformung folgt:

$$\frac{k_1^2 r_2 - k_2^2 r_1}{r_1 - r_2} = r_1 r_2 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

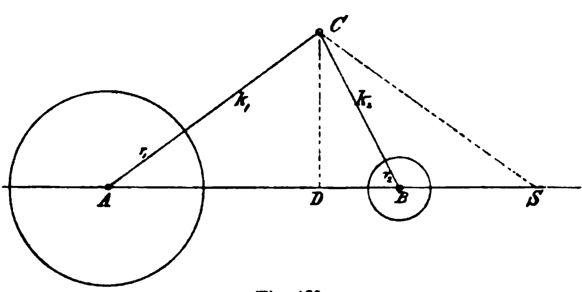


Fig. 199.

Hieraus geht hervor, dass der Halbmesser a des Kreises, in Bezug auf welchen die den gegebenen zugeordneten Kreise bestimmt werden sollen, nicht in Betracht kommt. Da ferner die beiden Abstände des Punktes C von A und B nur an die Bedingung (1) geknüpft sind, so bleiben dieselben noch unbestimmt, d. h. es ist der Ort des Punktes C zu ermitteln.

Eine leichte Rechnung wird uns nun zeigen, dass C von dem äusseren Ähnlichkeitspunkte S der gegebenen Kreise einen unveränderlichen Abstand hat. Bezeichnen wir den Abstand des Punktes S von B mit p, so haben wir:

$$e + p : p = r_1 : r_2$$

woraus folgt: $$p = \frac{e r_2}{r_1 - r_2} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Wir ziehen CD senkrecht zu AB und bezeichnen BD mit x, dann ist nach einem bekannten Satze der Planimetrie:

$$k_1^2 = R^2 + (p + e)^2 - 2(p + e)(p + x)$$
$$k_2^2 = R^2 + p^2 - 2p(p + x),$$

wenn $CS = R$ gesetzt wird. Durch Elimination von $(p + x)$ folgt hieraus:

$$k_1^2 p - k_2^2 (p + e) = pe(p + e) - R^2 e,$$

oder wenn wir links für p den Wert aus 2) einführen:

$$\frac{k_1^2 r_2 - k_2^2 r_1}{r_1 - r_2} = p(p + e) - R^2.$$

Die linke Seite dieser Gleichung können wir nach 1) durch das Produkt $r_1 r_2$ ersetzen, dann erhalten wir:

$$R^2 = p(p + e) - r_1 r_2 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Hieraus folgt, dass R stets denselben Wert hat, welches auch die Einzel-

werte von k_1 und k_2 sein mögen; folglich ist der Ort des Punktes C ein Kreis, dessen Mittelpunkt der äussere Ähnlichkeitspunkt S ist. Der Halbmesser R kann nach Formel (3) leicht konstruiert werden (Fig. 200). S sei der äussere Ähnlichkeitspunkt der beiden gegebenen Kreise A und B. Um

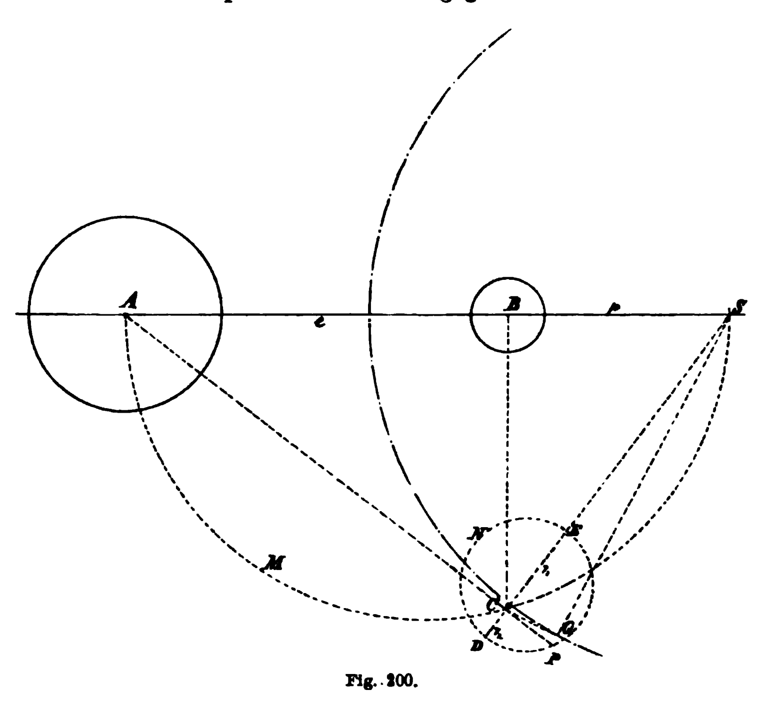


Fig. 200.

AS als Durchmesser zeichne man den Kreis M, errichte in B das Lot BC zu AS und ziehe CS, dann ist $CS^2 = p(p+e)$. Ferner verlängere man CS und mache $CE = r_1$, $CD = r_2$ und zeichne um DE als Durchmesser den Kreis N. Verlängert man AC bis P, so ist $CP^2 = r_1 r_2$. Um C zeichne man mit dem Halbmesser CP einen Kreis und ziehe von S aus die Tangente SQ an denselben, dann ist in dem bei Q rechtwinkligen Dreieck CSQ:

$$SQ^2 = CS^2 - CQ^2 = CS^2 - CP^2 = p(p+e) - r_1 r_2.$$

Folglich ist SQ der gesuchte Halbmesser.

13) Es sind drei Kreise K_1, K_2 und K_3 gegeben. Man soll den Mittelpunkt der reciproken Radien so bestimmen, dass die K_1, K_2 und K_3 zugeordneten Kreise gleich gross werden.

Leicht nach 12) zu lösen.

14) Einen Kreis zu konstruieren, welche drei gegebene Kreise K_1, K_2 und K_3 berührt. Diese bekannte Aufgabe lässt sich mit Hülfe des Princips reciproker Radien lösen. Man verwandelt die drei gegebenen Kreise in drei gleich grosse Kreise. Konstruiert man nun denjenigen Kreis, welcher durch

die Mittelpunkte der letzteren geht, so ist derselbe konzentrisch mit denjenigen Kreisen, welche diese von aussen oder innen berühren. Die zugeordneten Kreise dieser Berührungskreise werden nun K_1, K_2 und K_3 berühren. Ebenso leicht sind die übrigen noch möglichen Kreise zu finden.

15) Es seien K_1 und K_2 zwei sich von innen berührende Kreise (Fig. 201). Man soll in die von den beiden Umfängen begrenzte Sichel Kreise zeichnen, von denen jeder den folgenden Kreis und ausserdem K_1 und K_2 berührt.

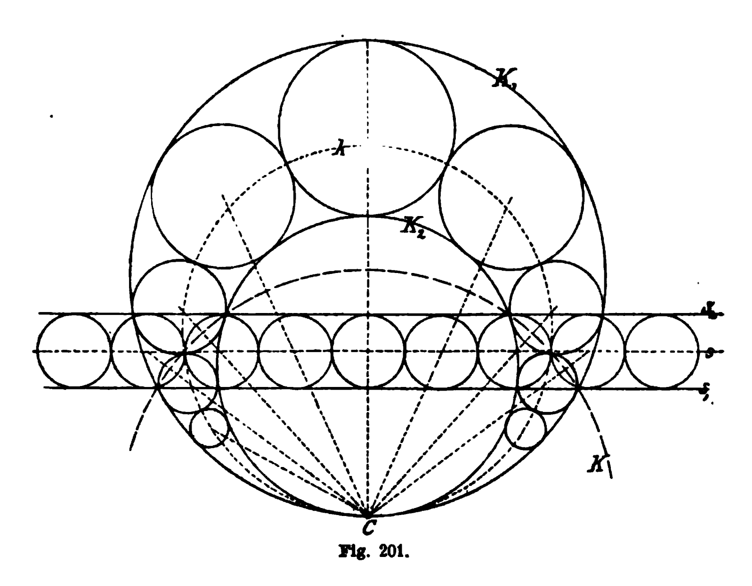


Fig. 201.

Aufl. Wir nehmen den Berührungspunkt C zum Mittelpunkt reciproker Radien und zeichnen um C den Kreis K mit beliebigem Halbmesser. Den Kreisen K_1 und K_2 sind in Bezug auf K die Sekanten s_1 und s_2 zugeordnet und der Kreissichel entspricht demnach der unendliche Streifen zwischen s_1 und s_2. In den letzteren lassen sich unzählig viele gleiche Kreise zeichnen, von denen jeder den folgenden und ausserdem s_1 und s_2 berührt. Diesen Kreisen sind nun die gesuchten Kreise zugeordnet, welche hiernach leicht konstruiert werden können.

16) In einen konzentrischen Kreisring lassen sich gleich grosse Berührungskreise hineinlegen, von denen jeder den folgenden berührt. Wenn in der Reihe dieser Kreise der letzte den ersten wieder berührt, so heisst dieselbe eine geschlossene Kreisreihe. Die Reihe der Berührungskreise schliesst sich in diesm Falle immer, auch bei beliebiger Lage des ersten Kreises.

Durch reciproke Radien wird nun eine derartige Figur in einen nicht konzentrischen Kreisring verwandelt. Die zugeordneten Berührungskreise werden ungleich; ihre Reihe schliesst sich, wenn dies mit der Reihe der

Berührungskreise im konzentrischen Ringe der Fall ist, und dann auch bei jeder Lage des ersten Kreises.

In Fig. 202 ist ein konzentrischer Ring mit einer geschlossenen Reihe von 6 Berührungskreisen und die zugeordnete Figur in Bezug auf C als Mittelpunkt reciproker Radien und den Kreis K dargestellt.

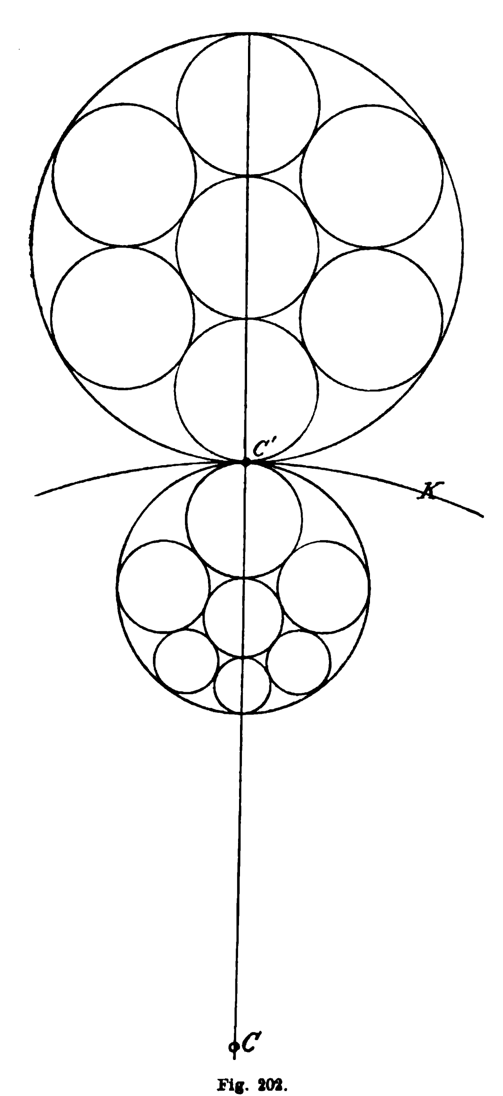


Fig. 202.

Man zeichne auch die dem konzentrischen Ringe und den Berührungskreisen zugeordnete Figur, wenn der Mittelpunkt der reciproken Radien auf dem Umfange des äusseren Kreises etwa in C′ liegt.

17) Zwei gegebene Kreise K_1 und K_2 in zwei konzentrische Kreise zu verwandeln (Fig. 203).

Aufl. Diese Aufgabe ist nur lösbar, wenn die gegebenen Kreise K_1 und K_2 sich nicht schneiden. Es sei P der Punkt, in welchem die Chordale c von K_1 und K_2 die Centrallinie der letzteren trifft. Um P zeichnen wir den Orthogonalkreis K′; dieser schneidet die Centrallinie in den Punkten G_1 und G_2. Alle Kreise, welche durch G_1 und G_2 gehen, schneiden K_1 und K_2 rechtwinklig. Nehmen wir deshalb einen der Punkte z. B. G_1 als Mittelpunkt reciproker Radien an, so werden alle durch diesen Punkt gehenden Kreise in gerade Linien verwandelt, welche die K_1 und K_2 zugeordneten Kreise rechtwinklig schneiden. Dies ist jedoch nur möglich, wenn jene Kreise konzentrisch sind.

18) Man löse hiernach die Aufgabe: In einen nicht konzentrischen Kreisring Kreise zu legen, welche die beiden gegebenen berühren, und von denen jeder den folgenden Kreis berührt.

19) Drei Kreise K_1, K_2, K_3 gehen durch einen Punkt A. Man soll einen andern Kreis zeichnen, welcher die gegebenen Kreise berührt (Fig. 204).

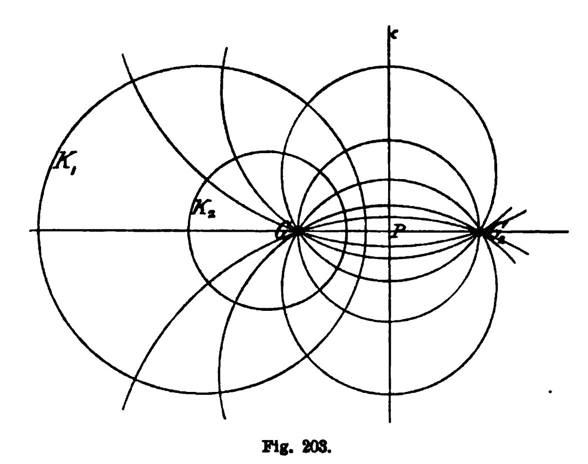


Fig. 203.

Aufl. Um A als Mittelpunkt zeichnen wir einen beliebigen Kreis K, welcher die Kreise K_1, K_2 und K_3 schneidet. Dann sind den letzteren in Bezug auf K die Sekanten s_1, s_2 und s_3 bezüglich zugeordnet. Wir kon-

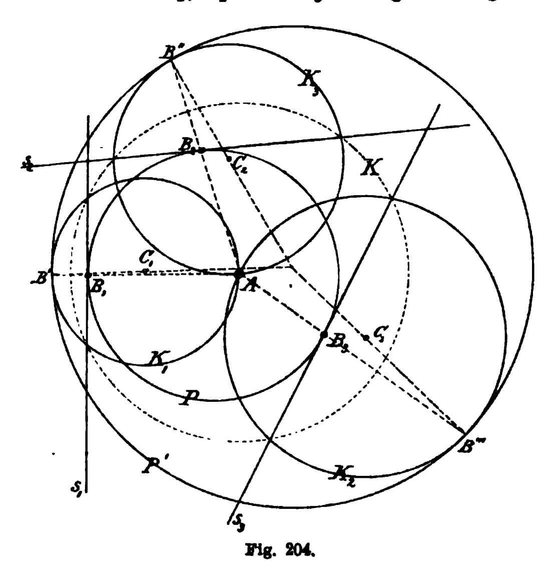


Fig. 204.

struieren den Kreis P, welcher s_1, s_2 und s_3 berührt, ziehen von A aus durch die Berührungspunkte $B_1 B_2$ und B_3 die Geraden AB', AB'' und AB'''. Die Punkte B', B'' und B''' sind nun die Punkte, in welchen der P zugeordnete Kreis P' die drei gegebenen Kreise berührt. Den Mittelpunkt C findet man als Schnittpunkt der Geraden $B'C_1$, $B''C_2$, $B'''C_3$.

Die übrigen drei noch möglichen Kreise sind denjenigen Kreisen zugeordnet, welche dem aus s_1, s_2 und s_3 gebildeten Dreieck anbeschrieben sind. Man konstruiert dieselben in gleicher Weise.

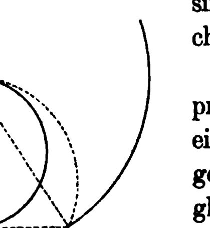


Fig. 205.

20) Den Ort des Mittelpunktes reciproker Radien zu finden, für welchen die einem gegebenen Kreise K und einer gegebenen Geraden g zugeordneten Kreise gleich gross werden (Fig. 205).

Aufl. Zieht man durch den Mittelpunkt C des Kreises K die Gerade CD senkrecht zu g und trifft dieselbe den Kreis in E, so ist der gesuchte Ort ein Kreis K' um E als Mittelpunkt, dessen Halbmesser $= \sqrt{2r(r+h)}$ ist, wenn r den Halbmesser des Kreises K und h den Abstand CD bedeutet.

21) Den Mittelpunkt reciproker Radien so zu bestimmen, dass die einem gegebenen Kreise und zwei gegebenen Geraden zugeordneten Kreise gleich gross werden.

Princip der reciproken Radien für den Raum.

22) Sind K und k zwei in Bezug auf einen Kreis P einander zugeordnete Kreise, so beschreiben diese bei einer Drehung um ihre gemeinschaftliche Centrallinie drei Kugelflächen K', k' und P'. Jede durch den Mittelpunkt C der Kugelfläche P' gehende Gerade schneidet K' und k' in zwei Paaren einander zugeordneter Punkte. Geht der Kreis K durch C, so ist demselben eine Gerade g zugeordnet, welche bei der Drehung um die Centrallinie eine Ebene beschreibt. Hieraus folgt: Einer beliebigen Kugelfläche K ist immer eine Kugelfläche K' und wenn K durch den Mittelpunkt der reciproken Radien geht, eine Ebene zugeordnet. Umgekehrt ist jeder Ebene eine Kugelfläche zugeordnet.

Aus 3) d. Abschn. folgt leicht, dass zwei Ebenen sich unter demselben Winkel schneiden, wie die ihnen zugeordneten Kugelflächen. Einem von vier Ebenen gebildeten unendlich kleinen Tetraeder ist ein von vier Kugelflächen eingeschlossenes ebenfalls unendlich kleines Tetraeder zugeordnet, welches dem ersteren ähnlich ist. Da auch die zugeordneten Seitenflächen der Tetraeder ähnlich sind, so folgt:

Durch reciproke Radien werden zwei einander zugeordnete Flächen derart aufeinander abgebildet, dass ihre kleinsten Teile bez. ähnlich sind. Zwei auf der einen Fläche liegende Kurven schneiden sich unter demselben Winkel wie die ihnen zugeordneten Kurven der anderen Fläche.

Einer beliebig im Raume liegenden Kreislinie k ist wieder eine Kreislinie zugeordnet, welche sich in eine Gerade verwandelt, wenn k durch den Mittelpunkt der reciproken Radien geht. Denn zwei Kugelflächen, welche man durch k legt, sind wieder zwei Kugelflächen zugeordnet, deren Durchschnitt die k zugeordnete Kreislinie ist.

Jede durch den Mittelpunkt der reciproken Radien gehende Ebene ist sich selbst zugeordnet.

23) Drei gegebene Kugelflächen K_1, K_2, K_3 in drei andere zu verwandeln, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen.

Anl. zur Aufl. Wir legen durch die drei Mittelpunkte der gegebenen Kugeln eine Ebene E. Diese schneidet K_1, K_2 und K_3 in drei grössten Kreisen. Nach 5) bestimmen wir den Mittelpunkt der reciproken Radien so, dass die Mittelpunkte der zugeordneten Kreise in einer Geraden liegen.

24) Zwei gegebene Kugeln in zwei konzentrische Kugeln zu verwandeln.

Nach 17) auszuführen.

25) Mittelpunkt und Halbmesser derjenigen Kugel zu finden, in Bezug auf welche zwei gegebene Kugeln einander zugeordnet sind.

26) Zwei gegebene Kugelflächen K_1 und K_2 in zwei gleich grosse Kugelflächen zu verwandeln.

Aufl. Durch die Mittelpunkte C_1 und C_2 der beiden Kugeln legen wir eine Ebene E, welche K_1 und K_2 in zwei grössten Kreisen k_1 und k_2 schneidet. S sei der äussere Ähnlichkeitspunkt der letzteren. Um S werde in E derjenige Kreis k' gezeichnet, welcher nach 12) d. Abschn. der geometrische Ort des Mittelpunktes reciproker Radien ist, in Bezug auf welchen die k_1 und k_2 zugeordneten Kreise gleich gross werden. Drehen wir k_1, k_2 und k' um die Centrallinie C_1C_2, so beschreiben k_1 und k_2 die Kugelflächen K_1 und K_2 und k' eine neue Kugelfläche K'. Die letztere ist der Ort des Mittelpunktes reciproker Radien, in Bezug auf welche nun die K_1 und K_2 zugeordneten Kugelflächen gleich gross werden.

27) Den Ort des Mittelpunktes reciproker Radien so zu bestimmen, dass die drei gegebenen Kugelflächen K_1, K_2 und K_3 zugeordneten Kugelflächen gleich gross werden (Fig. 206).

Aufl. Die Ebene, welche durch die Mittelpunkte C_1, C_2 und C_3 der gegebenen Kugeln geht, nehmen wir als Projektionsebene an. S_1 sei der äussere Ähnlichkeitspunkt der Kugeln K_1 und K_2, ebenso S_2 derjenige der Kugeln K_1 und K_3. Der Kreis K' sei die Projektion derjenigen Kugelfläche, auf welcher der Mittelpunkt reciproker Radien liegen muss, wenn die K_1 und K_2 zugeordneten Kugeln gleich gross sein sollen. Für K_1 und K_3 sei der Kreis K'' die Projektion der Kugelfläche von der gleichen Eigenschaft. Der Durchschnittskreis von K' und K'', dessen Projektion die gemeinschaftliche Sehne AB ist, stellt dann den Ort des Mittelpunktes reciproker Radien dar,

in Bezug auf welchen die den Kugeln K_1, K_2 und K_3 zugeordneten Kugeln gleich gross werden.

28) Den Mittelpunkt der reciproken Radien so zu bestimmen, dass diejenigen Kugelflächen, welche vier gegebenen Kugeln zugeordnet sind, gleich gross werden.

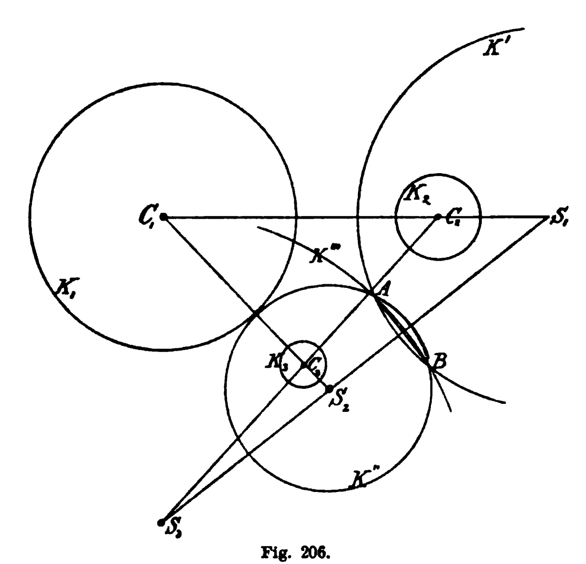


Fig. 206.

Leicht nach 27).

29) Es sind vier Kugelflächen gegeben; man soll die Mittelpunkte derjenigen Kugelflächen finden, welche die gegebenen Kugelflächen sämtlich von aussen oder von innen berühren.

Anl. zur Aufl. Wir bestimmen den Mittelpunkt reciproker Radien so, dass die K_1, K_2, K_3 und K_4 zugeordneten Kugelflächen K', K'', K''' und K'''' gleich gross werden. Diejenige Kugelfläche, welche durch die Mittelpunkte der letzteren geht, ist konzentrisch mit den beiden Kugelflächen Q und Q', welche $K' K'' K''' K''''$ berühren und diese sämtlich einschliessen oder sämtlich ausschliessen. Die Q und Q' zugeordneten Kugelflächen sind die gesuchten; man kann nach diesen Andeutungen dieselben leicht durch ihre Projektionen darstellen.

Gehen $K_1 K_2 K_3 K_4$ durch einen Punkt C, so nehmen wir diesen als Mittelpunkt reciproker Radien an, dann sind den 4 gegebenen Kugelflächen 4 Ebenen bez. zugeordnet. Die gesuchte Kugelfläche ist nun derjenigen Kugelfläche zugeordnet, welche dem von jenen 4 Ebenen eingeschlossenen Tetraeder einbeschrieben werden kann. Auch die übrigen noch möglichen Kugelflächen sind auf diese Weise leicht zu bestimmen.

Abbildung einer Kugelfläche auf einer Ebene.

30) Nach 22) ist einer Kugelfläche K eine Ebene E zugeordnet, wenn der Mittelpunkt m der reciproken Radien auf K liegt.

Einer Kreislinie der Kugelfläche K, deren Ebene durch m geht, ist eine in E liegende Gerade und jeder anderen Kreislinie eine Kreislinie der Ebene E zugeordnet. Da jedes Paar zugeordneter Punkte von K und E auf dem-

selben Strahle liegt, so ist die K zugeordnete Figur eine Projektion von K auf E und zwar eine Centralprojektion.

Man benutzt diese Projektion zur Abbildung der Oberfläche der Erdkugel. Wir betrachten zu diesem Zwecke nur die Darstellung des Gradnetzes (Meridiane und Parallelkreise). Liegt das Projektionscentrum m auf dem Äquator, so heisst die Abbildung auf E eine stereographische Äquatorealprojektion. Von dieser ist in Fig. 207 derjenige Teil dargestellt, welcher der der Ebene E zugewendeten Hälfte der Kugeloberfläche entspricht. Die Projektionen der Parallelkreise und Meridiane bilden zwei Scharen sich rechtwinklig durchschneidender Kreise. Der Äquator erscheint in der Abbildung als die Gerade AA_1, welche zugleich die gemeinschaftliche Chordale für die Projektionen der Parallelkreise ist. Die beiden Pole N und S bilden die

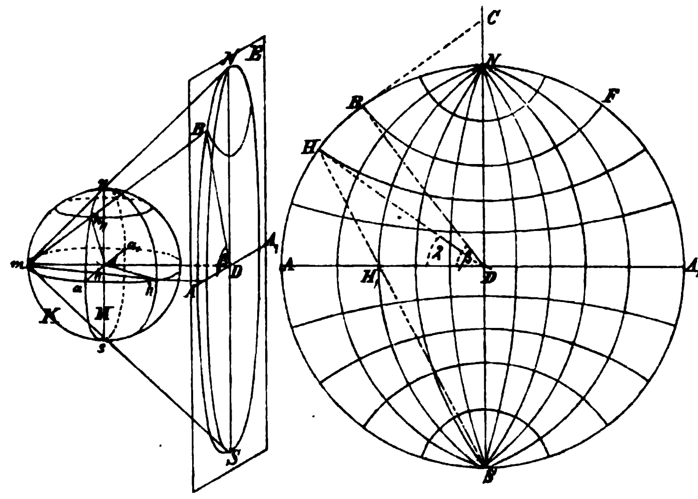


Fig. 207.

Grenzpunkte dieser Schar. Um die Projektion eines Parallelkreises, dessen geographische Breite β ist, zu finden, machen wir $\angle ADB = \beta$ und ziehen in B die Tangente BC. Diese trifft den zum Äquator senkrechten Durchmesser NS in C. Um C zeichnen wir mit dem Halbmesser BC den Kreisbogen BF; derselbe schneidet den Kreis $SANA_1S$ rechtwinklig und ist deshalb die Abbildung des Parallelkreises der geographischen Breise β.

Um die Abbildung eines Meridians von der geographischen Länge λ zu bestimmen, machen wir den Winkel $ADH = \lambda$ und ziehen HS. Die letztere trifft AA_1 in H_1; der gesuchte Meridian ist nun die Kreislinie, welche durch die drei Punkte N, H und S geht. Den Beweis dieser Konstruktion können wir dem Studierenden überlassen. Hieraus ergiebt sich nun leicht die Bestimmung der Abbildung eines Punktes der Erdoberfläche, dessen geographische Länge und Breite gegeben ist.

Man konstruiere die stereographische Polarprojektion des Gradnetzes der Erdkugel, welche man erhält, wenn der Mittelpunkt der reciproken Radien (Projektionscentrum) in einem der Pole angenommen wird.

31) Der Mittelpunkt der reciproken Radien liege beliebig auf der Kugelfläche zwischen dem Pole und dem Äquator. (Stereographische Horizontalprojektion, Fig. 208.)

Aufl. Wie im vorigen Falle erhalten wir als Abbildungen der Meridiane eine Schar von Kreisen, welche durch zwei feste Punkte (Abbildungen der

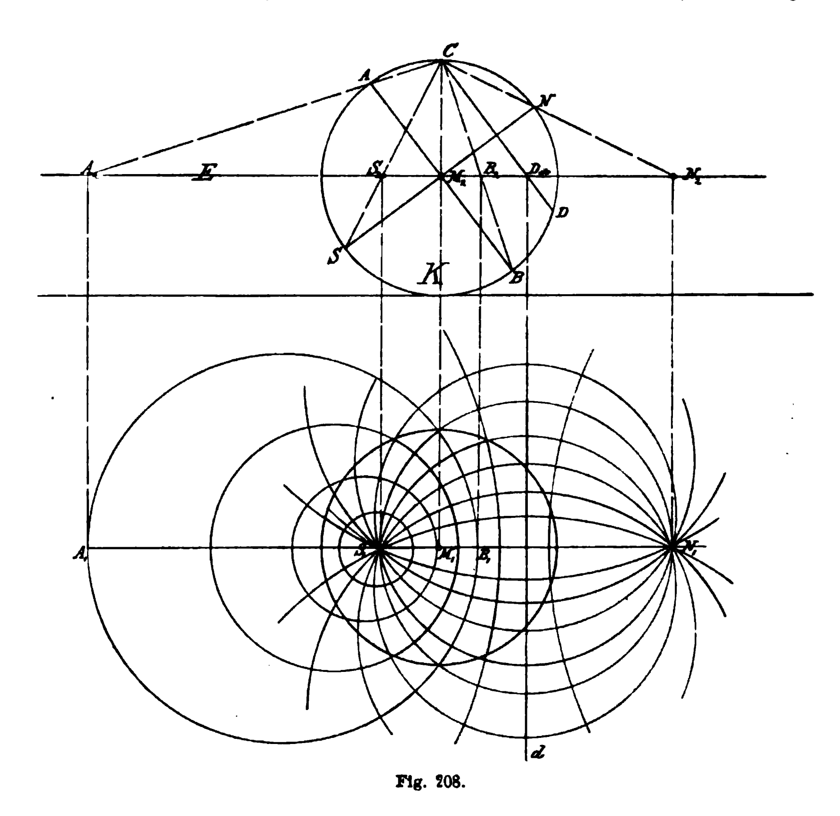


Fig. 208.

Pole) gehen. K sei die zweite Projektion der Kugelfläche, S und N die Pole und C der Mittelpunkt reciproker Radien (zugleich das Projektionscentrum). Die Projektionsebene E, welche der Kugelfläche K zugeordnet ist, gehe durch den Mittelpunkt M und sei parallel zur Horizontalebene. Ziehen wir die Strahlen CS und CN, so schneiden dieselben E in den Punkten S_2 und N_2, deren Horizontalprojektionen S_1 und N_1 sind. Die Abbildungen der Meridiane sind nun diejenigen Kreise, welche durch S_1 und N_1 gehen. Die zu SN senkrechte Gerade AB stellt die Projektion des Äquators dar. Wir ziehen die Strahlen CA und CB, von welchen E in den

Punkten A_2 und B_2 getroffen wird, und bestimmen noch die Horizontalprojektionen A_1 und B_1. Der Kreis, welcher um $A_1 B_1$ als Durchmesser beschrieben wird, stellt die Abbildung des Äquators dar. In gleicher Weise lassen sich die Abbildungen aller zum Äquator parallelen Kreise bestimmen. Derjenige Parallelkreis, welcher durch C geht (im Aufriss durch die Gerade CD dargestellt), wird durch eine zu $S_1 N_1$ senkrechte Gerade d abgebildet, welche senkrecht unter D_2 liegt. Diese Gerade stellt die gemeinschaftliche Chordale der Abbildungen der Parallelkreise dar, sie muss also durch die Mitte D_1 der beiden Punkte S_1 und N_1 gehen. Diese Andeutungen genügen, um die nötigen Meridiane und Parallelkreise zeichnen zu können. Die Horizontalprojektion zeigt selbstverständlich die gesuchte Abbildung in ihrer wahren Gestalt, von welcher derjenige Teil, welcher der unteren Hälfte der Kugel entspricht, durch stärkere Linien hervorgehoben ist.

Man löse auch hier die Aufgabe: Die Abbildung eines Punktes zu finden, welcher durch geographische Länge und Breite gegeben ist.

Abbildung der Mantelfläche eines geraden Cylinders.

32) Diejenige Fläche, welche einer geraden Cylinderfläche mit kreisförmigem Querschnitt in Bezug auf einen beliebigen Punkt M als Mittelpunkt reciproker Radien zugeordnet ist, gehört einer Art von Flächen an, welche Cykliden genannt werden. Jeder Seitenlinie der Cylinderfläche entspricht ein durch M gehender Kreis; alle derartigen Kreise werden in M von einer zu den Seitenlinien parallelen Tangente berührt. Liegt M auf der Achse der Cylinderfläche, so sind die den Seitenlinien zugeordneten Kreise einander gleich. Diesen Fall stellt Fig. 209 dar. Q_1 und Q_2 sind Grundriss und Aufriss der Cylinderfläche, welche senkrecht zur Horizontalebene steht. Um den Mittelpunkt $(M_1 M_2)$ legen wir eine den Mantel berührende Kugelfläche K, dann berührt jeder einer Seitenlinie in Bezug auf K zugeordnete Kreis diese Kugelfläche. Die ersten Projektionen einer Reihe von derartigen Kreisen sind gerade Linien, die zweiten Projektionen dagegen Ellipsen, welche leicht auf bekannte Weise konstruiert werden können. Den senkrecht zu den Seitenlinien stehenden Kreisen sind Kreise zugeordnet, welche alle Kreise der vorigen Art rechtwinklig durchschneiden. Ist GH die Vertikalprojektion eines derartigen Kreises, so ziehen wir die Strahlen GM_2 und HM_2, dann erhalten wir in G_2 und H_2 die Vertikalprojektionen der G und H zugeordneten Punkte und die Gerade $G_2 H_2$ stellt die Vertikalprojektion des GH zugeordneten Kreises dar. Die Horizontalprojektion $G_1 H_1$ dieses Kreises erscheint in wahrer Grösse.

33) Der Mittelpunkt M der reciproken Radien liege ausserhalb der Cylinderfläche (Fig. 210).

Es seien A_1 und A_2 Grundriss und Aufriss der Cylinderfläche, m_1 und m_2 die beiden Projektionen des Punktes M. Der letztere liege so, dass die Gerade $A_1 m_1$ (welche m_1 mit dem Mittelpunkte A_1 des Grundkreises der Cylinderfläche verbindet) parallel zur Achse OX ist. Die Kugelfläche in Bezug auf welche die der Cylinderfläche zugeordnete Cyklide konstruiert

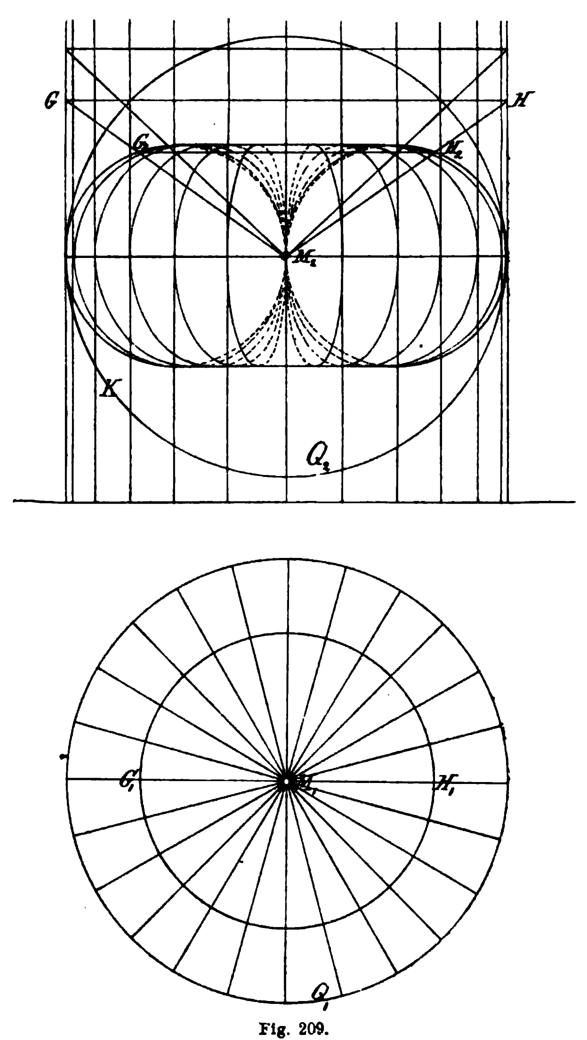


Fig. 209.

werden soll, möge die Cylinderfläche berühren. Den äussersten Seitenlinien der zweiten Projektion sind zwei durch m_2 gehende Kreise zugeordnet, deren Horizontalprojektionen in die Gerade $A m_1$ fallen. Dem in gleicher Höhe mit dem Mittelpunkt der reciproken Radien liegenden Querschnitte der Cylinderfläche ist ein Kreis zugeordnet, dessen erste Projektion den Grund-

riss der Cylinderfläche berührt. Die den Seitenlinien zugeordneten Kreise erscheinen im Grundrisse als gerade Linien, welche durch m_1 gehen. Ihre Vertikalprojektionen sind leicht zu konstruierende Ellipsen. Allen senkrecht zu den Seitenlinien stehenden Kreisschnitten der Cylinderfläche sind wieder Kreise zugeordnet, deren Vertikalprojektionen durch gerade Linien dargestellt werden; so ist dem Schnitt GH der Schnitt $g_2 h_2$ der Cyklide zugeordnet, dessen Bestimmung sofort aus Fig. 210 zu erkennen ist. In Fig. 210 ist seitlich zu einer veränderten Lage des Grundrisses die Vertikalprojektion der Cyklide dargestellt, welche die eigentümliche Fläche noch anschaulicher zu machen geeignet ist. Der Umriss derselben ergiebt sich als Einhüllende aller Projektionen der auf der Cyklide liegenden Kreislinien.

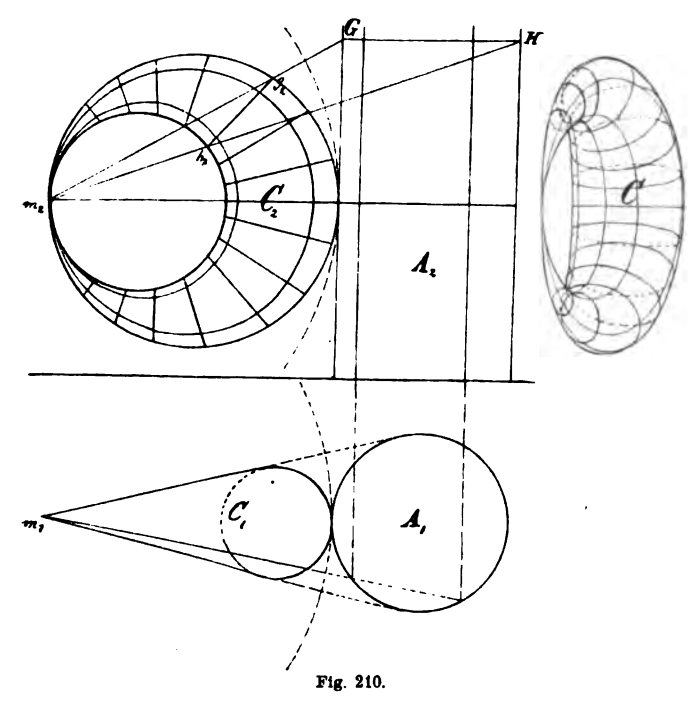


Fig. 210.

34) Liegt der Mittelpunkt M der reciproken Radien innerhalb der Cylinderfläche jedoch nicht auf der Achse derselben, so erhält die Cyklide die in Fig. 211 durch Grundriss und Aufriss dargestellte Form. Auch in diesem Falle haben die den Seitenlinien der Cylinderfläche zugeordneten Kreise eine durch M gehende Tangente, welche jenen Seitenlinien parallel ist, gemeinschaftlich. Die Herstellung der beiden Projektionen der Cyklide ist sehr einfach, wir können dieselbe dem Studierenden überlassen.

35) Eine merkwürdige Form nimmt die Cyklide an, wenn der Mittelpunkt M der reciproken Radien auf der Cylinderfläche selbst liegt (Fig. 212).

Den Seitenlinien sind in Bezug auf die Kugel (u_1, u_2) Kreise zugeordnet, welche um so grösser werden, je mehr die betr. Seitenlinie sich dem Mittelpunkt M nähert. Diejenige Seitenlinie, welche durch den Mittelpunkt der reciproken Radien geht, ist sich selbst zugeordnet. Demjenigen Querschnitt der Cylinderfläche, welcher durch M geht und senkrecht zu den Seitenlinien

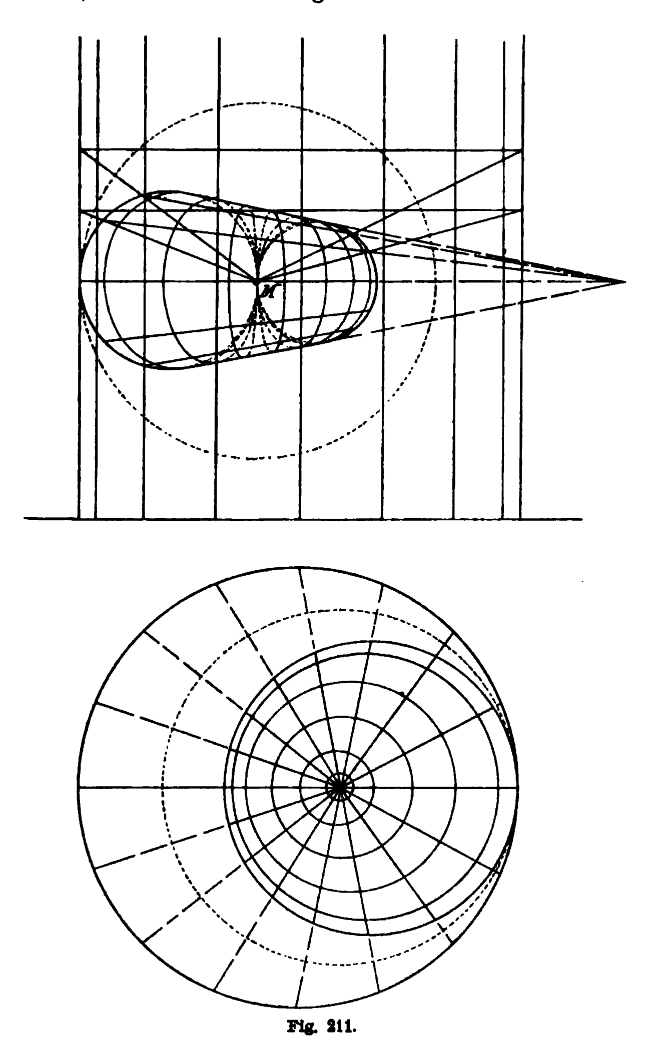


Fig. 211.

steht, ist eine Gerade g zugeordnet. Ziehen wir deshalb durch M_1 (Grundriss links) irgend einen Strahl, welcher den ebengenannten Querschnitt in B und die zugeordnete Gerade g in B′ schneidet, so ist der durch B gehenden Seitenlinie, deren Horizontalprojektion der Punkt B ist, ein Kreis über M_1 B′ als Durchmesser zugeordnet. Die erste Projektion dieses Kreises ist

die Gerade $M_1 B'$, die zweite Projektion desselben eine Ellipse, deren kleine Achse $M_2 A_2$ ist und deren grosse Achse die Länge $M_1 B'$ hat. Hiernach ist

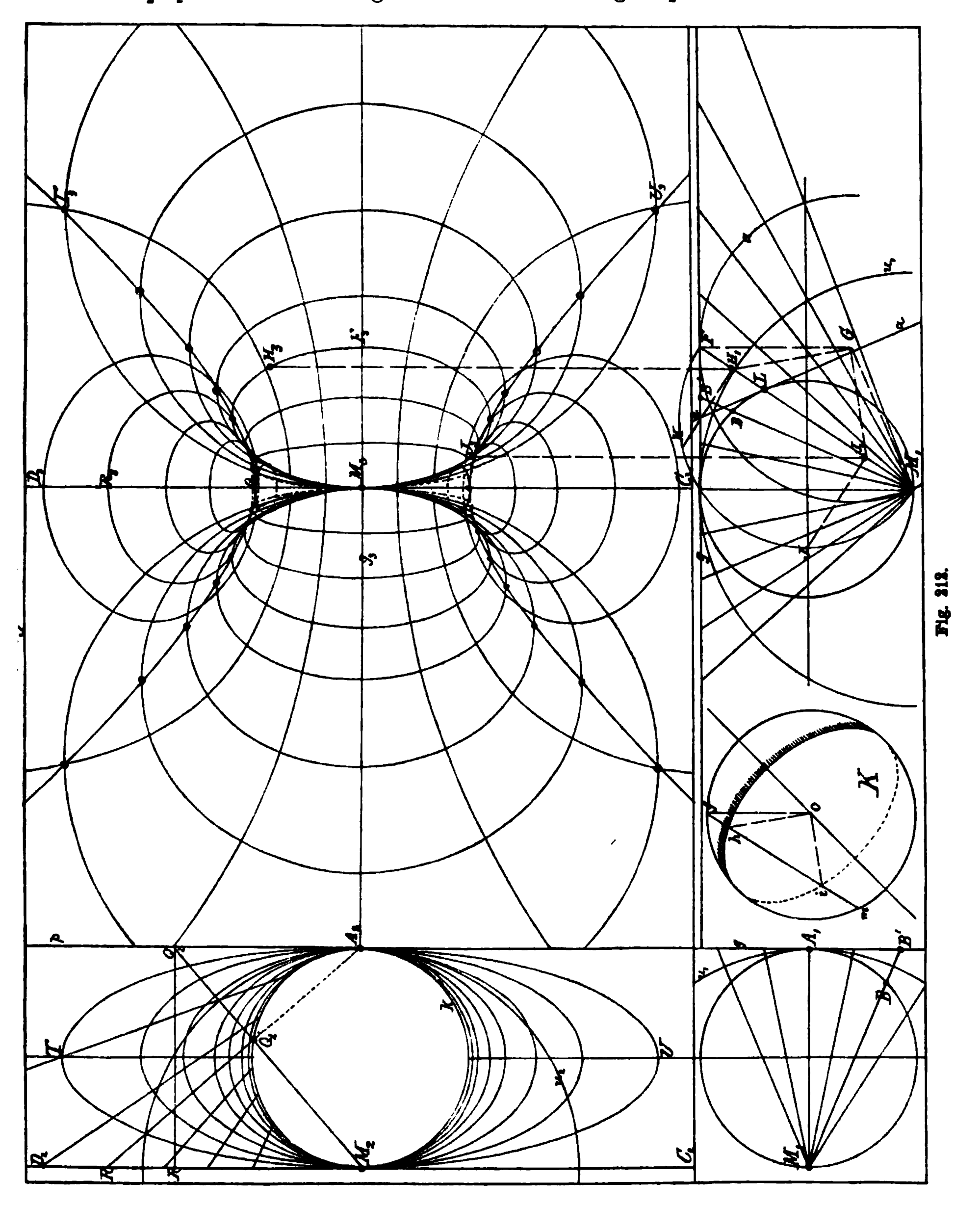


Fig. 212.

dieselbe leicht zu konstruieren. Um diese Fläche noch anschaulicher zu machen, ist dem Grundriss und Aufriss auch noch die Seitenansicht hinzugefügt worden.

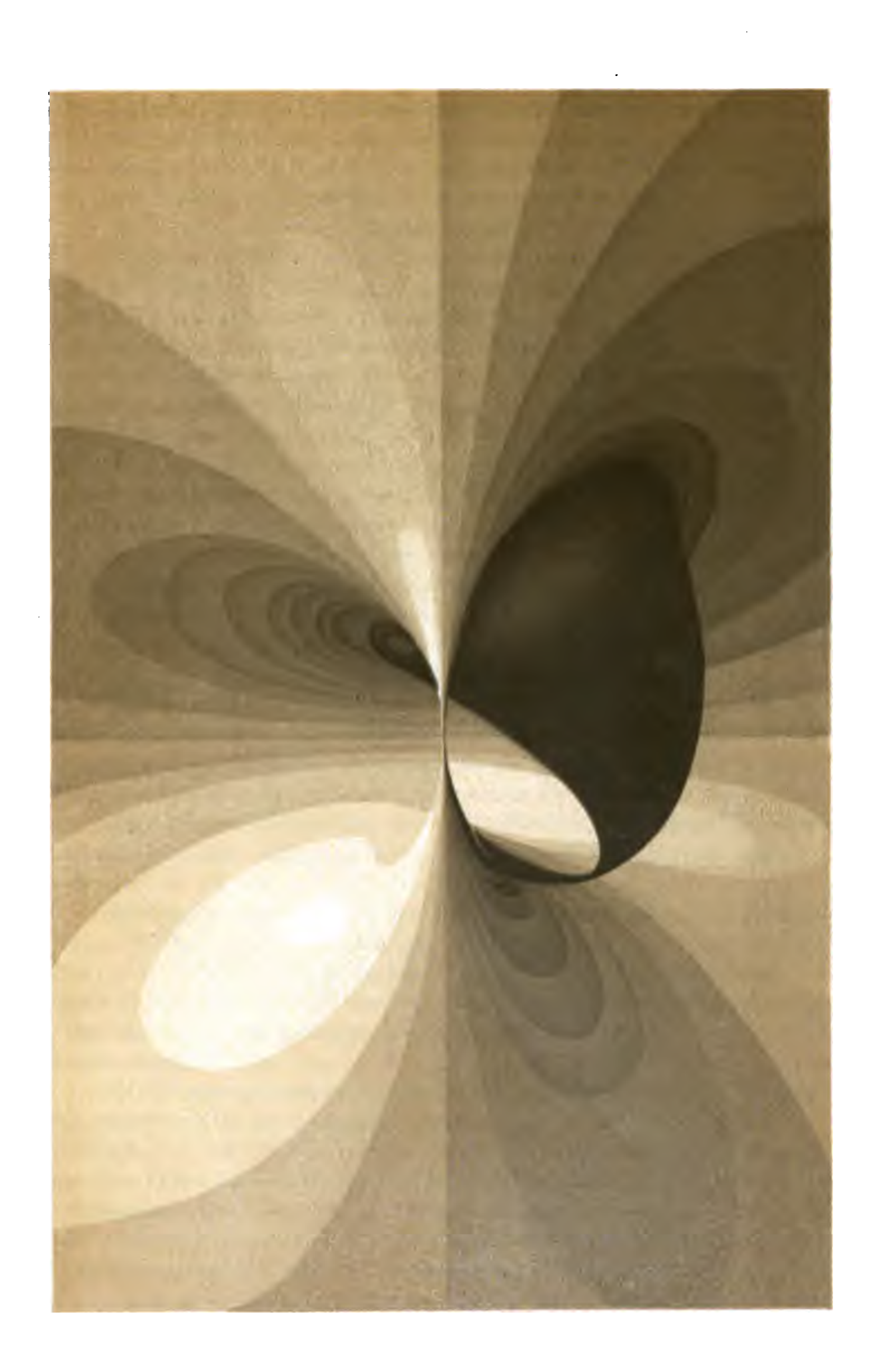
Zur bequemeren Herstellung der Seitenansicht ist rechts der um 90° gedrehte Grundriss benutzt worden. Die Cyklide ist durch zwei Scharen von Kreisen dargestellt, welche den Seitenlinien und den Querschnitten der Cylinderfläche entsprechen. Die Projektion der ersten Schar besteht in der Seitenansicht aus einer Schar von Ellipsen, welche durch M_3 gehen und die Gerade $C_3 D_3$ in diesem Punkte berühren. Um die Projektion eines Kreises der zweiten Schar zu finden, zeichnen wir in dem Aufriss links die durch eine Gerade $Q_2 R_2$ dargestellte Projektion eines Querschnittes der Cylinderfläche. Da nun der Seitenlinie p der Kreis k zugeordnet ist, so geht die Polare des Punktes Q_2 durch den Q_2 zugeordneten Punkt Q_2' (welcher auf k liegt) und durch den sich selbst zugeordneten Berührungspunkt A_2 der Geraden p und des Kreises u_2. Der Punkt R_2', in welchem $A_2 Q_2'$ die Gerade $M_2 R_2$ schneidet, ist aber dem Punkte R_2 zugeordnet; folglich stellt $Q_2' R_2'$ die Projektion des Kreises dar, welcher dem Querschnitt $Q_2 R_2$ des Cylinders zugeordnet ist. Die Projektion der Schar aller derartigen Kreise in dem Aufriss links besteht demnach aus einem Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt A_2, und diejenige des durch $Q_2' R_2'$ festgestellten Kreises ist in der Seitenansicht rechts eine Ellipse, deren grosse Achse gleich der Strecke $Q_2' R_2'$ ist und deren kleine Achse $Q_3 R_3$ durch die beiden Projicierenden $Q_2' Q_3$ und $R_2' R_3$ gefunden wird.

Betrachten wir diejenige Schar der Kreise auf der Cyklide, welche den Seitenlinien der Cylinderfläche zugeordnet sind, so können wir auch folgende Entstehungsweise der Cyklide leicht erkennen:

Gegeben sind zwei aufeinander senkrecht stehende windschiefe Geraden g und g'. Um die Achse derselben als Durchmesser ist ein Kreis beschrieben, welcher g' berührt. Der Kreis werde um die Tangente g' gedreht, zugleich verändere sich der Durchmesser so, dass der Umfang des Kreises stets die Gerade g schneidet; alsdann beschreibt der Umfang des veränderlichen Kreises die Cyklide.

Legen wir durch die Achse des Cylinders den Schnitt TU senkrecht zur zweiten Projektionsebene (Aufriss links), so wird die Cyklide in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten, deren wahre Gestalt in dem Aufriss rechts zum Vorschein kommt. Der Beweis hierzu ergiebt sich unmittelbar mit Hülfe von I, 21 und Fig. 26.

Von Interesse ist es, die Lichtgleichen und Schattengrenzen dieser Fläche kennen zu lernen. Die Bestimmung der Lichtgleichen ist mit Hülfe der Normalkugel K leicht auszuführen, wozu einige Andeutungen genügen. Die Tangente α (Grundriss rechts) stelle die Projektion einer Berührungsebene des Cylinders dar. Derselben ist eine Kugelfläche zugeordnet, deren Projektion der durch F und M_1 gehende Kreis a ist, welcher zugleich die Gerade g in F berührt. Der Seitenlinie in L der Cylinderfläche entspricht



also der über FM_1 als Durchmesser gezeichnete Kreis; in diesem berührt demnach die Kugelfläche a die Cyklide. Zeichnen wir auf der Normalkugel die Projektion fm des ähnlich liegenden Kreises (of $\parallel$ GF, mf $\parallel$ FM_1), so schneidet letztere die Projektion der Lichtgrenze in h und i. Die ähnlich liegenden Punkte H_1 und J_1 finden wir leicht, wenn wir $GH_1 \parallel$ oh und GJ_1 parallel oi ziehen. Durch die Projicierenden H_1H_3 und J_1J_3 erhalten wir in H_3 und J_3 Punkte der Lichtgrenze in dem Aufriss rechts. Wir können diese beiden Punkte noch schärfer bestimmen, wenn wir im Grundriss den Berührungskreis um seinen Durchmesser M_1F drehen, bis derselbe in wahrer Gestalt erscheint. Ziehen wir alsdann H_1H und J_1J senkrecht zu FM_1, so sind die Strecken HH_1 und JJ_1 gleich den senkrechten Abständen der Punkte H_3 und J_3 von der Mittellinie g_3.

Auf diese Weise kann man die in Fig. 213 dargestellten Lichtgleichen bestimmen. Da ähnliche Konstruktionen schon im 2. Teile d. W. angegeben sind, so mögen diese Andeutungen genügen.

Es mag noch bemerkt werden, dass die Cylinderfläche von unzählig vielen einbeschriebenen Kugeln in Kreisen von gleicher Grösse (Querschnitten) berührt wird. Diesen Kugeln sind diejenigen Kugeln zugeordnet, welche die Cyklide in den Kreisen der zweiten Schar berühren. Mit Hülfe der letzteren lassen sich die Lichtgleichen auf dieselbe Weise bestimmen.

36) Für alle drei Formen dieser Fläche gelten folgende Eigenschaften, welche sich aus den entsprechenden Eigenschaften der Cylinderfläche ergeben, wenn man statt der Seitenlinien, Kreise oder Ebenen bei der Cylinderfläche die ihnen zugeordneten Gebilde bei der Cyklide an die Stelle setzt.

Durch je zwei Seitenlinien der Cylinderfläche lässt sich eine Ebene legen.	Durch je zwei Kreislinien einer Schar auf der Cyklide lässt sich eine Kugelfläche legen.
Die Cylinderfläche wird von unzählig vielen Ebenen in Seitenlinien und von unzählig vielen Kugelflächen in Kreislinien berührt. Jede der Berührungsebenen wird von jeder der Kugeln berührt.	Die Cyklide wird von 2 Scharen unzählig vieler Kugelflächen in Kreislinien berührt. Jede Kugelfläche der einen Schar berührt jede Kugelfläche der andern Schar.

37) Die einer geraden Kegelfläche zugeordnete Fläche darzustellen, wenn der Mittelpunkt M der reciproken Radien ausserhalb derselben liegt.

Anl. zur Aufl. Durch M und durch die Achse der Kegelfläche legen wir eine Ebene E, welche die Kegelfläche in den beiden Seitenlinien l' und l'' schneidet. Wir nehmen diese Ebene als Projektionsebene an, und zeichnen die gerade Projektion der gesuchten Fläche. Den Seitenlinien l' und l'' sind zwei Kreise K' und K'' zugeordnet. Die Kegelfläche wird von unzählig vielen Kugelflächen in Kreisen berührt; sie ist demnach die Einhül-

lende aller dieser Kugelflächen. Den letzteren sind aber wiederum Kugelflächen zugeordnet, deren Projektionen die Berührungskreise sind, welche den beiden von K′ und K″ gebildeten Kreissicheln einbeschrieben werden können. Man zeichne die Projektionen derjenigen Kreise, welche den Seitenlinien und den Kreisschnitten der Kegelfläche zugeordnet sind.

38) Die Ringfläche mittelst reciproker Radien abzubilden.

Aufl. Es sei der von zwei konzentrischen Kreisen K und K′ (Fig. 214) begrenzte Ring die Projektion der Ringfläche. Der Mittelpunkt M der reci-

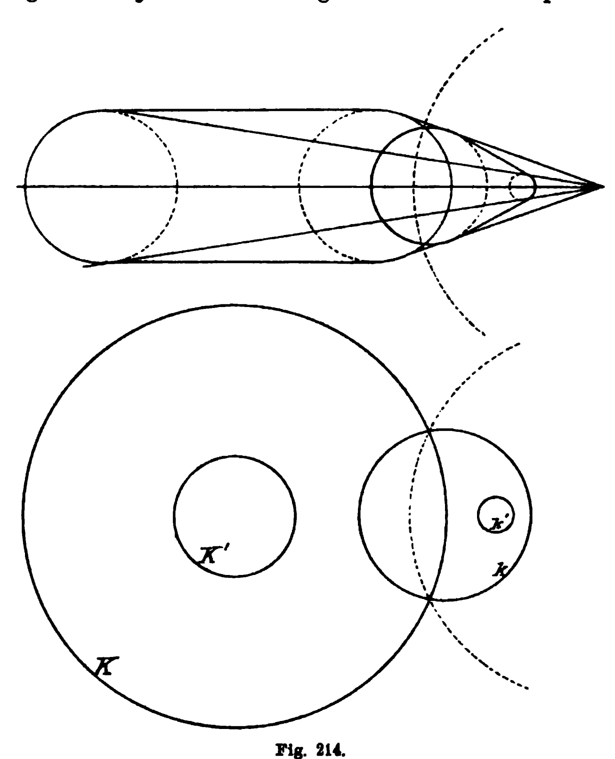


Fig. 214.

proken Radien liege in der Ebene dieser Kreise ausserhalb des Ringes. Dem Kreisringe ist der von den Kreisen k und k′ begrenzte nicht konzentrische Ring zugeordnet. Da nun die Ringfläche die Einhüllende unzählig vieler Kugeln von gleicher Grösse ist, so umhüllt die gesuchte Fläche die zugeordneten Kugelflächen, deren Projektionen die Reihe der Berührungskreise bilden, welche dem von k und k′ begrenzten Ringe einbeschrieben werden können.

Alle Schnitte der Ringfläche, welche durch die Achse derselben gehen (Meridianschnitte), sind Kreise, ebenso alle zur Achse senkrechten Schnitte. Die entsprechenden Kurven auf der zugeordneten Fläche sind ebenfalls Kreise,

deren Konstruktion wir dem Studierenden überlassen. In Fig. 214 ist der Aufriss der gesuchten Fläche hinzugefügt.

39) Der Mittelpunkt M der reciproken Radien liege auf dem Umfange des grössten Kreises der Ringfläche (Fig. 215 und 216).

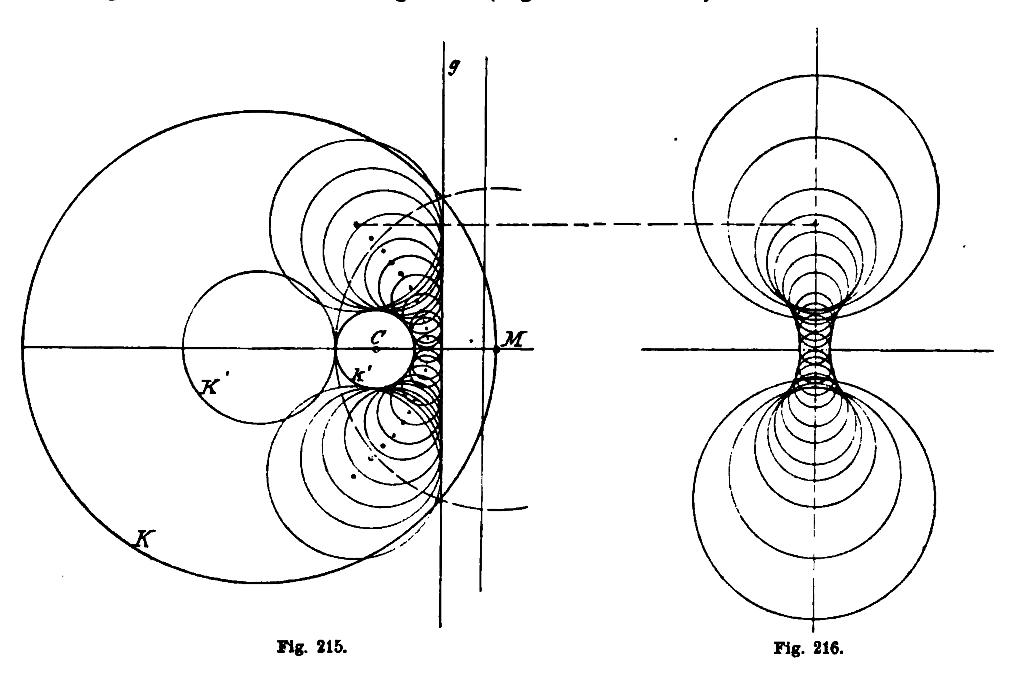


Fig. 215. Fig. 216.

Dem grössten Kreise K ist eine Gerade g und dem kleineren Kreise K′ der Kreis k′ zugeordnet. Die gesuchte Fläche hüllt, wie in den vorigen Fällen, unzählig viele Kugeln ein, deren Projektionen die Kreise sind, welche die Gerade g und den Kreis k′ berühren, den letzteren jedoch äusserlich. Die Mittelpunkte der Kugeln liegen auf einer Parabel, in der Ebene der Kreise K und K′. Der Brennpunkt ist der Mittelpunkt C des Kreises k′; die Leitlinie l ist parallel zu g und hat von dieser einen Abstand, welcher dem Halbmesser des Kreises k′ gleich ist. Auch in diesem Falle giebt eine Seitenansicht (s. Fig. 216) ein anschaulicheres Bild der Fläche.

Man konstruiere noch die den Kreisschnitten der Ringfläche zugeordneten Kreise in der Seitenansicht und bestimme die Lichtgleichen und den Schlagschatten.

40) Nach 6, Abschn. VIII d. I. Teiles beschreibt eine Gerade, welche sich um eine andere zu ihr windschiefe Gerade dreht, die Fläche eines Umdrehungshyperboloids. Wir nehmen den Mittelpunkt A der Fläche zum Mittelpunkt reciproker Radien und beschreiben um diesen eine Kugelfläche, welche etwa das Hyperboloid berührt. Jeder Geraden auf dem

Hyperboloid ist in Bezug auf diese Kugelfläche ein Kreis zugeordnet; die gesuchte Fläche wird folglich auch von dem Umfang eines Kreises beschrieben, welcher sich um eine durch seinen Umfang gehende Achse dreht, wenn die letztere zu dem durch den Schnittpunkt der Achse und des Kreisumfanges gehenden Durchmesser senkrecht steht. Die dem Hyperboloid zugeordnete Fläche ist hierdurch bestimmt. Nach 11) d. Abschn. ist aber der Hyperbel in Bezug auf ihren Mittelpunkt eine Lemniskate zugeordnet, folglich wird die gesuchte Fläche auch von der Lemniskate durch Drehung um die Achse g beschrieben. Die Meridianschnitte dieser Fläche sind demnach Lemniskaten, sie besitzt aber den Seitenlinien des Hyperboloids entsprechend zwei Scharen von Kreisschnitten. Die Ebene, welche durch den Schnittpunkt zweier sich schneidenden Geraden des Hyperboloids geht, berührt das letztere. Entsprechend berührt die der Ebene zugeordnete Kugelfläche die gesuchte Fläche in dem Schnittpunkt der beiden Kreise, welche jenen Seitenlinien des Hyperboloids zugordnet sind. Eine andere Schar von Kreisen, welche auf der gesuchten Fläche möglich sind, bilden die Parallelkreise, deren Ebenen senkrecht zur Drehachse stehen.

Auch bei dieser Fläche lassen sich die Lichtgleichen und Schattengrenzen mit Hülfe der Normalkugel bestimmen, was wir der eigenen Übung überlassen.

B. Polarfiguren.

1) Zu jedem Punkte A einer Ebene kann man in Bezug auf einen in derselben liegenden Kreis K eine Polare konstruieren. Bewegt sich A stetig auf einer Kurve C, so bewegt sich seine Polare ebenfalls stetig und umhüllt bei dieser Bewegung eine andere Kurve C_1, deren Gestalt von C abhängig ist. Man nennt C_1 die Polarfigur von C; der Kreis K heisst der Polarisationskreis.

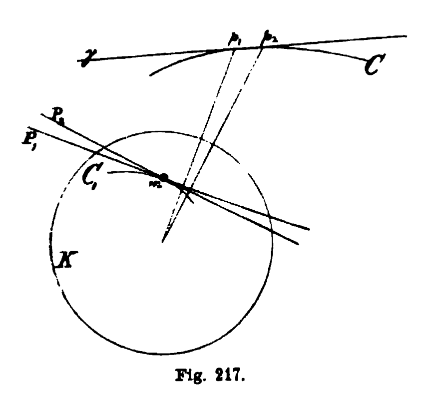


Fig. 217.

2) Ist C_1 die Polarkurve einer gegebenen Kurve C, so ist auch umgekehrt C die Polarkurve von C_1 (Fig. 217).

Beweis. Es sei p_1 ein Punkt der Kurve C und P_1 seine Polare in Bezug auf den Kreis K. Einem zweiten Punkte p_2 auf C, welcher dem p_1 unendlich nahe liegt, entspreche die Gerade P_2 als Polare. Die letztere weicht dann ebenfalls unendlich wenig von P_1 ab. Der Schnittpunkt m der Geraden P_1 und P_2 kann als Punkt der Kurve C_1 betrachtet werden. m ist aber der

Pol der Geraden g, welche durch die beiden unendlich nahen Punkte p_1 und p_2 der Kurve C geht, und somit eine Tangente der letzteren ist. Einem beliebigen Punkte m der Kurve C_1 entspricht demnach eine Tangente γ der Kurve C als Polare, wodurch der Satz bewiesen ist.

Anmerkung. An die Stelle des polarisierenden Kreises können wir auch einen beliebigen Kegelschnitt setzen, weil der Kreis durch eine Projektion in einen solchen verwandelt werden kann. Das in in 1) und 2) Gesagte behält hierfür seine Gültigkeit. Im Folgenden werden wir der bequemeren zeichnerischen Ausführung wegen den polarisierenden Kreis beibehalten.

3) Nach III, 22 gehen die Polaren aller Punkte einer Geraden g durch einen Punkt P, den Pol jener Geraden und umgekehrt, die Pole aller Geraden, welche durch einen Punkt gehen, liegen auf der Polare dieses Punktes. Die Polarfigur der Geraden g ist somit ein Punkt P, welcher von den Polaren aller Punkte der Geraden g eingehüllt wird.

Ist S (abc . .) (Fig. 218) ein Strahlenbüschel, g die Polare des Mittelpunktes S in Bezug auf den polarisierenden Kreis K, so liegt der Pol des Strahles a im Schnittpunkt A des vom Mittelpunkt M des Kreises K auf a gefällten Lotes mit g. Ebenso erhält man die Pole B, C . . der Strahlen b und c. Hieraus ergiebt sich, dass der Büschel M (A, B, C . .) dem von a, b, c . . gebildeten Büschel kongruent und folglich auch die Punktreihe A, B, C . . dem Büschel abc projektivisch ist.

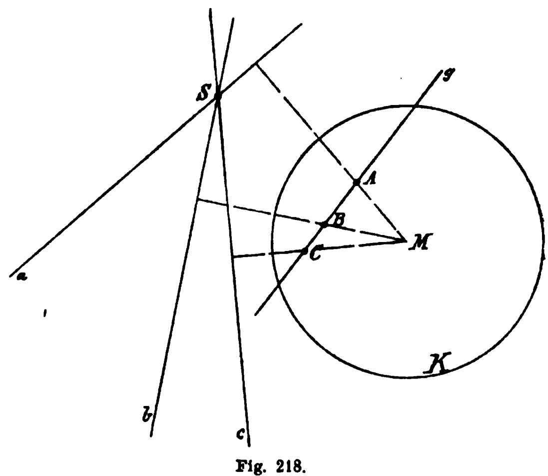


Fig. 218.

Die Polarfigur eines Strahlenbüschels ist demnach eine dem Büschel projektivische Punktreihe.

4) Die Polarfigur eines Kegelschnittes ist wieder ein Kegelschnitt.

Beweis. Sind S (a, b, c . .) und S′ (a′b′c′ . . .) (Fig. 219) zwei projektivische Strahlenbüschel, welche einen Kegelschnitt erzeugen und sind (ABC . .) und A′B′C′ . . die diesen Büscheln bez. projektivischen Punktreihen der Pole, so ist die Polare des Punktes a, in welchem sich a und a′ schneiden, die Verbindungslinie der Punkte A und A′. Die letztere ist somit eine Tangente der Polarkurve. Ebenso ist die Verbindungslinie der beiden Punkte B und B′ die Polare des Punktes β, in welchem sich b und b′ treffen u. s. f. Folglich sind die Polaren aller Punkte des gegebenen Kegelschnittes die Ver-

bindungslinien je zweier entsprechenden Punkte von zwei projektivischen Punktreihen, welche nach III, 1 einen Kegelschnitt einhüllen.

5) Wenn der Mittelpunkt des polarisierenden Kreises in einem Brennpunkt des Kegelschnittes liegt, so geht die Polarkurve des letzteren in einen Kreis über. Der Beweis hierfür ergiebt sich sofort aus VI, A 7. Wir brauchen nur zu beachten, dass z. B. in Fig. 187 N′Q′ die Polare des Punktes N in Bezug auf den Kreis k und Q′ der Pol der Tangente T′U′ ist. Hieraus folgt, dass der Kreis k_1 die Polarfigur der Parabel in Bezug auf den Kreis k ist und umgekehrt. In gleicher Weise ergiebt sich der Beweis für die andern Kegelschnitte.

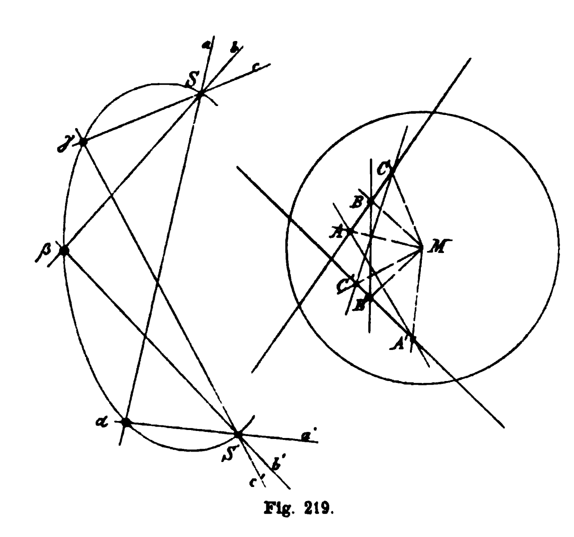


Fig. 219.

Wir wollen nun an einigen Beispielen zeigen, wie durch Polarisation gewisse Eigenschaften der Kegelschnitte gefunden werden können.

6) Es seien a, b, c (Fig. 220) drei Tangenten eines Kegelschnittes K und A, B, C die diesen Tangenten entsprechenden Punkte der Polarfigur K′,

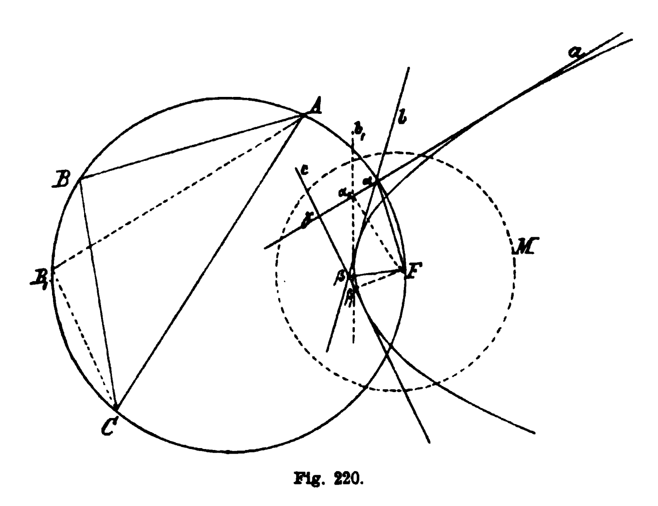


Fig. 220.

welche auf den um den Brennpunkt F gezeichneten Kreis M bezogen ist. Dann sind die Schnittpunkte α, β, γ der Tangenten bez. die Pole der Ge-

raden AB, BC und AC; folglich stehen $F\alpha$ und $F\beta$ senkrecht zu AB bez. BC. Die Summe der Winkel ABC und $\alpha F \beta$ beträgt demnach 2 Rechte. Giebt man der Tangente b die Lage b_1, so rückt ihr Pol nach B_1 und die Schnittpunkte α_1 und β_1 sind jetzt die Pole der Verbindungsgeraden AB_1 und B_1C. Da nun $\alpha_1 F$ senkrecht zu AB_1 und $\beta_1 F$ senkrecht $B_1 C$ steht, ferner $\angle A B_1 C = \angle ABC$ ist, so folgt, dass auch $\angle \alpha F \beta = \angle \alpha_1 F \beta_1$ ist. Hieraus folgt unmittelbar der Satz:

Der Abschnitt einer beweglichen Tangente, welcher zwischen zwei festen Tangenten eines Kegelschnittes liegt, erscheint von einem Brennpunkt aus unter einem Winkel von unveränderlicher Grösse.

7) Liegen die Berührungspunkte A und B zweier Tangenten AC und BD (Fig. 221) der Polarfigur eines Kegelschnittes in den Endpunkten eines Durchmessers, so entsprechen den Punkten A und B zwei Tangenten a und b des Kegelschnittes als Polaren. Umgekehrt entsprechen den Berührungspunkten c und d jener Tangenten die in diesem Falle parallelen Tangenten AC bez. BD der Polarfigur. Da nun Fc senkrecht zu AC und Fd senkrecht zu BD steht, so ist cFd eine Gerade. Ferner ist α als Durchschnitt von a und b der Pol des Kreisdurchmessers AB. Drehen wir AB um

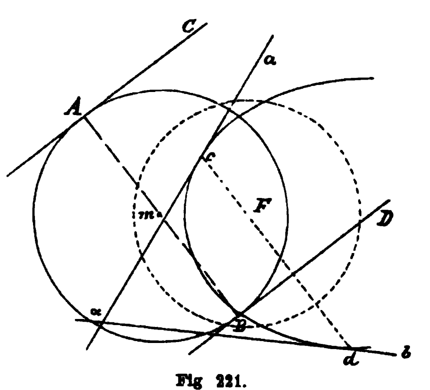


Fig 221.

den Mittelpunkt m, so durchläuft α eine Gerade, nämlich die Polare von m und cd dreht sich um den Brennpunkt F. Hieraus folgt: Der Ort des Durchschnittes zweier Tangenten eines Kegelschnittes, deren Berührungssehne durch einen Brennpunkt geht, ist eine Gerade g; man nennt dieselbe eine Leitlinie des Kegelschnittes. Um den Punkt zu finden, in welchem dieselbe die Hauptachse trifft, zieht man durch den Endpunkt der Brennpunktssehne, welche senkrecht zur Hauptachse steht, die Tangente an den Kegelschnitt; diese geht durch den gesuchten Punkt (s. III, 40).

8) Sind $a_1, a_2, a_3 \ldots a_6$ (Fig. 222) sechs Tangenten eines Kegelschnittes, so entsprechen denselben 6 Punkte $A_1 A_2 A_3 \ldots A_6$ der Polarfigur. Nun schneiden sich die gegenüberliegenden Seitenpaare

$$\begin{array}{ccc} A_1A_2 & \text{und} & A_4A_5 \\ A_2A_3 & \text{„} & A_5A_6 \\ A_3A_4 & \text{„} & A_6A_1 \end{array}$$

in drei Punkten P_1, P_2, P_3, welche nach dem Pascal'schen Satze auf einer Geraden G liegen. Folglich gehen die Polaren dieser drei Punkte, nämlich die Hauptdiagonalen des von jenen sechs Tangenten des Kegelschnittes

gebildeten Sechsecks durch einen Punkt Q, welcher der Pol der Geraden G ist. Man sieht hieraus, wie man durch Polarisation aus dem Pascalschen Satze den von Brianchon erhält.

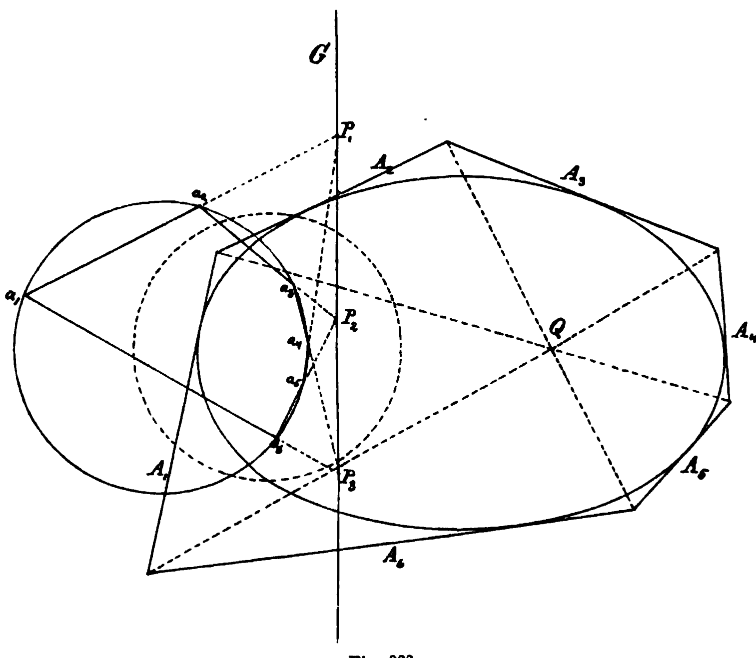


Fig. 222.

9) Die Apollonische Berührungsaufgabe, einen Kreis Q zu konstruieren, welcher drei gegebene Kreise K_1, K_2 und K_3 berührt, lässt sich ebenfalls durch Polarisation lösen (Fig. 223). Der Ort des Mittelpunktes eines Kreises K, welcher zwei gegebene Kreise z. B. K_1 und K_2 äusserlich berührt, ist eine Hyperbel (s. III, 49), deren Brennpunkte die Mittelpunkte C_1 und C_2 von K_1 und K_2 sind. Wir polarisieren diese Hyperbel in Bezug auf den Kreis K_1. Als Polarfigur erhalten wir einen Kreis Q_1, welcher leicht zu konstruieren ist. Sein Mittelpunkt liegt auf der Centrallinie C_1C_2 und der Durchmesser ist die Entfernung der auf C_1C_2 liegenden, den Scheiteln M_1 und M_2 der Hyperbel zugeordneten Punkte (M_1 ist die Mitte von AB und M_2 die Mitte von DE). Da nun der Mittelpunkt des gesuchten Berührungskreises auf der Hyperbel liegt, so muss seine Polare den Kreis Q_1 berühren. Wir können nun einen zweiten Kreis Q_2 als Polarfigur derjenigen Hyperbel konstruieren, welche der Ort des Mittelpunktes eines K_1 und K_3 berührenden Kreises ist und zwar auch in Bezug auf K_1 als polarisierenden Kreis. Die Polare des gesuchten Mittelpunktes M muss hiernach auch Q_2 berühren. Wir konstruieren den Punkt hiernach als Pol einer gemeinschaftlichen

Tangente t der beiden Kreise Q_1 und Q_2 in Bezug auf K_1. Nach diesen Andeutungen konstruiere man die sämtlichen Berührungskreise.

10) Aus 4) ergiebt sich die allgemeine Gültigkeit des Gesetzes der Dualität für die Kegelschnitte. Diesem Gesetze entspricht die doppelte Ent-

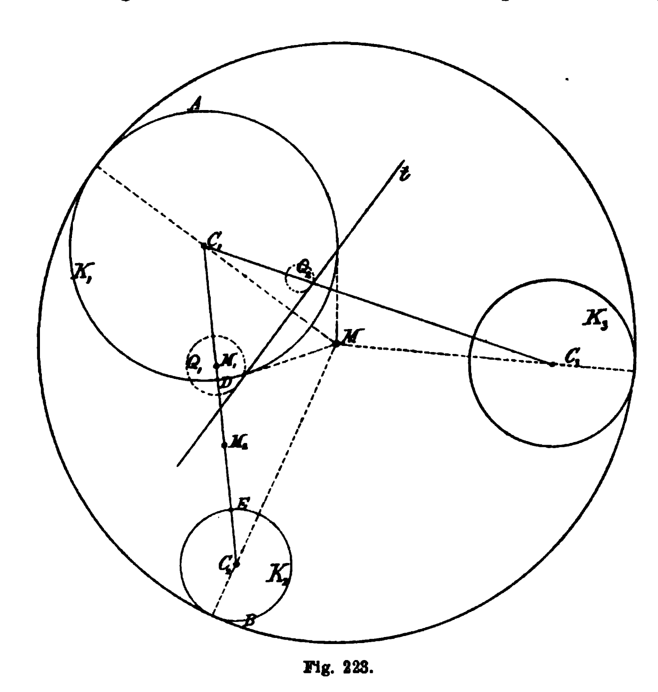
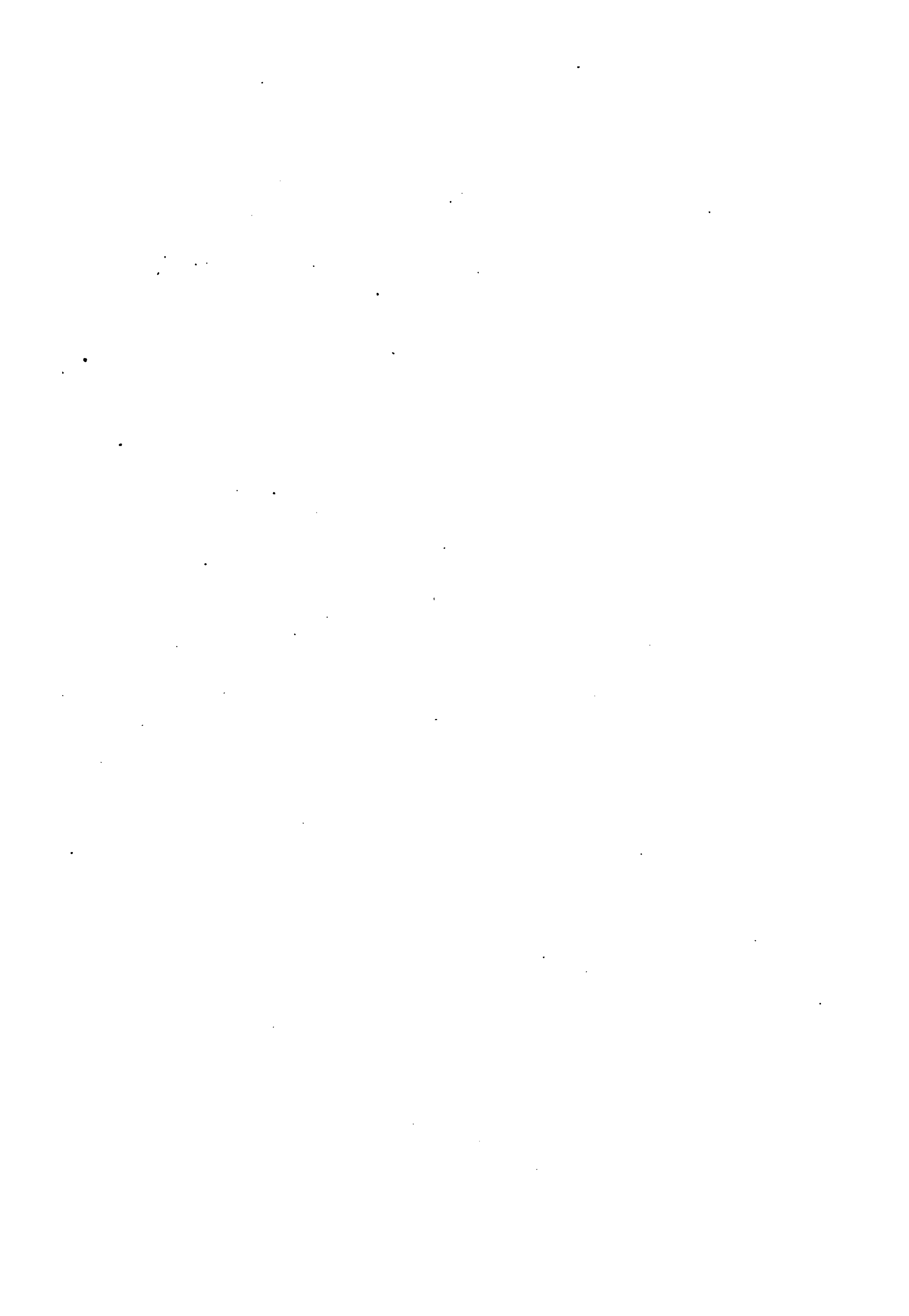


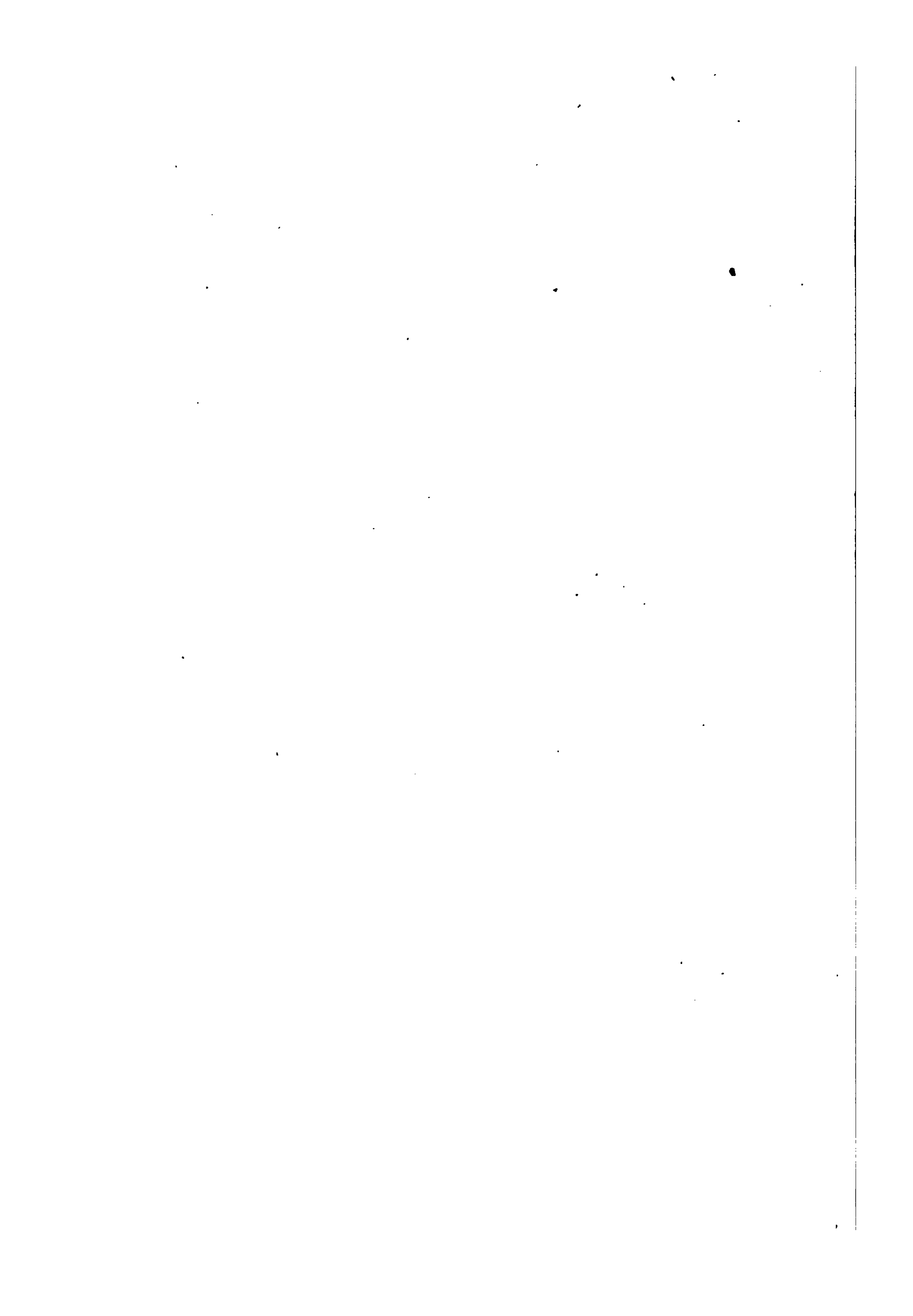
Fig. 223.

stehungsweise derselben, welche in III, 1 aufgestellt wurde. Man kann demnach zu jedem Satz über Kegelschnitte, welcher Lagenbeziehungen betrifft, den dualistisch entsprechenden Satz aufstellen, ohne dass der letztere noch eines weiteren Beweises bedarf.

Leipzig. Druck von Grimme & Trömel.








Math 5709.02.3
Lehrbuch der darstellenden Geometri
Cabot Science
003339552
3 2044 091 906 339